***Формирование математического мышления при пропедевтике решения комбинаторных задач.***

Усачёва Н.А.

учитель математики

Обычно когда говорят о развитии мышления в процессе обучения математике, имеют в виду развитие математического мышления. Конечно, это верно: в процессе обучения математике следует в первую очередь беспокоиться не вообще о развитии мышления, а именно о развитии математического мышления. Ведь вопрос только в том, что понимать под математическим мышлением, в чем его специфика.

К сожалению, рассматривая сущность математического мышления, или, как еще говорят, математического стиля мышления, обычно указывают такое большое число отличительных его качеств, что всякая специфика этого вида мышления теряется.

Поэтому специфику математического мышления следует искать не в ее методах, которые широко применяются в других науках и поэтому получили статус всеобщих методов познания, а ее объектах.

Математические объекты лишены любых вещественных и энергетических характеристик, имея лишь одну характеристику: эти объекты находятся в определенных отношениях друг с другом, в отношениях колличественных, пространственных и им подобным.

Следовательно, математическое мышление – это предельно абстрактное, теоретическое мышление, объекты которого лишены всякой вещественности и могут интеретироваться самым произвольным образом, лишь бы при этом сохранялись заданные между ними отношения.

Математическое мышление является не только одним из важнейших компонентов процесса познавательной деятельности учащихся, но и таким компонентом, без целенапрвленного развития которого невозможно достичь эффективных результатов в овладение школьниками системой математических знаний, умений и навыков.

В процессе познания возникает необходимость не только проанализировать какой-либо предмет или явление, но и выделить для более углубленного изучения какой-либо один признак, одно свойство, одну часть, отвлекаясь на время от всех остальных, не принимая их во внимание. Как правило, выделяются не просто какие-то признаки и свойства, а важные, существенные признаки.

*Абстрагирование* – это мысленное выделение каких-либо существенных свойств и признаков при одновременном отвлечении от всех других свойств и признаков этих объектов. В результате абстрагирования выделенное свойство или признак сам становится предметом мышления (абстрактным предметом).

Все математические понятия как раз и представляют собой абстрактные объекты. Так, например, понятие геометрической фигуры образуется путем выделения в наблюдаемых предметах их формы, протяженности или взаимного расположения в пространстве и отвлечения от всех других свойств (материала, из которого они изготовлены, цвета, массы и т.д.). Но при этом происходит не только абстрагирование (выделение какого-то свойства и отбрасывание всех других свойств), но и идеализация этих свойств путем мысленного перехода к предельным формам, которые реально, конечно, не существуют (идеальная прямая, точка, плоскость и т.д.)

Выделенный в процессе абстрагирования признак предмета мыслится независимо от других признаков и становится самостоятельным объектом мышления. Так, наблюдая различные прозрачные объекты: воздух, стекло, воду и др.; мы выделяем в них общий признак – прозрачность и можем мыслить о прозрачности вообще. Точно так же при помощи абстрагирования создаются понятия о длине, высоте, объеме, треугольнике, числе, и т.д.

*Обобщение* в математике используется в двух различных формах:

1. как мысленное выделение общих свойств (инвариантов) в нескольких объектах и объединение их в группы на основе выделенных инвариантов (эмпирическое обобщение);
2. как мысленное выделение в рассматриваемом объекте с помощью глубокого анализа свойств этого объекта, какого-то существенного свойства в виде общего понятия для целого класса объектов, обладающих выделенным свойством (научно-теоретическое обобщение).

Если для первой формы обобщения характерно выделение в сравниваемых объектах любых общих признаков, то для теоретической формы обобщения характерно выделение лишь существенных свойств, которые могут быть найдены в результате анализа даже одного объекта с последующим подведением других объектов под это выделенное свойство. Следовательно, эмпирическому обобщению соответствует движение хода мысли от частного к общему, а теоретическому – движение от общего к частному, от внутреннего к внешнему.

В обучении математике предпочтительно пользоваться теоретическим обобщением. При изучении фундаментальных понятий следует сначала дать учащимся общее представление об этом понятии. Затем его обогащать, углублять, конкретизировать.

*Конкретизация* – также может выступать в двух формах:

1. как мысленный переход от общего к единичному, частному;
2. как восхождение от абстрактно-общего к конкретно-частному путем выявления различных свойств и признаков этого абстрактно-общего, как наполнение, обогащение абстрактно-общего конкретным содержанием. Такая конкретизация связана с теоретическим обобщением.

В учебной деятельности конкретизировать – значит привести пример, иллюстрацию, конкретный факт, подтверждающий общее теоретическое положение, правило, закон. В учебном процессе конкретизация имеет большое значение: она связывает наши теоретические знания с жизнью, с практикой и помогает правильно понять действительность. Отсутствие конкретизации приводит к формализму знаний, которые остаются голыми и бесполезными абстракциями, оторванными от жизни.

*Классификация* – разделение множества объектов на непересекающиеся части по какому-то основанию – свойству, признаку. Классификация в математике применяется чрезвычайно часто. При этом важно следить, чтобы, во-первых, классификация производилась по одному основанию и, во-вторых, чтобы получаемые при этом части классифицируемого множества не пересекались, не имели общих элементов и чтобы каждый элемент множества в какой-то один и только один класс (часть) обязательно входил. Конечно, классификация множества элементов может производиться поэтапно: на первом этапе множество делится на классы по одному признаку, затем все или только некоторые из этих классов делятся еще на более мелкие классы по какому-то другому признаку и т.д. В результате получается классификационное дерево.

А.А. Столяр выделил пять уровней математического мышления.

|  |  |
| --- | --- |
| Геометрия | Арифметика и алгебра |
| 1-й уровень |
| Геометрические фигуры рассматриваются как целые и различаются только по своей форме. | Число неотделимо от множества конкретных предметов, которое оно характеризует, а операции проводятся непосредственно над множествами предметов. |
| 2-й уровень |
| Геометрические фигуры выступают как носители своих свойств и распознаются по ним, но сами свойства фигур еще логически не упорядочены, так же как не упорядочены и сами фигуры, та как фигуры только описываются, но не определяются. |  Числа уже отделены от конкретных объектов, которые они характеризуют; при этом оперируют с числами, записанными в определенной системе счисления, а свойства операций устанавливаются индуктивно. |
| 3-й уровень |
| Осуществляется логическое упорядочение свойств фигур и самих фигур; геометрические фигуры выступают в определенной логической связи, устанавливаемой с помощью определений, остальные свойства фигур выводятся логическим путем. Но собственное значение дедукции в целом еще не постигается, ибо не осознается дедуктивная система в целом. | Осуществляется переход от конкретных чисел, изображаемых цифрами, к абстрактным буквенным выражениям. Осуществляется “локальное” логическое упорядочение свойств чисел и операций. |
| 4-й уровень |
| Постигается значение дедукции “в целом”, осознается сущность аксиом, определений, теорем, логической структуры доказательств, логической связи понятий и предложений. | Выясняется возможность дедуктивного построения алгебры в заданной конкретной интерпретации. |
| 5-й уровень |
| Происходит отвлечение от конкретной природы объектов и конкретного смысла отношений между ними. Геометрическая теория строится как абстрактная дедуктивная система. | Происходит отвлечение от конкретной природы объектов исчисления, от конкретного смысла операций и построение алгебры как абстрактной дедуктивной системы вне всякой интерпретации. |

А.А. Столяр указывает, что первые два уровня характерны для учащихся начальных классов, третий уровень – для учащихся средних классов и четвертый (в области геометрии) для учащихся старших классов. Что касается алгебры, то он указывает, что “в отличие от преподавания геометрии, которое достигает, хотя и не полностью, четвертого уровня, традиционнее преподавание алгебры не подымается выше третьего уровня, причем в части логического упорядочения свойств операций и этот уровень достигается не полностью”.

По мнению А.А. Столяра, пятый уровень достичь невозможно ни на каком этапе обучения геометрии и тем более алгебры.

*КОМБИНАТОРИКА*–область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

*КОМБИНАТОРНАЯ**ЗАДАЧА*–задача, требующая осуществления перебора всех возможных вариантов или подсчета их числа.

Основные понятия методики обучения решению комбинаторных задач
в начальной школе:

* Комбинаторные методы
* Граф
* Дерево возможных вариантов
* Организованный перебор

*КОМБИНАТОРНЫЕ МЕТОДЫ*–совокупность методов, основанных на идеях комбинаторики.

*ГРАФ*– совокупность объектов со связями между ними. Объекты представляются как *вершины*, или *узлы графа*, а связи – как *дуги*, или *ребра*. Исследование графов ведется комбинаторными методамиматематики.

*ДЕРЕВО ВОЗМОЖНЫХ ВАРИАНТОВ*– граф, схема, отражающая структуру задачи, упорядочения многошагового процесса принятия решений.
*Ветви* дерева отображают различные события, которые могут иметь место, а *корень* дерева – состояние, в котором возникает необходимость выбора.

*ОРГАНИЗОВАННЫЙ ПЕРЕБОР*–строгий порядок разбора всех случаев, возможных решений.

Это относительно новая для начального математического образования содержательная линия. Целесообразность знакомства младших школьников с нею потверждена мировым опытом. Решение комбинаторных задач позволяет расширить представления учащихся о математике как о науке с широкой сферой применения в реальной жизни.

Обучение решению комбинаторных задач в начальных классах является базой для введения в основной школе решения задач с помощью формул. Накопив опыт решения задач перебором, в дальнейшем ученики смогут осознанно воспринимать соответствующую терминологию (перестановки, размещения, сочетания) и формулы для аналитического решения задач.

В программе ставится цель не только обучить перебору, но и развить у учащихся способности к комбинаторным рассуждениям через систему специально подобранных задач.

Эта система включает:

* задачи на выяснение возможности существования комбинаторного соединения с заданными свойствами; на выбор оптимального варианта по определенным критериям;
* обратные комбинаторные задачи;
* задачи с разными способами упорядочения (слева направо, сверху вниз, по кругу и т.д.);
* задачи с ограничениями на составляемые комбинаторные соединения.

Специфика комбинаторных рассуждений позволяет реализовать следующие цели и задачи обучения математике:

* развитие вариативности и критичности мышления;
* совершенствование умственных операций (анализа, синтеза, сравнения, планирования, обобщения и абстрагирования);
* развитие образного, словесно-логического и наглядно-действенного компонентов мышления в их взаимосвязи.

Выделяются три основных вида комбинаторных задач:

1. Задачи на нахождение перестановок, то есть задачи на поиск различных вариантов упорядочения элементов множества. Например: “Запиши числа от 16 до 20 по порядку. Запиши эти же числа так, чтобы рядом не было чисел, которые при счете называют друг за другом. Проверь, верно ли выполнено задание: 20,18, 16, 17, 19. Найди несколько вариантов выполнения задания”.
2. Задачи на нахождение размещений, т.е. задачи на выбор подмножеств с учетом порядка их элементов. Например: “С помощью цифр 1, 4, 7, 9 записывают двузначные числа. Сравни количество чисел, у которых число десятков больше числа единиц и у которых число десятков меньше числа единиц”.
3. Задачи на нахождение сочетаний, т.е. задачи на выбор подмножеств без учета порядка их элементов. Например: “Сколько различных значений сумм получится, если их составлять из двух слагаемых, используя числа 5, 6 и 7?”; “ В передаче “Спокойной ночи, малыши!” участвуют Хрюша, Степашка, Филя и Каркуша. Летом передачу ведут только 2 героя. Какие пары ведущих могут работать летом?”

В системе комбинаторных задач выделено два блока, в каждый из которых включены все виды задач (на нахождение перестановок, размещений и сочетаний). Основанием для выделения блоков является способ решения задач. Первый блок составляют задачи, решение которых относительно легко осуществляется перебором. Они рассматриваются в следующей последовательности: задачи на нахождение перестановок, размещений, сочетаний. Эта последовательность определяется следующими причинами:

* в задачах на нахождение перестановок (с небольшим числом вариантов) младшими школьниками легче выполнить перебор, чем в задачах на нахождение размещений, так как в них не нужно отделять некоторые элементы;
* именно в первых двух видах задач объекты различаются по порядку расположения элементов, что для детей непривычно, а значит, требует анализа в первую очередь;
* прием составления размещений может являться основой для нахождения сочетаний.

Во второй блок входят задачи, в которых возникает необходимость в использовании графических средств организации перебора (таблиц и графов). Последовательность расположения комбинаторных задач в этом блоке определяется нарастанием сложности использования средств организации перебора.