ОЛИПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

**Задача 1 :**

 Все трехзначные числа записаны в ряд: 100 101 102 ..... 998 999.

 Сколько раз в этом ряду после двойки идет нуль?

**Решение**

 Так как трехзначное число не может начинаться с нуля, то двойка, после которой идет нуль, не может стоять в разряде единиц одного из трехзначных чисел ряда. Пусть двойка стоит в разряде десятков трехзначного числа. Тогда идущий за ней нуль стоит в разряде единиц того же числа,

 т.е. это число оканчивается на 20. Таких чисел 9: 120, 220, .........., 920.

 Наконец, если двойка, после которой идет нуль, стоит в разряде сотен, то соответствующее трехзначное число начинается на 20. Таких чисел 10: 200, 201, .........., 209.

 Таким образом, всего после двойки нуль будет встречаться 19 раз

**Задача 2 :**

 По определению, n ! = 1 х 2 х 3 ? х............х n .

Какой сомножитель нужно вычеркнуть из произведения 1! х 2! х 3! х ............х 20! ,

 чтобы оставшееся произведение стало квадратом некоторого натурального числа?

**Решение**

Заметим, что

 1! х 2! х 3! х 4! х.......х 20! = (1! х 2!) х (3! х 4!) х..........х (19! х 20!) =

 = (1! х 1! х 2) х (3! х 3! х 4) х (5! х 5! х 6) х...........х (17! х 17! х 18) х (19! х 19! х 20) =

 = (1!)2 х (3!)2 х (5!)2 х............х (19!)2 х (2 х 4 х 6 х 8 х...........х 18 х 20) =

 = (1!)2 х (3!)2 х (5!)2 х.............х (19!)2 ?х (2 х (2 х 2) х (3 х 2) х..............х (10 х 2)) =

 = (1! х 3! х............х 19!)2 х 210 х (1 х 2 х 3 х...............х 2 х 10) = (1! х 3! х..............х 19!)2 (25)2 х 10!

 Мы видим, что первые два множителя квадраты, поэтому, если вычеркнуть 10!, то останется квадрат. Легко видеть, что вычеркивание других множителей, указанных в ответах, не дает желаемого результата. Ответ: 10!

**Задача 3 :**С помощью циркуля и линейки разделите пополам угол, вершина которого недоступна.

**Решение** Задача имеет множество решений. Рассмотрим один из них. Выберем на сторонах угла произвольно по 2 точки: A, N, B, M и рассмотрим треугольники АВС и NМС. Проведем в каждом из этих треугольников биссектрисы углов. Точка пересечения биссектрис углов треугольника АВС принадлежит и биссектрисе угла С. Аналогично, точка пересечения 2 биссектрис углов треугольника NМС также лежит на биссектрисе угла С. Проводим через эти 2 точки прямую, которая будет и биссектрисой х С.

**Задача 4 :**Сколько существует треугольников со сторонами 5 см и 6 см, один из углов которого равен 20.

**Решение** Есть только один треугольник, в котором угол 20 град. лежит между сторонами 5 см и 6 см. Попробуем построить треугольник, в котором сторона 6 см прилегает к углу 20 град. , а сторона 5 см лежит против него. Для этого от вершины угла отложим отрезок длиной 6 см, и проведем окружность радиуса 5 см с центром этого отрезка, не совпадающем с вершиной. Расстояние от центра этой окружность до второй стороны угла меньше 5 см (это расстояние равно катету угла в 20 град.). Отсюда следует, что окружность пересечет прямую, содержащую вторую сторону угла, в двух точках, причем из-за того что радиус меньше 6 см, обе эти точки будут лежать на стороне угла, и мы получим два разных треугольника.

 Если же попробовать поменять ролями отрезки в 5 см и 6 см, то вершина угла окажется внутри построенной окружности, и мы получим только одну точку пересечения, а следовательно, и один треугольник. Итак, мы получили всего 4 треугольника.

**Задача 5 :** На столе лежат 2005 монет. Двое играют в следующую игру: ходят по очереди; за ход первый может взять со стола любое нечетное число монет от 1 до 99, второй любое четное число монет от 2 до 100. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

 Кто выиграет при правильной игре?

**Решение задач** : Опишем стратегию первого игрока. Первым ходом он должен взять со стола 85 монет. Каждым следующим, если второй игрок берет х монет, то первый игрок должен взять 101 х монет (он всегда может это сделать, потому что если х четное число от 2 до 100, то (101 х ) нечетное число от 1 до 99). Так как 2005=101 19 + 85 + 1, то через 19 таких ответов после хода первого на столе останется 1 монета, и второй не сможет сделать ход, т. е. проиграет.

**Задача 6**. В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60°. Докажите, что трапеция – равнобедренная.

**Решение** Пусть AD = a, BC = b, AC = a + b. Продолжим AD за точку D на расстояние DM = BC. Тогда очевидно, что ?АСМ - равносторонний. Но это значит, что ?АОD и ?ВОС - тоже равносторонние. Отсюда непосредственно следует, что ?АОВ = ?СОD, откуда имеем, что AB = CD.

**Задача 7** Имеются два сосуда, в первом из них 1 л воды, второй сосуд пустой. Последовательно проводятся переливания из первого сосуда во второй, из второго в первый и т. д., причем доля отливаемой воды составляет последовательно 1/2, 1/3, 1/4 и т. д. от количества воды в сосуде, из которого вода отливается. Сколько воды будет в сосудах после 2007 переливаний?

**Решение** Просчитав» несколько первых переливаний, нетрудно обнаружить, что после первого, третьего, пятого переливаний в обоих сосудах будет по ½ л воды. Необходимо доказать, что так будет после любого переливания с нечетным номером. Если после переливания с нечетным номером 2k-1 в сосудах было по ½ л, то при следующем переливании из второго сосуда берется 1/(2k + 1) часть, так что в первом сосуде оказывается - 1/2 + (2/ 2(2k + 1)) = (k + 1)/(2k + 1) (л). При следующем переливании, имеющем номер 2k+1, из него берется 1/(2k + 2) часть и остается (k + 1)/(2k + 1)-(k + 1)/((2k + 1)(2k + 1)) = 1/2 (л). Поэтому после седьмого, девятого и вообще любого нечетного переливания в сосудах будет по ½ л воды.

**Задача 8** Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько попаданий было в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?

**Решение** Так как стрелок попадал лишь в семерку, восьмерку и девятку в остальные шесть выстрелов, то за три выстрела (по одному разу в семерку, восьмерку и девятку) он наберет 24 очка. Тогда за оставшиеся 3 выстрела надо набрать 26 очков. Что возможно при единственной комбинации 8+9+9=26. Итак, в семерку стрелок попал 1 раз, в восьмерку – 2 раза, в девятку – 3 раза.

**Задача 9**  Решите уравнение : x2 + 2005x – 2006 = 0.

**Решение** Исходное уравнение имеет очевидный корень 1. Второй корень найдем по формулам Виета. Так как x1x2 = -2006 и x1 = 1, то x2 = 2006.

**Задача 10** В телевизионной передаче “Поле чудес” ведущий разыгрывал приз следующим образом. Играющему показывали три шкатулки, в одной из которых находился приз. Играющий указывал на одну из шкатулок, после чего ведущий открывал одну из двух других оставшихся шкатулок, которая оказывалась пустой. После этого играющий мог либо настаивать на первоначальном выборе, либо сменить его и выбрать третью шкатулку. В каком случае его шансы на выигрыш возрастают? (Возможны три варианта ответа: обе шкатулки равноправны, лучше сохранить первоначальный выбор, лучше его изменить.Попытайтесь обосновать свой ответ.)

**Задача 11** Угол А в треугольнике АВС равен a. Окружность, проходящая через А и В и касающаяся ВС , пересекает медиану к стороне ВС (или ее продолжение) в точке М, отличной от А. Найдите угол ВМС.

*Задача 12.*

 Целые числа a, b, c и d удовлетворяют равенству a2 + b2 + c2 = d2. Доказать, что число abc делится на 4. ( 6 баллов)

Решение.

 Квадрат четного числа делится на 4, а квадрат нечетного числа дает при делении на 4 остаток 1. Если числа a, b, c — нечетные, то d2 должен давать при делении на 4 остаток 3, что невозможно.Если среди чисел a, b, c два нечетных и одно четное, то d2 должен давать при делении на 4 остаток 2, что также невозможно.Значит, среди чисел a, b, c есть два четных числа, откуда произведение abc делится на 4.Такое возможно, например, 32 + 42 + 122 = 132.

*Задача 13*

 Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие равное число знакомых в этой компании (если A знаком с B, то и B знаком с A). ( 6 баллов)

Решение.

 Пусть в компании k человек. Тогда каждый человек может иметь от нуля до (k – 1) знакомых.Предположим противное: количество знакомых у всех разное. Тогда найдется человек без знакомых, найдется человек с одним знакомым, и так далее, наконец, найдется человек, у которого (k – 1) знакомых. Но тогда этот последний знаком со всеми, в том числе и с первым. Но тогда у первого не может быть ноль знакомых. Получили противоречие.

*Задача 14*

Можно ли представить дробь 2/7 в виде суммы двух дробей, числители которых равны 1, а знаменатели — различные целые числа? ( 6 баллов)

Решение. Ответ: можно. Например, 2/7=1/4+1/28.

*Задача 15.* Доказать, что для любых положительных чисел a и b выполняется неравенство(6 баллов)

Р е ш е н и е. Сделаем замену x = b1/15, y = a1/10. Тогда доказываемое неравенство приобретает вид. 2y5 + 3x5 ? 5y2x3. Деля на y5 и обозначая t = x / y, получаем 3t 5 – 5t 3 + 2 ? 0. Разложим левую часть на множители. Последовательно получаем

f(t) = (3t 5 – 3t 3) – (2t 3 – 2) ? 0, 3t 3(t 2 – 1) – 2(t – 1)(t 2 + t + 1) ? 0,

(t – 1)(3t 3(t + 1) – 2(t 2 + t + 1)) ? 0, (t – 1)(3t 4 + 3t 3 – 2t 2 – 2t – 2) ? 0,

 (t – 1)((2t 4 – 2t 2) + (t 4 – t) + (t 3 – t) + (2t 3 – 2)) ? 0

(t – 1)(2t 2(t 2 – 1) + t(t 3 – 1) + t(t 2 – 1) + 2(t 3 – 1)) ? 0,

(t – 1)2(2t 2(t + 1) + t(t 2 + t + 1) + t(t + 1) + 2(t 2 + t + 1)) ? 0, (t – 1)2(3t 3 + 6t 2 + 4t + 2) ? 0.

Для t > 0 выражение в первой скобке ? 0, во второй скобке > 0. В итоге, f(t) ? 0 для всех t > 0. Равенство нулю достигается лишь при t = 1, т.е. при x = y, т.е. при a3 = b2. ?

*Задача 16*

 На основаниях AB и CD трапеции ABCD взяты точки K и L. Пусть E – точка пересечения отрезков AL и DK, F – точка пересечения BL и CK. Доказать, что сумма площадей треугольников DADE и DBCF равна площади четырёхугольника EKFL. (6 баллов)

Р е ш е н и е.

Имеем SDADK = SDALK, так как они имеют общее основание AK и равные высоты, совпадающие с расстоянием между параллельными прямыми AB и DC. SDADE = SDADK – SDAEK = SDALK – SDAEK = SDKLE. Аналогично, SDBCF = SDKLF. Таким образом, сумма площадей треугольников DADE и DBCF равна площади четырёхугольника EKFL.

*Задача17*  Изначально на доске были написаны одночленs 1, x, x2, ..., xn.

 Договорившись заранее, k мальчиков каждую минуту одновременно вычисляли каждый сумму каких-то двух многочленов, написанных на доске, и результат дописывали на доску.

 Через m минут на доске были написаны, среди прочих, многочлены S1 = 1 + x, S2 = 1 + x + x2, S3 = 1 + x + x2 + x3, ..., Sn = 1 + x + x2 + ... + xn. Докажите, что

Решение. Построим граф,соответствующий конечной ситуации на доске: если многочлен P появился как сумма многочленов Q и R, то проведём стрелки из P в Q и R. Если из многочлена F

 ведёт ориентированный путь в G, будем говорить, что G участвует в F (в частности, сам F участвует в F). Нетрудно видеть в этом случае, что все коэффициенты многочлена F – G неотрицательны. Можно считать, что каждый многочлен на доске сумма различных степеней x:

 если какой-то коэффициент многочлена не меньше 2, то и у всех, в которых он участвует, соответствующий коэффициент также будет не меньше 2.

Значит, он не участвует в суммах вида Si.Каждый из многочленов S1, ..., Sn назовём финальным. Каждый из многочленов, участвующих в Sn (то есть в сумме всех исходных одночленов), назовём существенным. Покажем индукцией по p, что в многочлене с p ненулевыми коэффициентами участвуют ровно 2p – 1 многочленов (из которых p одночленов); отсюда будет следовать, что количество существенных многочленов равно 2n + 1. База (p = 1) очевидна.

Шаг индукции. Пусть многочлен P был получен на некотором шаге как сумма Q и R, и количества ненулевых коэффициентов в P, Q и R равны p, q и r соответственно; тогда p = q + r. По предположению индукции, в Q и R участвуют 2q – 1 и 2r – 1 многочленов, среди которых нет совпадающих (поскольку в Q и R нет общих одночленов). Тогда в P, с учётом самого P, участвуют

 (2q – 1) + (2r – 1) + 1 = 2p – 1 многочленов.

Покажем, что в каждую минуту на доске появлялось не более одного финального существенного многочлена. Действительно, пусть в некоторый момент появились одновременно существенные многочлены Sp и Sq (p < q). Рассмотрим первый момент, когда на доске появился многочлен P, в котором одновременно участвуют и Sp и Sq; тогда он появился как сумма двух многочленов, каждый из которых содержит одночлен xp. Но тогда коэффициент при xp в P не меньше 2, что невозможно.

Итак, на доске есть n финальных и 2n + 1 существенных многочленов, при этом не больше m из них являются и теми и другими.

 Значит, общее количество многочленов на доске не меньше, чем n + (2n + 1) – m.

 С другой стороны, исходно на доске был n + 1 многочлен, а добавилось не больше, чем mk.

 Значит, (n + 1) + mk ≥ n + (2n + 1) – m, или m(k + 1) ≥ 2n.

Задачи и задания олимпиад по математике 11 класс

1.
Найдите такое натуральное число k, что 2008! делится на 2007k, но не делится на 2008k. (Напомним, чтоn! = 1·2·3·4·… ·n).
решение
Разложим число 2007 на простые множители: 2007 = 32 ? 223.
В разложении на простые множители числа 2007! показатель степени у числа 3 будет достаточно большим, так как множитель 3 входит в разложение каждого третьего числа. Множитель 223 входит только в разложение чисел вида 223р, где р – натуральное число, не превосходящее 9. Таким образом, в разложение числа 2007! на простые множители число 223 войдет с показателем 9. Следовательно, число 2008! будет делиться на 2007k, где k=9.
2.
Может ли вершина параболы y = 4x2 – 4(a + 1)x + a лежать во второй координатной четверти при каком-нибудь значении а?
решение
Координаты вершины параболы x0 = (a + 1)/2, y0 = 4((a + 1)/2)2 - 4(a +1)(a + 1)/2 + a = -a2 - a - 1 = -(a + 1/2)2 - 3/4. Так как у0< 0 при любых значениях а, то во второй координатной четверти вершина параболы находиться не может.
3.
(an) – арифметическая прогрессия с разностью 1. Известно, что S2008 - наименьшая среди всех Sn (меньше суммы первых n членов для любого другого значения n). Какие значения может принимать первый член прогрессии?
решение
Так как разность прогрессия положительна, то прогрессия – возрастающая. Следовательно, описанная ситуация возможна тогда и только тогда, когда члены прогрессия с первого по 2008-ой – отрицательны, а начиная с 2009-го – положительны. Таким образом, S2008 будет наименьшей, тогда и только тогда, когда а2008< 0, a2009 > 0. Отсюда получаем систему неравенств


4.
Внутри равностороннего треугольника со стороной 8 находится равнобедренный треугольник АВС, в котором АС = ВС = 1, ?С=120°. Две вершины А и В могут лежать либо на одной стороне большого треугольника, либо на двух. Где при этом может оказаться вершина тупого угла – точка С? Нарисуйте это геометрическое место точек и найдите длину соответствующей линии.

решение . Если вершина А и В лежат на одной стороне треугольника, то вершина С лежит на отрезке прямой, параллельной этой стороне. Длина этого отрезка равна 8 - ?3. Пусть вершины А и В лежат на двух сторонах равностороннего треугольника с общей вершиной О. Тогда вокруг четырехугольника АСВО можно описать окружность (четырехугольник является вписанным). В этой окружности углы ВАС и ВОС равны, так как опираются на одну и ту же дугу с хордой ВС. Следовательно, угол ВОС равен 30°. Следовательно, третья вершина треугольника – точка С – лежит на биссектрисе угла равностороннего треугольника. Длина соответствующего отрезка биссектрисы равна 1. Итак, точка С может лежать на стороне некоторого равностороннего треугольника и на некоторых отрезках биссектрис внутренних углов этого треугольника. Длина шести звеньев этой линии равна 27 - 3?3.



5.
Клетчатая прямоугольная сетка m x n связана из веревочек единичной длины. Двое делают ходы по очереди. За один ход можно разрезать (посередине) не разрезанную ранее единичную веревочку. Если не останется ни одного замкнутого веревочного контура, то игрок, сделавший последний ход, считается проигравшим. Кто из игроков победит при правильной игре и как он должен для этого играть?
решене
если m + n – четно, то выигрывает второй игрок, если m + n – нечетно, то выигрывает первый. В начале игры веревочек единичной длины было m(n + 1) + n(m + 1) = 2mn + m + n. Это число имеет ту же четность, что и число m + n. Последний ход в игре разрушает последний замкнутый контур. Докажем, что граница любого замкнутого конура содержит четное количество веревочек единичной длины. Действительно, рассмотрим границу произвольного замкнутого контура. Каждый вертикальный столбец исходной сетки содержит четное количество горизонтальных веревочек единичной длины из этой границы (возможно, и нулевое), т. к. войдя в замкнутый контур, например, снизу, мы обязаны из него выйти. Аналогично, каждая горизонтальная строка исходной сетки содержит четное количество вертикальных веревочек единичной длины. Таким образом, общее количество единичных веревочек на границе замкнутого контура – четно. Выигрышная стратегия для любого игрока состоит в том, чтобы не разрушать последний замкнутый контур, пока есть такая возможность.

**11 класс**

**Задача 1** (1 балл)

1. Натуральное число А имеет 61 разряд и состоит из двоек, троек и четверок. При этом

двоек на 19 больше, чем четверок. Найти остаток от деления числа А на 9.

**Решение.** Пусть *x* - количество четверок, а *y* - количество троек. Тогда получаем

*x* +19 + *y* + *x* = 61. Откуда *y* = 42 - 2*x* . Сумма цифр 2(*x* +19) + 3*y* + 4*x* имеет тот же оста-

ток при делении на 9, что и само число. Учитывая связь между *x* и *y* , получаем, что сум-

ма цифр равна164. Поэтому остаток при делении на 9 равен 2.

**Ответ:** 2.

2. Натуральное число А имеет 59 разрядов и состоит из троек, четверок и пятерок. При

этом пятерок на 8 больше, чем троек. Найти остаток от деления числа А на 9.

**Решение.** Пусть *x* - количество троек, а *y* - количество четверок. Тогда получаем

*x* + *y* + *x* +8 = 59 . Откуда *y* = 51- 2*x* . Сумма цифр 3*x* + 4*y* + 5(*x* +8) имеет тот же остаток

при делении на 9, что и само число. Учитывая связь между *x* и *y* , получаем, что сумма

цифр равна244. Поэтому остаток при делении на 9 равен 1.

**Ответ:** 1.

3. Натуральное число А имеет 67 разрядов и состоит из двоек, троек и четверок. При этом

двоек на 22 больше, чем четверок. Найти остаток от деления числа А на 9.

**Решение.** Пусть *x* - количество четверок, а *y* - количество троек. Тогда получаем

*x* + 22 + *y* + *x* = 67 . Откуда *y* = 45 - 2*x* . Сумма цифр 2(*x* + 22) + 3*y* + 4*x* имеет тот же оста-

ток при делении на 9, что и само число. Учитывая связь между *x* и *y* , получаем, что сум-

ма цифр равна179. Поэтому остаток при делении на 9 равен 8.

**Ответ:** 8.

4. Натуральное число А имеет 57 разрядов и состоит из троек, четверок и пятерок. При

этом троек на 14 больше, чем пятерок. Найти остаток от деления числа А на 9.

**Решение.** Пусть *x* - количество пятерок, а *y* - количество четверок. Тогда получаем

*x* +14 + *y* + *x* = 57 . Откуда *y* = 43- 2*x* . Сумма цифр 3(*x* +14) + 4*y* + 5*x* имеет тот же оста-

ток при делении на 9, что и само число. Учитывая связь между *x* и *y* , получаем, что сум-

ма цифр равна214. Поэтому остаток при делении на 9 равен 7.

**Ответ:** 7.

**задача 3**. Известно, что график функции *y* = *x*3 + *mx*2 + *n* касается оси абсцисс в точке B(2; 0) .

Найти значения коэффициентов *m* и *n* .

**Решение.** Условие касания кривой *y* = *x*3 + *mx*2 + *n* и оси абсцисс в точке B(2; 0) означа-

ет\_>\_\_ \_ \_ , что *y* (2) = 0 и *y*¢(2) = 0 . В результате получаем систему уравнений для определения

двух неизвестных *m* и *n*: {84 0

12 4 0

*m n*

*m*

+ + =

+ = . Решив ее, находим: *m* = -3 , *n* = 4 .

**Ответ:** *m* = -3 , *n* = 4 .

**Задача 4**. Известно, что график функции *y* = *ax*3 + *x*2 + *b* касается оси абсцисс в точке C(-1; 0).

Найти значения коэффициентов *a* и *b* .

**Решение.** Условие касания кривой *y* = *ax*3 + *x*2 + *b* и оси абсцисс в точке C(-1; 0) означа-

ет, что *y* (-1) = 0 и *y*¢(-1) = 0. В результате получаем систему уравнений для определе-

ния двух неизвестных *a* и *b*: { 1 0

3 2 0

*a b*

*a*

- + + =

- = . Решив ее, находим: 2

3

*a* = , 1

3

*b* = - .

**Ответ:** 2

3

*a* = , 1

3

*b* = - .

**задача 5**. Известно, что график функции *y* = *x*3 + *mx*2 + *n* касается оси абсцисс в точке D(-2; 0).

Найти значения коэффициентов *m* и *n* .

**Решение.** Условие касания кривой *y* = *x*3 + *mx*2 + *n* и оси абсцисс в точке D(-2; 0) означа-

ет, что *y* (-2) = 0 и *y*¢(-2) = 0. В результате получаем систему уравнений для определе-

ния двух неизвестных *m* и *n*: { 84 0

12 4 0

*m n*

*m*

- + + =

- = . Решив ее, находим: *m* = 3 , *n* = -4.

**Ответ:** *m* = 3 , *n* = -4.

**Задача 10** (2 балла)

1. Инспекторы дорожно-патрульной службы Иванов и Петров остановили колонну авто-

бусов, заметив, что некоторые автобусы переполнены (автобус считается переполненным,

если в нем едет более 60 пассажиров). Инспектор Иванов подсчитал процент переполнен-

ных автобусов, а инспектор Петров – процент пассажиров, находящихся в переполненных

автобусах. Кто из инспекторов получил больший процент? Ответ обосновать.

**Решение.** Пусть в колонне оказалось *m* переполненных и *n* непереполненных автобусов.

Пусть число пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, равно *M* , а число ос-

тальных пассажиров равно *N* . Тогда *M* > 60*m* , *N* £ 60*n* . Тогда *M* 60

*m*

> , а *N* 60

*n*

£ , и,

следовательно, *M N*

*m n*

> . Из последнего неравенства получаем: *N n* , *M N m n* .

*M m M m*

+ +

<<

Поэтому *M* 100% *m* 100%

*M N m n*

× > ×

+ +

. Левая часть последнего неравенства представляет

собой процент пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, а правая – процент

переполненных автобусов. Поэтому больший процент получил инспектор Петров.

**Ответ:** Петров.

**Задача 11** Инспекторы дорожно-патрульной службы Александров и Сидоров остановили колонну

автобусов, заметив, что некоторые автобусы переполнены (автобус считается перепол-

ненным, если в нем едет более 65 пассажиров). Инспектор Александров подсчитал про-

цент пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, а инспектор Сидоров – про-

цент переполненных автобусов. Кто из инспекторов получил больший процент? Ответ

обосновать.

**Решение.** Пусть в колонне оказалось *m* переполненных и *n* непереполненных автобусов.

Пусть число пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, равно *M* , а число ос-

тальных пассажиров равно *N* . Тогда *M* > 65*m* , *N* £ 65*n* . Тогда *M* 65

*m*

> , а *N* 65

*n*

£ , и,

следовательно, *M N*

*m n*

> . Из последнего неравенства получаем: *N n* , *M N m n* .

*M m M m*

+ +

<<

Поэтому *M* 100% *m* 100%

*M N m n*

× > ×

+ +

. Левая часть последнего неравенства представляет

собой процент пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, а правая – процент

переполненных автобусов. Поэтому больший процент получил инспектор Александров.

**Ответ:** Александров.

**Задача 12.** Инспекторы дорожно-патрульной службы Николаев и Дмитриев остановили колонну

автобусов, заметив, что некоторые автобусы переполнены (автобус считается перепол-

ненным, если в нем едет более 55 пассажиров). Инспектор Николаев подсчитал процент

переполненных автобусов, а инспектор Дмитриев – процент пассажиров, находящихся в

переполненных автобусах. Кто из инспекторов получил меньший процент? Ответ обосно-

вать.

**Решение.** Пусть в колонне оказалось *m* переполненных и *n* непереполненных автобусов.

Пусть число пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, равно *M* , а число ос-

тальных пассажиров равно *N* . Тогда *M* > 55*m*, *N* £ 55*n* . Тогда *M* 55

*m*

> , а *N* 55

*n*

£ , и,

следовательно, *M N*

*m n*

> . Из последнего неравенства получаем: *N n* , *M N m n* .

*M m M m*

+ +

<<

Поэтому *M* 100% *m* 100%

*M N m n*

× > ×

+ +

. Левая часть последнего неравенства представляет

собой процент пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, а правая – процент

переполненных автобусов. Поэтому меньший процент получил инспектор Николаев.

**Ответ:** Николаев.

**Задача 13**. Инспекторы дорожно-патрульной службы Алексеев и Данилов остановили колонну ав-

тобусов, заметив, что некоторые автобусы переполнены (автобус считается переполнен-

ным, если в нем едет более 70 пассажиров). Инспектор Алексеев подсчитал процент пас-

сажиров, находящихся в переполненных автобусах, а инспектор Данилов – процент пере-

полненных автобусов. Кто из инспекторов получил меньший процент? Ответ обосновать.

**Решение.** Пусть в колонне оказалось *m* переполненных и *n* непереполненных автобусов.

Пусть число пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, равно *M* , а число ос-

тальных пассажиров равно *N* . Тогда *M* > 70*m* , *N* £ 70*n* . Тогда *M* 70

*m*

> , а *N* 70

*n*

£ , и,

следовательно, *M N*

*m n*

> . Из последнего неравенства получаем: *N n* , *M N m n* .

*M m M m*

+ +

<<

Поэтому *M* 100% *m* 100%

*M N m n*

× > ×

+ +

. Левая часть последнего неравенства представляет

собой процент пассажиров, находящихся в переполненных автобусах, а правая – процент

переполненных автобусов. Поэтому меньший процент получил инспектор Данилов.

**Ответ:** Данилов.

**Задача 14** (2 балла)

1. Известно, что для a, b, g справедливо неравенство sin sin sin 5

2

a+ b+ g ³ . Доказать, что

cos cos cos 11

2

a+ b+ g £ .

**Решение.** Оценим сверху сумму: ( )2 ( )2 *S* = sin a + sin b + sin g + cosa + cosb + cos g .

*S* = (sin2 a + cos2 a)+ (sin2 b + cos2 b)+ (sin2 g + cos2 g )+ 2(sin a×sinb + cosa×cosb) +

+2(sin a× sin g + cosa×cos g ) + 2(sinb×sin g + cosb×cos g) £ 3 + 3×2 = 9. Поэтому

( ) ( )

2

cos cos cos 2 sin sin sin 2 9 5 11.

2 4

a + b + g = *S* - a + b + g £ - æç ö÷ =

è ø

Отсюда после извлечения

квадратного корня из обеих частей последнего неравенства следует искомая оценка.

**Задача 15** Известно, что для a, b, g справедливо неравенство cos cos cos 7

3

a+ b+ g ³ . Доказать,

что sin sin sin 4 2

3

a+ b+ g £ .

**Решение.** Оценим сверху сумму: ( )2 ( )2 *S* = sin a + sin b + sin g + cosa + cosb + cos g .

*S* = (sin2 a + cos2 a)+ (sin2 b + cos2 b)+ (sin2 g + cos2 g )+ 2(sin a×sinb + cosa×cosb) +

+2(sin a× sin g + cosa×cos g ) + 2(sinb×sin g + cosb×cos g) £ 3 + 3×2 = 9. Поэтому

( ) ( )

2

sin sin sin 2 cos cos cos 2 9 7 32 .

3 9

a + b + g = *S* - a + b + g £ - æç ö÷ =

è ø

Отсюда после извлечения

квадратного корня из обеих частей последнего неравенства следует искомая оценка.

**Задача 16** Известно, что для a, b, g справедливо неравенство sin sin sin 5

3

a+ b+ g ³ . Доказать, что

cos cos cos 2 14

3

a+ b+ g £ .

**Решение.** Оценим сверху сумму: ( )2 ( )2 *S* = sin a + sin b + sin g + cosa + cosb + cos g .

*S* = (sin2 a + cos2 a)+ (sin2 b + cos2 b)+ (sin2 g + cos2 g )+ 2(sin a×sinb + cosa×cosb) +

+2(sin a× sin g + cosa×cos g ) + 2(sinb×sin g + cosb×cos g) £ 3 + 3×2 = 9. Поэтому

( ) ( )

2

cos cos cos 2 sin sin sin 2 9 5 56 .

3 9

a + b + g = *S* - a + b + g £ - æç ö÷ =

è ø

Отсюда после извлечения

квадратного корня из обеих частей последнего неравенства следует искомая оценка.

**Задача 17** Известно, что для a, b, g справедливо неравенство cos cos cos 3

2

a+ b+ g ³ . Доказать,

что sin sin sin 3 3

2

a+ b+ g £ .

**Решение.** Оценим сверху сумму: ( )2 ( )2 *S* = sin a + sin b + sin g + cosa + cosb + cos g .

*S* = (sin2 a + cos2 a)+ (sin2 b + cos2 b)+ (sin2 g + cos2 g )+ 2(sin a×sinb + cosa×cosb) +

+2(sin a× sin g + cosa×cos g ) + 2(sinb×sin g + cosb×cos g) £ 3 + 3×2 = 9. Поэтому

( ) ( )

2

sin sin sin 2 cos cos cos 2 9 3 27 .

2 4

a + b + g = *S* - a + b + g £ -æç ö÷ =

è ø

Отсюда после извлечения

квадратного корня из обеих частей последнего неравенства следует искомая оценка.

**Задача 18** (2 балла)

1. Пусть уравнение e*x* + *x* - 2 = 0 имеет *k* действительных корней на отрезке [0;1] и

*n* действительных корней вне этого отрезка. Тогда 10*n* + *k* =K.

**Решение.** Функция *f* (*x*) = e*x* + *x* - 2 является строго возрастающей (как сумма двух стро-

го возрастающих функций и константы). Заметим, что на концах отрезка [0;1] функция

принимает значения разного знака: *f* (0) = -1, *f* (1) = *e* -1. Поскольку *f* ( *x*) является не-

прерывной, в некоторой точке 0 *x* указанного отрезка она обращается в 0, а с учетом ее

строгого возрастания других нулей у функции нет. Поэтому *k* =1, *n* = 0 , 10*n* + *k* =1.

**Ответ:** 1.

2. Пусть уравнение arctg *x* + *x* - 2 = 0 имеет *k* действительных корней на отрезке [0;1] и

*n* действительных корней вне этого отрезка. Тогда 10*n* + *k* =K.

**Решение.** Функция *f* ( *x*) = arctg *x* + *x* - 2 является строго возрастающей (как сумма двух

строго возрастающих функций и константы). Заметим, что (1) 1 0

4

*f* p

=- < , а при больших

*x* функция *f* ( *x*) принимает положительные значения. Поскольку *f* ( *x*) является непре-

рывной, в некоторой точке 0 *x* >1 она обращается в 0, а с учетом ее строгого возрастания

других нулей у функции нет. Поэтому *k* = 0 , *n* =1, 10*n* + *k* =10 .

**Ответ:** 10.

3. Пусть уравнение arctg *x* + *x* -1 = 0 имеет *k* действительных корней на отрезке [0;1] и

*n* действительных корней вне этого отрезка. Тогда 10*n* + *k* =K.

**Решение.** Функция *f* (*x*) = arctg *x* + *x* -1 является строго возрастающей (как сумма двух

строго возрастающих функций и константы). Заметим, что на концах отрезка [0;1] функ-

ция принимает значения разного знака: *f* (0) = -1, (1)

4

*f* p

= . Поскольку *f* ( *x*) является

непрерывной, в некоторой точке 0 *x* указанного отрезка она обращается в 0, а с учетом ее

строгого возрастания других нулей у функции нет. Поэтому *k* =1, *n* = 0 , 10*n* + *k* =1.

**Ответ:** 1.

4. Пусть уравнение e*x* + *x* - 5 = 0 имеет *k* действительных корней на отрезке [0;1] и

*n* действительных корней вне этого отрезка. Тогда 10*n* + *k* =K.

**Решение.** Функция *f* (*x*) = e*x* + *x* -5 является строго возрастающей (как сумма двух стро-

го возрастающих функций и константы). Заметим, что *f* (1) = *e* - 4 < 0 , а при больших *x*

функция *f* ( *x*) принимает положительные значения. Поскольку *f* ( *x*) является непрерыв-

ной, в некоторой точке 0 *x* >1 она обращается в 0, а с учетом ее строгого возрастания дру-

гих нулей у функции нет. Поэтому *k* = 0 , *n* =1, 10*n* + *k* =10 .

**Ответ:** 10.

**11 класс**

*Задача 1.* Решите уравнение .

**Решение.** См. задачу №1 10 класса.

*Задача 3*. Дано: . Найдите .

**Решение.** Приведем заданные логарифмы к основанию , откуда . Тогда искомый логарифм равен .

 Ответ: .

 *Задача 4.* Число  увеличили на 44%. На сколько процентов увеличилось число ?

**Решение.** См. задачу №3 10 класса.

*Задача 5*. Найдите , если .

**Решение.** Разделим и числитель, и знаменатель дроби на. Получим .

 Ответ: .

*Задача 6*. При каких значениях  числа  являются последовательными членами арифметической прогрессии?

**Решение.** См. задачу №5 10 класса.

Сколько различных корней имеет уравнение ?

**Решение.** ОДЗ уравнения: . Решение уравнения определится из совокупности уравнений  с учетом ОДЗ. Откуда . Первая совокупность дает значения  из ОДЗ только при.

Ответ: 6 решений.

*Задача 7* Решите систему неравенств .

**Решение.** Преобразуем систему .

 Ответ: .

*Задача 8* Два автохозяйства отправили несколько машин для перевозки грузов. Число машин, отправленных из второго автохозяйства, меньше удвоенного числа машин, отправленных из первого. Если бы первое автохозяйство послало на две машины больше, а второе – на две меньше, то машин из второго автохозяйства было бы не меньше, чем машин из первого. Сколько машин отправлено из каждого автохозяйства, если всего было отправлено меньше 16 автомашин?

**Решение.** Пусть  и  - количества машин, посланных соответственно из первого и второго автохозяйств. Составим систему неравенств . Вычитая из первого неравенства второе, а затем – из третьего неравенства второе, получаем . Откуда . Этим неравенствам удовлетворяет единственное натуральное значение . Подставляя это значение в первое и второе неравенства системы, получаем систему неравенств для: . Откуда .

 Ответ: 5 и 9 автомашин.

*Задача 9* Известно, что . Найдите корни уравнения .

**Решение.** Сделаем замену переменной . Тогда . Вид функции не зависит от переменной, принятой для обозначения аргумента. Поэтому . Решение уравнения  дает .

Ответ: .

 *Задача 10*. Решите неравенство .

**Решение.** Решим неравенство обобщенным методом интервалов, предварительно установив область определения неравенства . Корень знаменателя: .

Корни числителя определяются из решения иррационального уравнения . Отложим корни на числовой оси и применим метод интервалов (см. Рис.1).

В результате получим: .

Ответ: .

 *Задача 12.* Решите неравенство

.

**Решение.** Область определения неравенства . Введем обозначения  и преобразуем исходное неравенство, разложив второе слагаемое на сумму логарифмов . Возвратимся к переменной  и решим методом интервалов полученное неравенство . Корни левой части  и . Откуда с учетом области определения неравенства получаем ответ (см. Рис.2).

Ответ: .

**ШКОЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА**

 **( 10 класс )**

1). Решить уравнение: 

2). Построить график функции: 

3). Решить неравенство:

4). Решить систему уравнений:

5). Доказать, что сумма медиан треугольника больше его полупериметра и меньше его периметра.

**ШКОЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА**

 **( 11 класс )**

1). Решить уравнение:

2). Определить промежутки возрастания и убывания функции:



3). На координатной плоскости заданы точки *А ( 1; 0 ), В ( 0; ! ), С ( 5; 5 ).* Вычислите площадь треугольника *АВС.*

4). Решить уравнение: 

5). На стороне *ВС*  треугольника *АВС*  взята точка *М* так, что *ВМ = 2СМ.* Точки *K* и *L* выбраны на сторонах *АС* и *АВ* соответственно так, что

*АК = 2СК, ВL = 3АL.* В каком отношении прямая *KL* делит отрезок *АМ ?*

**ШКОЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА**

**( 9 класс )**

**1).** Найти значение выражения:

 при .

2). Сократить дробь:



3). Решить систему уравнений:



4). Построить график функции:



5). Четыре школьника сделали в магазине покупки: первый купил пенал и ластик, заплатив 40 руб.; второй купил ластик и карандаш, заплатив 12 руб.; третий купил пенал, карандаш и две тетради, заплатив 50 руб.; четвёртый купил пенал и тетрадь. Сколько заплатил четвёртый школьник ?

**ШКОЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА**

**( 9 класс )**

**1).** Найти значение выражения:

 при .

2). Сократить дробь:



3). Решить систему уравнений:



4). Построить график функции:



5). Четыре школьника сделали в магазине покупки: первый купил пенал и ластик, заплатив 40 руб.; второй купил ластик и карандаш, заплатив 12 руб.; третий купил пенал, карандаш и две тетради, заплатив 50 руб.; четвёртый купил пенал и тетрадь. Сколько заплатил четвёртый школьник ?