**Задания С 3 из ЕГЭ**

**Пример 1.** Решите систему неравенств:

    ![\[ \begin{cases}4^x-6\cdot 2^x+8\geqslant 0, \\ \log_3\frac{2x^2+3x-5}{x+1}\leqslant 1.\end{cases} \]]()

**Решение задачи C3.**

**1.** Решаем сперва первое неравенств. Используя замену переходим к неравенству:

    ![\[ $t^2-6t+8\geqslant 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\leqslant 2, \\ t\geqslant 4.\end{array}\right. \]]()

Переходим к обратной подстановке:

    ![\[ \left[\begin{array}{l}2^x\leqslant 2^1, \\ 2^x\geqslant 2^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leqslant 1, \\ x\geqslant 2.\end{array}\right.\Leftrightarrow \]]()

    ![\[ x\in(-\mathcal{1};1]\cup[2;+\mathcal{1}). \]]()

**2.** Решаем теперь второе неравенство. Область его допустимых значений определяется неравенством:

    ![\[ \frac{2x^2+3x-5}{x+1}>0\Leftrightarrow x\in(-2,5;-1)\cup(1;+\mathcal{1}). \]]()

В области допустимых значений с учетом того, что основание логарифма переходим к равносильному неравенству:

    ![\[ \frac{2x^2+3x-5}{x+1}\leqslant 3\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x+1}\leqslant 0\Leftrightarrow \]]()

    ![\[ x\in (-\mathcal{1};-2]\cup(-1;2]. \]]()

Исключая решения, не входящие в область допустимых значений, получаем промежуток ![x\in (-2,5;-2]\cup(1;2].]()

**3.** Ответом к **системе** неравенств будет **пересечение** полученных промежутков, то есть ![x\in(-2,5;-2]\cup\{2\}.]()



Полученные промежутки на числовой прямой. Решение — их пересечение

**Пример 2.** Решите систему неравенств:

    ![\[ \begin{cases} 2^x+16\cdot 2^{-x}\geqslant 17, \\ 2\log_9(4x^2+1)\leqslant \log_3(3x^2+4x+1).\end{cases} \]]()

**Решение задачи C3.**

**1.** Решаем сперва первое неравенство. Умножаем обе части на и делаем замену в результате чего приходим к неравенству:

    ![\[ t^2-17t+16\geqslant 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\leqslant 1, \\ t\geqslant 16.\end{array}\right. \]]()

Переходим к обратной подстановке:

    ![\[ \left[\begin{array}{l}2^x\leqslant 2^0, \\ 2^x\geqslant 2^4\end{array}\right.\Leftightarrow\left[\begin{array}{l}x\leqslant 0, \\ x\geqslant 4\end{array}\right.\Leftrightarrow \]]()

    ![\[ x\in(-\mathcal{1};0]\cup[4;+\mathcal{1}). \]]()

**2.** Решаем теперь второе неравенство. Область его допустимых значений определяется системой:

    ![\[ \begin{cases}4x^2+1>0, \\ 3x^2+4x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\mathcal{1};-1)\cup\left(-\frac{1}{3};+\mathcal{1}\right). \]]()

Воспользовавшись [свойствами логарифмов](http://yourtutor.info/%D1%80%D0%B5%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5-%D0%B7%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87-%D1%813-%D0%B5%D0%B3%D1%8D-%D0%BF%D0%BE-%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B5-%D0%BB%D0%BE%D0%B3), в области допустимых значений переходим к равносильному неравенству:

    ![\[ \log_3(4x^2+1)\leqslant\log_3(3x^2+4x+1)\Leftrightarrow \]]()

    ![\[ 4x^2+1\leqslant 3x^2+4x+1\Leftrightarrow x^2-4x\leqslant 0\Leftrightarrow x\in[0;4]. \]]()

Данный промежуток целиком входит в область допустимых значений данного неравенства.

**3.** Общее решение **системы** будет являться **пересечением** полученных промежутков, то есть 



Графическое изображение полученных промежуток. Решение системы — их пересечение

**Пример 3.** Решите систему неравенств:

    ![\[ \begin{cases}3^x<1+12\cdot 3^{-x}, \\ 2\operatorname{ln}\frac{1}{3x-2}+\operatorname{ln}(5-2x)\geqslant 0.\end{cases} \]]()

**Решение задачи C3.**

**1.** Решаем сперва первое неравенство. Умножаем обе его части на после чего получаем неравенство:

    ![\[ $3^{2x}-3^x-12<0. \]]()

Используя подстановку переходим к следующему неравенству:

    ![\[ t^2-t-12<0\Leftrightarrow -3<t<4. \]]()

Переходим к обратной подстановке:

    ![\[ -3<3^x<4^2\Leftrightarrow x\in(-\mathcal{1};\log_34). \]]()

**2.** Решаем теперь второе неравенство. Определим сначала область допустимых значений этого неравенства:

    ![\[ \begin{cases} \frac{1}{3x-2}>0, \\ 5-2x>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x>\frac{2}{3}, \\ x<2,5\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{2}{3}; 2,5\right). \]]()

В области допустимых значений переходим к равносильному неравенству:

    ![\[ \operatorname{ln}\frac{5-2x}{(3x-2)^2}\geqslant 0\Leftrightarrow \frac{5-2x}{(3x-2)^2}\geqslant 1\Leftrightarrow \]]()

    ![\[ \frac{9x^2-10x-1}{(3x-2)^2}\leqslant 0\Leftrightarrow x\in\left[\frac{5-\sqrt{34}}{9};\frac{5+\sqrt{34}}{9}\right]. \]]()

Обращаем внимание, что

    ![\[ \frac{5+\sqrt{34}}{9}<\frac{5+\sqrt{36}}{9}=\frac{11}{9}<2,5 \]]()

    ![\[ \frac{5-\sqrt{34}}{9}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{34}}{9}<0<\frac{2}{3}. \]]()

Тогда с учетом области допустимых значений получаем: ![x\in\left(\frac{2}{3};\frac{5+\sqrt{34}}{9}\right].]()

**3.** Находим общее решения неравенств. Сравнение полученных иррациональных значений узловых точек — задача в данном примере отнюдь не тривиальная. Сделать это можно следующим образом. Так как

    ![\[ \frac{5+\sqrt{34}}{9}<\frac{5+\sqrt{39,0625}}{9}=\frac{5}{4}, \]]()

    ![\[ \log_34 = \log_3\sqrt[4]{256}>\log_3\sqrt[4]{243}=\log_33^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4}, \]]()

то и окончательный ответ к системе имеет вид: ![x\in\left(\frac{2}{3};\frac{5+\sqrt{34}}{9}\right].]()

**Пример 4.** Решите систему неравенств:

    ![\[ \begin{cases}\log_{\log_x 3x}(4x-1)\geqslant 0, \\ 21^x-9\cdot 7^x-3^x+9\leqslant 0.\end{cases} \]]()

**Решение задачи С3.**

**1.** Решим сперва второе неравенство:

    ![\[ 7^x\cdot 3^x-9\cdot 7^x-3^x+9\leqslant 0\Leftrightarrow \]]()

    ![\[ 7^x\cdot (3^x-9)-(3^x-9)\leqslant 0\Leftrightarrow \]]()

    ![\[ (7^x-1)\cdot(3^x-9)\leqslant 0\Leftrightarrow x\in[0;2]. \]]()

**2.** Первое неравенство исходной системы представляет собой логарифмическое неравенство с переменным основанием. Удобный способ решения подобных неравенств описан в статье «[Сложные логарифмические неравенства](http://www.berdov.com/docs/logarithm/complex_inequality/)», в его основе лежит простая формула:

    ![\[ \log_{k(x)}f(x)\lor \log_{k(x)}g(x)\Rightarrow \]]()

    ![\[ \Rightarrow (f(x)-g(x))\cdot (k(x)-1)\lor 0. \]]()

Вместо знака может быть подставлен любой знак неравенства, главное, чтобы он был один и тот же в обоих случаях. Использование данной формулы существенно упрощает решение неравенства:

    ![\[ \log_{\log_x 3x}(4x-1)\geqslant \log_{\log_x 3x} 1\Rightarrow \]]()

    ![\[ (4x-2)\cdot(\log_x 3x - 1)\geqslant 0\Leftrightarrow \]]()

    ![\[ \frac{4x-2}{\log_3 x}\geqslant 0\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup(1;+\mathcal{1}). \]]()

Определим теперь область допустимых значений данного неравенства. Она задается следующей системой:

    ![\[ \begin{cases}4x-1>0, \\ \log_x 3x > 0, \\ \log_x 3x\ne 1, \\ x> 0, \\ x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x>\frac{1}{4}, \\ \log_x 3x >\log_x 1, \\ x\ne 1, \\ x>0, \\ x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow \]]()

    ![\[ \begin{cases}x>\frac{1}{4}, \\ (3x-1)(x-1)>0 \\ x>0, \\ x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\mathcal{1}). \]]()

Легко видеть, что одновременно этот промежуток будет являться и решением нашего неравенства.

**3.** Окончательным ответом исходной **системы** неравенств будет **пересечение** полученных промежутков, то есть ![x\in\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)\cup(1;2].]()

**Пример 5.** Решите систему неравенств:

    ![\[ \begin{cases}25^x-30\cdot 5^x+125\geqslant 0,\\ \log_x(x-1)\cdot \log_x(x+1)\leqslant 0.\end{cases} \]]()

**Решение задания C3.**

**1.** Решаем сперва первое неравенство. Используем подстановку Переходим к следующему квадратному неравенству:

    ![\[ t^2-30t+125\geqslant 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5^x\leqslant 5, \\ 5^x\geqslant 25\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leqslant 1, \\ x\geqslant 2.\end{array}\right. \]]()

**2.** Решаем теперь второе неравенство. Область его допустимых значений определяется системой:

    ![\[ \begin{cases}x>0, \\ x\ne 1, \\ x-1>0, \\ x+1 > 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(1;+\mathcal{1}). \]]()

Данное неравенство равносильно следующей смешанной системе:

    ![\[ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_x(x-1)\leqslant 0, \\ \log_x(x+1)\geqslant 0,\end{cases} \\ \begin{cases}\log_x(x-1)\geqslant 0, \\ \log_x(x+1)\leqslant 0.\end{cases}\end{array}\right. \]]()

В области допустимых значений, то есть при используя равносильные преобразования переходим к следующей смешанной системе:

    ![\[ \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-1\leqslant 1, \\ x+1\geqslant 1,\end{cases} \\ \begin{cases}x-1\geqslant 1, \\ x+1\leqslant 1.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\leqslant 2, \\ x\geqslant 0,\end{cases} \\ \begin{cases}x\geqslant 2, \\ x\leqslant 0.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in[0;2]. \]]()

С учетом области допустимых значений получаем: ![x\in(1;2].]()

**3.** Окончательным решением исходной **системы** является **пересечение** полученных промежутков, то есть 



Изображение полученных промежутков на числовой прямой

**Пример 6.** Решите систему неравенств:

    ![\[ \begin{cases}\frac{3\cdot 64^x+2^x-70}{64^x-2}\geqslant 3, \\ \log_3^2(x+3)-3\log_3(x+3)+2\leqslant 0.\end{cases} \]]()

**Решение задачи C3.**

**1.** Решаем сперва первое неравенство. Равносильными преобразованиями приводим его к виду:

    ![\[ \frac{2^x-64}{64^x-2}\geqslant 0\Leftrightarrow \frac{2^x-2^6}{2^{6x}-2^1}\geqslant 0 \]]()

    ![\[ \Leftrightarrow \frac{x-6}{6x-1}\geqslant 0\Leftrightarrow x\in\left(-\mathcal{1};\frac{1}{6}\right)\cup[6;+\mathcal{1}). \]]()

**2.** Решаем теперь второе неравенство. Область его допустимых значений определяется промежутком: Используя замену переменной переходим к следующему квадратичному неравенству:

    ![\[ t^2-3t+2\leqslant 0\Leftrightarrow 1\leqslant t\leqslant 2\Leftrightarrow 1\leqslant \log_3(x+3)\leqslant 2\Leftrightarrow \]]()

    ![\[ 3\leqslant x+3\leqslant 9\Leftrightarrow 0\leqslant x\leqslant 6. \]]()

Этот ответ целиком принадлежит области допустимых значений неравенства.

**3.** Пересечением полученных в предыдущих пунктах промежутков получаем окончательный ответ к системе неравенств: 