**Избранные занимательные задания из книги И.Г.Сухина "Весёлая математика: 1500 головоломок для математических олимпиад, уроков, досуга: 1-7 класс"**

(М.: ТЦ "Сфера", 2003. – 192 с.)



АННОТАЦИЯ

Решение головоломок с одинаковыми цифрами издавна любимое развлечение детей. В данной книге подобные задачи (почти все они публикуются впервые) систематизированы, что позволит эффективно использовать их как для проведения олимпиад и праздников, так и для тренировки математического аппарата школьников. В результате ученики начальных классов легко запомнят таблицы сложения и умножения, а старшеклассники смогут развить свои творческие и комбинаторные способности. Важный раздел книги – "Архивариус", в котором впервые прослеживается история числовых головоломок и указываются альтернативные решения самых знаменитых задач. Неотъемлемая часть издания – обширная "Библиография занимательной математики". Для учащихся 1-7 классов, учителей, руководителей математических кружков, родителей, методистов и всех интересующихся головоломками.

СОДЕРЖАНИЕ

Как получить пятёрку по математике Цифры и числа Королевство Нуль-Девять (сказочная предыстория) .

РАЗДЕЛ 1: ГОЛОВОЛОМКИ С ОДИНАКОВЫМИ ЦИФРАМИ

Пояснения

Задачи с единицами

Одна и две единицы Две и три единицы Три и четыре единицы Четыре и пять единиц Наименьшее количество единиц

Задачи с двойками

Одна и две двойки Две и три двойки Три и четыре двойки Четыре и пять двоек Наименьшее количество двоек

Задачи с тройками

Одна и две тройки Две и три тройки

Три и четыре тройки Четыре и пять троек Наименьшее количество троек

Задачи с четвёрками

Одна и две четвёрки Две и три четвёрки Три и четыре четвёрки Четыре и пять четвёрок Наименьшее количество четвёрок

Задачи с пятёрками

Одна и две пятёрки Две и три пятёрки Три и четыре пятёрки Четыре и пять пятёрок Наименьшее количество пятёрок

Задачи с шестёрками

Одна и две шестёрки Две и три шестёрки Три и четыре шестёрки Четыре и пять шестёрок Наименьшее количество шестёрок

Задачи с семёрками

Одна и две семёрки Две и три семёрки Три и четыре семёрки Четыре и пять семёрок Наименьшее количество семёрок

Задачи с восьмёрками

Одна и две восьмёрки Две и три восьмёрки Три и четыре восьмёрки Четыре и пять восьмёрок Наименьшее количество восьмёрок

Задачи с девятками

Одна и две девятки Две и три девятки Три и четыре девятки Четыре и пять девяток Наименьшее количество девяток

Сложные задачи с одинаковыми цифрами

Две одинаковые цифры Три одинаковые цифры Четыре одинаковые цифры Пять одинаковых цифр Наименьшее количество одинаковых цифр Наши шпаргалки

Задачи с использованием только знаков сложения (знаки вычитания, умножения, деления и скобки не применять)

Задачи с использованием знаков сложения и вычитания (знаки умножения, деления и скобки не применять)

Задачи на равенства

Две плюс три одинаковые цифры Две плюс четыре одинаковые цифры Три плюс четыре одинаковые цифры Четыре плюс пять одинаковых цифр

РАЗДЕЛ 2: АРХИВАРИУС

От И.Буттера до Г.Э.Дьюдени Трёхтомник Е.И.Игнатьева Я.И.Перельман – классик научно-популярной литературы. М.А.Гершензон и его затейливые задачи Находки Б.А.Кордемского П.И.Сорокин, В.П.Труднев, Л.М.Лоповок, Е.М.Минскин. Книги последних лет Занимательная математика за рубежом Разновидности задач с одинаковыми цифрами. ОТВЕТЫ: Библиография занимательной математики

**Как получить пятёрку по математике**

В книге рассматривается один из самых перспективных видов занимательных задач, пока не оцененный педагогами по достоинству.

Учителя знают, как нелегко подобрать для учеников задания, в которых требуется не решать примеры, а самим их придумывать. Задание "Одинаковые цифры" – разновидность таких "обратных" задач. Если в традиционных математических примерах требуется произвести определённые вычисления и получить ответ, то здесь по имеющемуся ответу следует смоделировать исходный пример.

Решение задания "Одинаковые цифры" поможет в кратчайшие сроки усовершенствовать математический аппарат школьника. Ученики решают задачи данного типа всегда с большим интересом и пользой: в процессе составления подобных заданий легче запоминаются таблицы сложения и умножения, приобретаются необходимые навыки.

Практика показывает, что головоломки вида, "Одинаковые цифры" с азартом решают даже дети, не любящие математику. Почему? Попробуем объяснить этот феномен на примере. Обычно всё начинается с удивления.

"Как это можно двойку выразить тремя пятёрками?" – спрашивает себя школьник. Показывает задачу родителям. И вскоре подобные головоломки решают всей семьёй, всем классом, всей школой!

Небольшое количество задач с одинаковыми цифрами можно найти практически в каждом учебном пособии по математике, однако они преподносятся лишь как математическая забава, что в корне неверно. По нашему твёрдому убеждению, значение подобных задач для учащихся переоценить невозможно.

В первой части данной книги мы познакомим вас с нашими собственными разработками заданий с одинаковыми цифрами, а во второй ("Архивариус") – с работами предшественников.

Основным недостатком классических задач рассматриваемого типа является то, что при наличии в большинстве из них нескольких верных решений, в ответах приводится лишь одно из них.

Между тем данный вид числовых затей оптимально выполняет свою педагогическую, а не развлекательную функцию только в том случае, когда решения публикуются с достаточной полнотой. Поэтому в ответах на свои головоломки мы указываем все или почти все правильные решения. Вместе с тем основу пособия составляют задачи, имеющие единственный правильный ответ.

Решение головоломок с одинаковыми цифрами издавна любимое развлечение российских и зарубежных школьников. В данной книге впервые подобные занимательные задачи систематизированы, что позволит эффективно использовать их как для проведения олимпиад и праздников, так и для тренировки математических способностей учащихся. В результате ученики начальных классов легко приобретут первичные вычислительные навыки, а старшеклассники смогут развить свои творческие и комбинаторные способности.

Почти все публикуемые задачи придуманы автором и публикуются впервые. Особенностью книги является то, что при решении разрешается использовать только знаки умножения, деления, сложения, вычитания и круглые скобки. Это очень важно, так как данный вид числовых затей становится доступным и для детей младшего школьного возраста.

В первой части книги ("Головоломки с одинаковыми цифрами") материал сгруппирован следующим образом: "Задачи с единицами", "Задачи с двойками"... "Задачи с девятками", "Сложные задачи с одинаковыми цифрами", "Задачи с использованием только знаков сложения", "Задачи с использованием знаков сложения и вычитания", "Задачи на равенства". Принцип расположения головоломок в указанных главах покажем на примере заданий с цифрами 1. Глава "Задачи с единицами" подразделяется на параграфы "Одна и две единицы", "Две и три единицы", "Три и четыре единицы", "Четыре и пять единиц", "Наименьшее количество единиц". Именно таким образом внутри каждой главы выдерживается принцип "от простого к сложному".

Ученикам начальной школы следует предложить для решения наиболее простые головоломки из глав "Задачи с использованием только знаков сложения", "Задачи с использованием знаков сложения и вычитания", а также головоломки с малым количеством одинаковых цифр (двумя-тремя), более старшим ребятам – задания с большим количеством (четырьмя-пятью).

Ответы на задачи даны в конце пособия.

Второй раздел книги – "Архивариус". В нём впервые подробно прослеживается история числовых головоломок, доступных ученикам 1-7 классов. Ранее как в отечественных так и в зарубежных журналах и монографиях публиковалась только история знаменитых задач для учащихся 8-11 классов. В подтверждение укажем следующие книги: Э.Люкас "Математические развлечения: Приложение арифметики, геометрии и алгебры к различного рода запутанным вопросам, забавам и играм" (СПб.: Издание Павленкова, 1883), Г.Н.Попов "Памятники математической старины в задачах" (М.-Л., 1929), Г.Н.Попов "Сборник исторических задач по элементарной математике" (М.-Л.: ОНТИ, Главная редакция научно-популярной и юношеской литературы, 1938), В.Д.Чистяков "Старинные задачи по элементарной математике" (Минск: Вышэйшая школа, 1978), И.И.Баврин, Е.А.Фрибус "Старинные задачи" (М.: Просвещение, 1994).

Не менее значимо то, что в "Архивариусе" приводятся не только тексты хрестоматийных задач с одинаковыми цифрами, созданных классиками научно-популярной литературы, но и во многих случаях впервые указываются их альтернативные решения и существенные уточнения.

Завершает книгу также впервые публикуемая обширная "Библиография занимательной математики". Необходимость в её создании назрела уже давно. В ХХ веке издано сравнительно немного математических библиографических указателей, да и те почти не содержали информации о пособиях с забавными задачами для учащихся 1-7 классов. Например: "Занимательная математика" (Сост. И.Мохов. – Л.: Библиотечная методбаза Ленсовета, Ленинградская городская библиотека, 1938), "Библиографический указатель методико-математической литературы" (Сост. В.С.Карнацевич. – Тюмень: ТООНО, ИУУ, 1956), "Краткий библиографический указатель литературы для самостоятельной работы учителей математики" (Смоленск: СОИУУ, 1966), "Что читать по математике учащимся 5-8-х классов: Аннотированный список литературы для руководителей детского чтения: За страницами школьного учебника, вып.2" (Сост. Н.Ш.Зубова. – М.: ГРДБ РСФСР, 1988). Несмотря на то, что в прошлом веке написано огромное количество пособий и сборников с математическими затеями, списки литературы и в них очень малы. В числе немногих исключений "Литература по занимательной математике" из приложений к классическим трудам М.Гарднера "Математические головоломки и развлечения" (М.: Мир, 1971) и "Математические досуги" (М.: Мир, 1972) и др. Однако и здесь речь идёт только о пособиях для старшеклассников.

Составляя библиографию к настоящей книге, мы руководствовались тем, что публикуемый список должен содержать сведения о:

– максимальном количестве сборников XVIII-XXI веков самой различной тематики, в которых представлены задачи с одинаковыми цифрами, занимательные логические и математические головоломки;

– достаточном количестве пособий, ориентированных на детей дошкольного и младшего школьного возраста;

– математических книгах, рассчитанных на самый широкий круг читателей;

– сборниках игр, развлечений, викторин, кроссвордов, математических сказок, стихотворений и т.п.;

– библиографических указателях.

*Автор выражает глубокую признательность Е.И.Сухиной и О.И.Сухиной за помощь в подготовке рукописи к изданию.*

**Цифры и числа**

Цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Значащие цифры: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Однозначные числа: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14...

Чётные числа: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28...

Нечётные числа: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27...

Круглые числа: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120...

**РАЗДЕЛ 1**

**ГОЛОВОЛОМКИ С ОДИНАКОВЫМИ ЦИФРАМИ**

**Пояснения**

*Во всех задачах требуется выразить какое-либо целое неотрицательное число через некоторое количество одинаковых цифр. При этом необходимо учесть следующие ограничения:*

**1. Разрешается использовать только знаки умножения, деления, сложения, вычитания и круглые скобки.**

*Квадратные и фигурные скобки не допускаются, т.е. если, например, представить число 44 посредством пяти восьмёрок следующим образом:*

44 = 88 : [(8 + 8) : 8],

*то такая запись не будет считаться верным ответом, хотя она и является математически правильной.*

*Также нельзя применять дроби, показатели степени, радикалы, факториалы, логарифмы, мнимые и отрицательные числа и т.п.*

**2. В процессе пооперационных вычислений не должны получаться отрицательные и дробные числа.**

*К примеру, в задачах данного типа число 1 с помощью пяти единиц нельзя представить так:*

1 – 1 – 1 + 1 + 1,

*ведь после выполнения второго действия (вычитания) возникает отрицательное* *число "минус 1".*

*Другой пример: нельзя выразить число 3 с помощью пяти двоек следующим образом:*

2 : 2 : 2 · 2 + 2,

*так как после выполнения второго деления получается дробное число 1/2.*

**3. В ответах следует указать наибольшее количество способов, с помощью которых можно выполнить задание.**

*При этом запись типа*

(3 + 3) · 3

*считается равнозначной записи*

3 · (3 + 3),

*а выражение*

4 + 4 – 4

*- эквивалентно выражению*

4 – 4 + 4.

В ответе достаточно привести любой из указанных вариантов (они характеризуют переместительный закон умножения и сложения, и относятся к одному способу).

Следующие три выражения также, по сути, являются вариантами одного

способа решения:

(1 – 1) – (1 – 1); 1 – 1 – (1 – 1); 1 – (1 – 1) – 1.

*Поэтому, если в головоломке требуется, к примеру, несколькими способами представить число 0 с помощью четырёх единиц, то ответ:*

(1 – 1) – (1 – 1); 1 – 1 – (1 – 1); 1 – (1 – 1) – 1

*неверен.*

*Правильное решение:*

1 – 1 – (1 – 1); 1 : 1 – 1 : 1; (1 – 1) : (1 + 1)

*и др.*

*В заключение приведём ещё три варианта, относящихся к одному способу.*

2 + 2 + 2 – 2; 2 + 2 – 2 + 2; 2 – 2 + 2 + 2.

*Заметим, что если в задании указывается, что некоторое число находится в интервале, например, от 0 до 20, то подразумевается – от 0 до 20 включительно.*

**Задачи с единицами**

Одна и две единицы

*Итак, в вашем распоряжении две единицы – "1" и "1", знаки сложения "+", вычитания "-", деления ":", умножения "· " и круглые скобки "( )". А также тетрадь (или лист бумаги) и шариковая ручка (карандаш или фломастер). Если в каком-либо задании оговаривается, что в нём применяется знак одного из арифметических действий, то подразумевается, что он используется только один раз. Если указано, что применяются два знака, то имеется в виду, что общее количество одинаковых или различных знаков действий составляет 2.*

1. Хоть порой и говорят, что "нуль" ничего из себя не представляет, попробуйте представить его посредством двух единиц и знака одного из арифметических действий (применённого, естественно, один раз).

2. Какое наименьшее число можно записать с помощью двух цифр 1? Как это сделать?

3. Напишите число 1, используя только две единицы (двумя способами).

4. Задумано однозначное число. Отгадайте его, если известно, что это число легко выразить через две цифры 1 и знак деления.

5. Какое однозначное число можно записать, если использовать не больше двух единиц и не применять математические знаки?

6. Какое число можно двумя способами представить посредством двух цифр 1? Как это сделать?

7. Задумано однозначное число. Известно, что его можно выразить посредством двух единиц и одного математического знака, при этом нельзя использовать знаки сложения, вычитания и деления. Теперь данных достаточно, чтобы назвать задуманное число.

8. Пользуясь одной или двумя цифрами 1 и одним математическим знаком, составьте выражение равное двум.

9. Изобразите посредством не более двух единиц некое неизвестное чётное число.

10. Сколько однозначных чисел можно представить двумя цифрами 1 и арифметическими знаками? Перечислите эти числа.

11. Можно ли посредством двух единиц и знаков арифметических действий получить число 3?

12. Двумя единицами выразите двузначное число.

13. В вашем распоряжении две цифры 1 и знаки четырёх арифметических действий (которые при необходимости можно использовать). Какое наибольшее число можно записать в этом случае?

14. Сколько различных двузначных чисел можно представить с помощью одной или двух цифр 1 и, если это требуется, арифметических знаков? Назовите эти числа.

15. Какое наибольшее число можно изобразить двумя единицами?

16. Назовите все числа, которые можно выразить двумя цифрами 1 с применением, если это нужно, знаков арифметических действий. Составьте все возможные выражения с перечисленным цифровым материалом.

Две и три единицы

17. Число 0 нетрудно представить несколькими способами посредством трёх единиц. Какой арифметический знак не используется ни в одном из этих способов?

18. В вашем распоряжении три цифры 1 и два одинаковых знака. Как в данном случае представить число 1? Укажите два способа.

19. Число 2 легко изобразить несколькими способами посредством трёх единиц. Какой знак арифметического действия не используется ни в одном из этих способов?

20. Напишите число 3 двумя или тремя цифрами 1.

21. Какое наибольшее возможное однозначное число легко изобразить при помощи двух или трёх единиц и знаков арифметических действий? Как это сделать?

22. Можно ли выразить посредством трёх цифр 1 каждое из чисел, лежащих в интервале 0 – 3, без использования скобок и знака умножения? Если – "да", то как это сделать?

23. Сколько однозначных чисел можно представить при помощи трёх единиц и арифметических знаков? Перечислите эти числа.

24. Можно ли посредством двух или трёх цифр 1 выразить наименьшее двузначное число, и если – "да", то как?

25. Напишите число 10 двумя или тремя единицами.

26. Вы располагаете двумя или тремя цифрами 1. Не применяя математические знаки, запишите неизвестное двузначное число.

27. Какое нечётное двузначное число нетрудно изобразить, обязательно используя три единицы и один из арифметических знаков (но не знак умножения)?

28. Какое самое большое число легко записать двумя или тремя цифрами 1, если нужно обязательно использовать один из знаков арифметических действий?

29. Какое самое большое двузначное число можно выразить посредством двух или трёх единиц? Как это сделать?

30. Сколько двузначных чисел можно представить с помощью трёх цифр 1 и арифметических знаков? Перечислите эти числа.

31. Можно ли посредством трёх единиц и знаков арифметических действий получить числа 4, 5, 6, 7, 8, 9? А числа 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19?

32. В вашем распоряжении всего две или три цифры 1, знаки четырёх арифметических действий и скобки, которые следует при необходимости использовать. Какое наибольшее возможное число легко записать в этом случае?

33. Перечислите все числа, которые можно изобразить с помощью трёх единиц и, если потребуется, знаков арифметических действий.

Три и четыре единицы

34. Из четырёх цифр 1 составьте выражение, в котором три раза использовался бы знак "минус". Какое наибольшее возможное число нетрудно получить в этом случае?

35. Напишите число 0 с помощью четырёх единиц и только одного знака арифметических действий.

36. Выразите число 0 посредством четырёх цифр 1 таким образом, чтобы в записи присутствовало не меньше двух знаков "плюс".

37. Представьте число 1 с помощью трёх или четырёх единиц и одного знака арифметических действий.

38. Изобразите число 2 посредством четырёх цифр 1 таким образом, чтобы в записи присутствовал знак "минус" (скобки не применять).

39. Выразите число 3 с помощью четырёх единиц. Скобки и знак умножения не использовать.

40. Четырьмя цифрами 1 можно несколькими способами представить число 3. Какой знак не присутствует ни в одной из записей?

41. Какое наибольшее возможное число несложно изобразить четырьмя единицами, если использовать три одинаковых математических знака? Продемонстрируйте, как этого добиться.

42. Напишите число 4 четырьмя или тремя цифрами 1 (двумя способами).

43. Можно ли выразить четырьмя единицами каждое из чисел, лежащих в интервале 0 – 4, без использования скобок?

44. Какое наибольшее однозначное число можно изобразить с помощью четырёх или трёх цифр 1 и знаков арифметических действий (скобки не применять)? Как это сделать?

45. Выразите число 9 тремя или четырьмя единицами с обязательным использованием знака "плюс".

46. Сколько однозначных чисел можно представить посредством четырёх цифр 1 и арифметических знаков? Перечислите эти числа.

47. Изобразите число 10 четырьмя единицами без использования скобок и знака умножения (двумя способами).

48. Представьте число 11 с помощью четырёх цифр 1 (применение скобок, знаков деления и вычитания не допускается).

49. Как записать число 12 четырьмя единицами без использования скобок и знака деления? Приведите два способа.

50. Изобразите число 13 четырьмя или тремя цифрами 1.

51. Можно ли с помощью четырёх единиц и знаков арифметических действий получить числа 5, 6, 7, 8? А числа 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21?

52. Какое самое большое двузначное число можно написать с помощью четырёх или трёх цифр 1 без применения скобок? Как это сделать?

53. Изобразите число 22 четырьмя или тремя единицами (двумя способами).

54. Сколько двузначных чисел нетрудно выразить при помощи четырёх цифр 1 и при необходимости знаков арифметических действий? Перечислите их.

55. Сколько трёхзначных чисел можно представить посредством четырёх единиц и арифметических знаков? Перечислите данные числа. Покажите, как этого добиться.

56. Какое самое большое число удастся записать четырьмя или тремя цифрами 1?

57. Перечислите все числа, которые можно изобразить посредством четырёх единиц и знаков арифметических действий.

Четыре и пять единиц

58. Изобразите число 0 с помощью пяти цифр 1 и двух знаков математических действий (четырьмя способами). Скобки и знак умножения не использовать.

59. Представьте число 1 с помощью пяти единиц и четырёх одинаковых арифметических знаков (знак деления и скобки не применять).

60. Напишите число 1 пятью единицами таким образом, чтобы в записи числового выражения присутствовало четыре знака "минус".

61. Существует много способов, позволяющих выразить число 2 пятью цифрами 1. Знак какого арифметического действия обязательно встретится в любой записи.

62. Изобразите число 3 с помощью пяти цифр 1, не применяя скобки, знаки умножения и деления.

63. Представить число 4 пятью единицами можно многими способами. Знак какого арифметического действия не встретится ни в одной записи?

64. Напишите число 5 четырьмя или пятью цифрами 1 двумя способами: без применения скобок и с использованием скобок.

65. Можно ли выразить пятью единицами каждое число из интервала 0 – 5 без использования скобок?

66. Изобразите число 6 четырьмя или пятью цифрами 1 (двумя способами).

67. Напишите число 8 с помощью пяти единиц, скобки не использовать.

68. Представить число 9 пятью единицами можно несколькими способами. Знак какого арифметического действия будет в любой записи дважды (скобки не применять)?

69. Выразите число 10 пятью цифрами 1 таким образом, чтобы последним действием в получившемся примере было сложение. Скобки не использовать.

70. Представьте число 11 с помощью пяти единиц (применение знаков умножения и вычитания, а также скобок не допускается).

71. Изобразите число 12 пятью цифрами 1 таким образом, чтобы последним действием в получившемся примере было вычитание. Скобки не использовать.

72. Представить число 13 пятью единицами несложно несколькими способами. Знак какого арифметического действия не встретится ни в одной записи?

73. Выразите число 14 с помощью четырёх или пяти единиц.

74. Можно ли с помощью пяти единиц и знаков арифметических действий получить числа 7, 15, 16, 17, 18, 19?

75. Напишите число 20 четырьмя или пятью цифрами 1.

76. Выразите число 21 пятью единицами. Укажите два способа.

77. Напишите число 22 с помощью пяти цифр 1 таким образом, чтобы в записи получившегося примера присутствовал знак умножения и не было скобок.

78. Двумя способами представьте число 23 пятью единицами.

79. Какое самое большое двузначное число можно написать с помощью четырёх или пяти цифр 1 без применения скобок? Как это сделать?

80. Напишите число 24 четырьмя или пятью единицами.

81. Какое самое большое двузначное число можно написать с помощью четырёх или пяти цифр 1 и математических знаков? Как этого добиться?

82. Выразите число 100 пятью единицами (старинная задача, представленная, к примеру, в книгах Я.И.Перельмана).

83. Изобразите число 109 пятью цифрами 1 (скобки не применять).

84. Выразите с помощью пяти единиц число, в написание которого входят три другие одинаковые цифры. Что это за число?

85. Какое самое большое четырёхзначное число можно написать с помощью четырёх или пяти цифр 1 и математических знаков, если не использовать действие умножения? Как это сделать?

86. Представьте число 1221 пятью единицами.

87. Какое наибольшее четырёхзначное число можно выразить четырьмя или пятью цифрами 1? Продемонстрируйте, как этого добиться.

88. Какое самое большое число легко изобразить четырьмя или пятью единицами?

Наименьшее количество единиц

89. Выразите с помощью наименьшего количества цифр 1 число 0. Сколько единиц потребуется?

90. Запишите число 1 посредством наименьшего количества единиц.

91. С помощью какого минимального количества цифр 1 можно представить число 2? Как это сделать?

92. Изобразите посредством наименьшего количества единиц число 3. Сколько цифр 1 в получившемся числовом выражении?

93. Напишите число 4 с помощью как можно меньшего количества единиц таким образом, чтобы обязательно использовать действие умножения.

94. Изобразите наименьшим количеством цифр 1 число 5 таким образом, чтобы в записи получившегося числового выражения присутствовал знак "минус". Какое количество единиц потребуется?

95. Представьте число 6 посредством наименьшего количества единиц. Укажите два способа.

96. Какое минимальное количество цифр 1 потребуется, чтобы написать число 7? Как это сделать, если не применять скобки?

97. Выразите число 8 с использованием как можно меньшего количества цифр 1 (без скобок).

98. Изобразите число 9 посредством наименьшего количества единиц. Скобки не использовать.

99. Для записи какого однозначного числа понадобится наибольшее количество единиц?

100. Какое минимальное количество цифр 1 потребуется, чтобы написать число 10? Как это сделать?

101. Представьте число 11 посредством наименьшего количества единиц.

102. Выразите с помощью наименьшего количества цифр 1 число 12. Какое количество единиц потребуется?

103. Изобразите число 13 посредством минимального количества единиц.

104. Напишите число 14 с использованием как можно меньшего количества цифр 1.

105. Представьте число 15 посредством наименьшего количества единиц.

106. Изобразите число 16 с помощью минимального количества единиц (без скобок). Сколько цифр 1 в получившемся числовом выражении?

107. Напишите число 17 посредством наименьшего количества цифр 1. Обязательно используйте знак "минус". Сколько единиц потребуется?

108. Выразите число 18 с использованием минимального количества единиц.

109. Представьте число 19 посредством наименьшего количества единиц. Сколько цифр 1 в получившемся числовом выражении?

110. Изобразите число 20 с помощью минимального количества единиц.

111. Напишите число 21 посредством наименьшего количества цифр 1 (без скобок).

112. Двумя способами выразите число 22 с использованием минимального количества единиц.

113. Представьте число 23 посредством наименьшего количества цифр 1. Скобки не применять.

114. Изобразите число 24 с помощью минимального количества единиц.

115. Напишите число 25 посредством наименьшего количества цифр 1. Сколько единиц в получившемся числовом выражении?

116. Выразите число 26 с использованием минимального количества единиц.

117. Напишите число 27 посредством наименьшего количества цифр 1. Обязательно используйте знак "минус". Сколько единиц потребуется?

118. Представьте число 28 с помощью наименьшего количества единиц.

119. Изобразите число 29 посредством наименьшего количества цифр 1. Сколько единиц в получившемся числовом выражении?

120. Выразите число 30 с использованием минимального количества единиц.

121. Двумя способами напишите число 31 посредством наименьшего количества цифр 1. Сколько единиц потребуется?

122. Представьте число 32 с помощью наименьшего количества единиц.

123. Изобразите число 33 посредством наименьшего количества цифр 1.

124. Выразите число 34 с использованием минимального количества единиц.

125. Двумя способами напишите число 35 посредством наименьшего количества цифр 1. Сколько единиц потребуется?

126. Представьте число 36 с помощью наименьшего количества единиц.

127. Изобразите число 37 посредством наименьшего количества цифр 1. Сколько единиц в получившемся числовом выражении?

128. Выразите число 38 с использованием минимального количества единиц.

129. Напишите число 39 посредством наименьшего количества цифр 1.

130. Представьте число 40 с помощью наименьшего количества единиц.

**РАЗДЕЛ 2**

**АРХИВАРИУС**

*Примечание. Для унификации при цитировании первоисточников знак умножения везде обозначен точкой, а дробная черта в большинстве случаев заменена знаком деления (обычно, если в результате деления получается целое число). В приводимых ответах чаще всего рассматриваются только решения с использованием четырёх арифметических действий и лишь изредка – с применением показателя степени и знака дроби.*

(Фрагменты)

Из зарубежных авторов глубоко исследовал задания с одинаковыми цифрами Г.Э.Дьюдени. В книге "520 головоломок" (М.: Мир, 1975, с.38) он отмечает:

"Меня постоянно спрашивают о старой головоломке "Четыре четвёрки". Я опубликовал её в 1899 г., по потом выяснил, что впервые она была опубликована в первом томе журнала "Knowlege" за 1881 г. С тех пор к ней обращались различные авторы. Формулируется головоломка так:

"Найти все возможные числа, которые можно получить из четырёх четвёрок (не больше и не меньше) с помощью различных арифметических знаков".

Например, число 17 можно представить в виде 4 · 4 + 4 : 4 и т.д. Аналогичным образом можно записать все числа до 112 включительно, используя лишь знаки сложения, вычитания, умножения, деления, квадратного корня, десятичной точки (примечание: в англоязычных странах вместо десятичной запятой используется десятичная точка; в случае, когда целая часть числа равна нулю, этот нуль порой опускается и пишут, к примеру не 0,8, а .8) и знака факториала (например, можно писать 4!, что означает всего лишь 1 · 2 · 3 · 4, или 24). Число 113 уже нельзя представить в виде комбинации четырёх четвёрок".

В задаче "Двадцать четыре" (с.45) Г.Э.Дьюдени указывает: "В одной книге было написано:

"Запишите число 24 с помощью трёх одинаковых цифр, отличных от 8. (Существует два решения этой задачи.)"

Там же приводилось два ответа: 22 + 2 = 24 и 33 – 3 = 24".

Далее Г.Э.Дьюдени демонстрирует иные решения данной головоломки, причём все они связаны с применением радикалов, факториалов, десятичных точек и т.п.

В нашей работе впервые задачи с применением одинаковых цифр представлены довольно широко, ведь необходимость в этом давно назрела. Ещё 40 лет назад В.Литцман привёл в книге "Весёлое и занимательное о числах и фигурах: Занимательная математика всякого рода, о числах, о геометрических формах" (М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963, 2-е издание, с.135) несколько примеров таких задач и заметил: "Систематизации они, насколько нам известно, не подвергались". Часть этой работы мы выполнили, ограничив область исследований использованием только четырёх основных математических действий и применением скобок (что представляет большой интерес прежде всего для начальной школы, а также для пятого и шестого классов).

**М.А.Гершензон и его затейливые задачи**

Плодотворно работал в жанре занимательной математики ещё один отечественный мастер затейливых задач – М.А.Гершензон. В книге "Только сколько" (М.-Л.: Издательство детской литературы, 1936, 2-е издание, с.117-119) он облёк известное задание "Четыре четвёрки" в литературную форму. Вот эта забавная миниатюра:

**Четыре четвёрки**

(из раздела "Дрессированные цифры")

*Примечание: примеры с радикалами (для чисел 4, 6, 10-14) пропущены.*

"Вася опоздал на сбор. Я говорю ребятам:

– Не может быть, чтобы он так, просто, опоздал. Наверно, какая-нибудь беда с ним приключилась.

А Вася прибежал весёлый-развесёлый.

– Ребята, – кричит, – я сделал открытие! Оказывается, нужны только четыре четвёрки.

– Как так, только четыре четвёрки?

– А очень просто. Единицы долой, двойки долой, тройки долой, пятёрки долой, шестёрки долой, семёрки, восьмёрки, девятки, нули – все долой! Я буду писать числа только четвёрками. Четырьмя четвёрками!

– Как же ты напишешь единицу четырьмя четвёрками?

– Вот так: 1 = 44 : 44.

– А двойку?

– Вот так: 2 = (4 · 4) : (4 + 4).

– А тройку?

– Вот так: 3 = (4 + 4 + 4) : 4.

Вася здорово наловчился. Плюсы, минусы, знак деления, знак умножения, скобки, возведение в степень, корень квадратный, десятичные дроби – всё он пустил в ход.

После сбора до позднего вечера мы вместе с Васей придумывали, как писать числа четвёрками. Вот посмотрите, что у нас получилось:

5 = (4 · 4 + 4) : 4,

7 = 4 + 4 – 4 : 4,

8 = (4 + 4) · (4 : 4),

9 = 4 + 4 + 4 : 4,

15 = (4 · 4) – (4 : 4).

– Давайте, – говорит Вася, – напишем четырьмя четвёрками все числа, какие возможно!

Но мы уже устали.

– Ничего, – говорит Мурка, – мы попросим других ребят, они нам помогут".

Наш комментарий. Дополним решения М.А.Гершензона:

1 = 4 : 4 + 4 – 4 = 4 : 4 · 4 : 4 = (4 + 4) : (4 + 4) =

4 · 4 : (4 · 4) = 4 : 4 · (4 : 4) = 4 : 4 – (4 – 4) и др.;

2 = 4 : 4 + 4 : 4 = 4 – (4 + 4) : 4;

3 = (4 · 4 – 4) : 4;

4 = (4 – 4) : 4 + 4 = (4 – 4) · 4 + 4 = 4 – (4 – 4) : 4 =

4 – (4 – 4) · 4;

6 = (4 + 4) : 4 + 4;

7 = 44 : 4 – 4;

8 = 4 · 4 – 4 – 4 = 4 : 4 · 4 + 4 = 4 – 4 + 4 + 4 =

(4 + 4) : 4 · 4 = (4 + 4) : (4 : 4) = 4 + 4 – (4 – 4) =

4 · 4 – (4 + 4) = 4 · (4 : 4) + 4 и др.;

10 = (44 – 4) : 4;

12 = (44 + 4) : 4 = (4 – 4 : 4) · 4;

15 = 44 : 4 + 4.

В 40-е и 50-е годы ХХ века начинает издаваться всё больше сборников всевозможных затей. Почти в каждый из них включаются задания с одинаковыми цифрами. Три известные головоломки были опубликованы в сборнике "Игры и развлечения" /Сост. Л.Былеева, Н.Студенецкий, И.Чкаников (М.: Молодая гвардия, 1947, с.127), пять – в пособии "Пять минут на размышление" /По материалам Е.Игнатьева, Я.Перельмана, А.Студенцова, Л.Успенского и др. (М.: Государственное издательство культурно-просветительной литературы, 1951, с.170-171), одна – в книге И.Н.Чканикова "Игры и развлечения" (М.-Л.: Детгиз, 1953, с.170), одна – в работе П.Ю.Германовича "Математические викторины" (М.: Учпедгиз, 1959, с.11).

В пособии для учителей начальных классов Г.Б.Поляка "Занимательные задачи" (М.: Учпедгиз, 1953, 3-е издание, с.8) напечатаны 9 подобных задач, но также ни одной новой.

Вот любопытная головоломка, опубликованная в сборнике рассматриваемого периода: "395 игр и развлечений" /Сост. И.Чкаников (М.: Государственное издательство культурно-просветительной литературы, 1948, с.213):

"...Теперь вам нетрудно будет написать число 101 шестью одинаковыми цифрами. Попытайтесь это сделать. Вы можете пользоваться знаками арифметических действий.

Ответ:

9999 : 99 = 101".

Наш комментарий. Число 101 можно выразить и пятью одинаковыми цифрами, вот так: 101 = 99 + (9 + 9) : 9. Шестью цифрами сделать это гораздо проще. Кроме указанного И.Чканиковым решения можно привести такие:

111 – 11 + 1;

33 · 3 + 3 – 3 : 3;

(5 + 5) · (5 + 5) + 5 : 5;

(5 · 5 – 5) · 5 + 5 : 5;

6 · 6 – 6 : 6 + 66;

99 + 9 : 9 + 9 : 9;

99 : 9 – 9 + 99;

9 · 9 + 99 : 9 + 9.

Есть и другие способы. Если воспользоваться формулой: 1111х : 11х, то число 101 можно записать шестью любыми одинаковыми значащими цифрами. Например, 101 = 2222 : 22 = 4444 : 44 = 7777 : 77 = 8888 : 88.

**Занимательная математика за рубежом**

Выше были рассмотрены находки отечественных авторов, обративших внимание на данный класс математических затей. А что же зарубежные математики? В огромном море переводной учебной литературы, числовых головоломок немного. Нет заданий с одинаковыми цифрами в таких известных трудах, как: К.Баше "Игры и задачи, основанные на математике" (СПб.-М.: Издание М.О.Вольфа, 1877), Э.Люкас "Математические развлечения: Приложение арифметики, геометрии и алгебры к различного рода запутанным вопросам, забавам и играм" (СПб.: Издание Павленкова, 1883), В.Шустер "Математические вечера: Весёлая математика" (СПб.: Вестник Знания, 1908), В.Аренс "Математические игры и развлечения" (СПб.: Физика, 1911), Г.Шуберт "Математические развлечения и игры" (Одесса: Матезис, 1923, 2-е издание), У.Болл, Г.Коксетер "Математические эссе и развлечения (М.: Мир, 1986), С.Барр "Россыпи головоломок" (М.: Мир, 1987, 3-е издание), Н.Лэнгдон, Ч.Снейп "С математикой в путь" (М.: Педагогика, 1987), Р.Аллан, М.Вилльямс "Математика на 5: Пособие для 1-3 классов начальной школы" (М.: АСТ-ПРЕСС, 1995), Энциклопедия головоломок: Книга для детей и родителей" (М.: АСТ-ПРЕСС, 1999, перевод с английского).

Вместе с тем, как было отмечено, данной проблематикой занимались англичанин Г.Э.Дьюдени (в 1899 г., задачи "Четыре четвёрки" и "Двадцать четыре") и немец В.Литцман. Последний в книге "Весёлое и занимательное о числах и фигурах: Занимательная математика всякого рода, о числах, о геометрических формах" (М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963, 2-е издание, с.135) привёл несколько задач рассматриваемого вида. Им отведёна небольшая глава "Своеобразное сочетание цифр" в разделе "Чудеса с числами". Слово автору:

"Другую группу "чудес" дают такие выражения, в которые цифры входят каким-либо примечательным образом. Систематизации они, насколько нам известно, не подвергались. Вот ряд примеров.

5. а) 7 = 2 + 2 : 2 + 22; б) 28 = 2 + 2 + 2 + 22;

в) 23 = 22 + 2 : 2.

6. 100 можно изобразить:

а) четырьмя девятками (999/9);

б) шестью девятками (99 + 99/99);

в) пятью единицами (111 – 11);

г) пятью тройками (3 · 33 + 3 : 3);

д) пятью пятёрками (5 · 5 · 5 – 5 · 5);

ещё раз пятью пятёрками [(5 + 5 + 5 + 5) · 5]".

Вот и вся глава. Добавим, что первое издание на русском языке книги В.Литцмана (с видоизменённым названием) состоялось в 1923 г.: "Весёлое и занимательное в фигурах и числах: Математические развлечения" (М.-Пг.: Издательство Л.Д.Френкель). При этом задания с одинаковыми цифрами в нём не упоминались.

Также только известные задачи приведены в содержательном труде польского автора Щ.Еленьского "По следам Пифагора" (М.: Детская литература, 1961). Они опубликованы во втором разделе, озаглавленном "Интересные свойства чисел и математических действий" (с.92):

"Число 100. ...Его можно изобразить пятью одинаковыми цифрами:

111 – 11; 3 · 33 + 3 : 3; 5 · 5 · 5 – 5 · 5); 5 · (5 + 5 + 5 + 5).

Его можно изобразить при помощи шести девяток: 9999/99".

И больше о подобных заданиях – ни слова.

В 1985 г. на русском языке были изданы сразу две книги немецкого автора И.Лемана: "Увлекательная математика" (М.: Знание) и "2 · 2 + шутка: Книга для учащихся" (Минск: Народная асвета).

В первой из них встречаем следующее задание с одинаковыми цифрами:

"12. С помощью знаков арифметических действий и скобок представить каждое из чисел 1, 2, ..., 10 с помощью четырёх семёрок, например (7 + 7 · 7) : 7 = 8" (с.131), уже известное нам по книге Ф.Г.Петровой "Математические вечера" (Ижевск: Удмуртия, 1968, 2-е издание, с.102).

В книге "2 · 2 + шутка" опубликована только такая хрестоматийная задача:

"11. Составь примеры с ответом 100. При этом ты можешь пользоваться математическими знаками "+", "-", "·", ":" и а) пять раз цифрой 3; б) пять раз цифрой 1; в) четыре раза цифрой 9; г) пять раз цифрой 5.

(Пример: а) 33 · 3 + 3 : 3 = 100) (с.43).

Ответы:

б) 111 – 11 = 100;

в) 99 + 9 : 9 = 100;

г) 5 · 5 · 5 – 5 · 5 = 100".

Серьёзное внимание заданию с одинаковыми цифрами уделил Р.Вайблум. В книге "Занимательный мир математики" (СПб.: Дельта, 1998; год американского издания – 1996), её автор, руководитель центра "Занимательная математика" (США) посвятил подобным задачам главу "Головоломки с целыми числами" (с.27-31). Эта глава интересна нам тем, что во всех приведённых задачах используются только четыре арифметических действия.

Вот как своеобразно Р.Вайблум преподносит читателю задания с одинаковыми цифрами: "Для получения различных ответов можно по-разному сочетать целые числа. Данные ответы полностью зависят от наших изначальных действий с числами. Например:

Можете расположить четыре единицы так, чтобы получить ответ 4?

1 + 1 + 1 + 1 = 4.

Можете расположить четыре единицы, чтобы получить ответ 22?

11 + 11 = 22.

Можете расположить четыре единицы, чтобы получить ответ 11?

11 – 1 + 1 = 11.

Теперь, зная, что для получения разнообразных ответов числа можно группировать и проделывать с ними различные манипуляции, попробуйте решить следующие задачи:

1. Можете расположить четыре единицы так, чтобы получить 12?

2. Можете расположить четыре двойки так, чтобы получить 10?

3. Можете расположить четыре тройки так, чтобы получить 111?

4. Можете расположить четыре четвёрки так, чтобы получить 8?

5. Можете расположить четыре пятёрки так, чтобы получить 80?

6. Можете расположить четыре шестёрки так, чтобы получить 17?

7. Можете расположить четыре семёрки так, чтобы получить 49?

8. Можете расположить четыре восьмёрки так, чтобы получить 1?

9. Можете расположить четыре девятки так, чтобы получить 10?

Чтобы проверить свои решения, загляните в приведённые в конце книги ответы.

Заметьте, что правильными могут быть несколько вариантов".

Вот ответы, указанные в пособии:

"1. 1 + 11 : 1.

2. 2 · 2 · 2 + 2.

3. 333 : 3.

4. 4 · (4 : 4) + 4.

5. 5 · 5 + 55.

6. (66 : 6) + 6.

7. 7(7 – 7) + 7 · 7.

8. 88 : 88.

9. 9 + 9 · (9 : 9)".

Нетрудно убедиться, что здесь две явные ошибки. Во-первых, в ответе к седьмой задаче не четыре, а пять цифр. Первая семёрка лишняя, скобки также не нужны. Следует читать:

7 – 7 + 7 · 7.

Во-вторых, в результате вычислений в девятом примере получаем, не 10, а 18. Ошибка, вероятно вкралась в данном случае не в ответ, а в условие задания: требовалось получить не 10, а именно 18. Кроме того, не все головоломки одинаково хороши. Если автор решил привести только по одному ответу к каждой задаче, то ему следовало подобрать такие примеры, которые не допускали бы альтернативного решения. В противном случае необходимо указать все варианты решений. К сожалению, все задачи, кроме третьей, пятой и шестой имеют побочные решения.

Все изложенные выше соображения относятся и к остальным подобным задачам Р.Вайблума, который предлагает читателю выразить с помощью четырёх двоек числа в интервале 0 – 6, а также 10 и 12 (почему нет 8 и 9?), а затем с помощью четырёх троек – числа в интервале 3 – 10 и 1 (почему нет 2?). Вот ответы из рассматриваемой книги:

2 · (2 – 2) · 2 = 0,

(2 · 2) – (2 · 2) = 1,

(2 : 2) + (2 : 2) = 2,

2 · 2 – (2 : 2) = 3,

2 · 2 + 2 – 2 = 4,

2 · 2 + (2 : 2) = 5,

2 · 2 · 2 – 2 = 6,

2 · 2 · 2 + 2 = 10,

(2 · 2 + 2) · 2 = 12,

33 : 33 = 1,

3 · 3 – 3 – 3 = 3,

(3 · 3 + 3) : 3 = 4,

3 + 3 – (3 : 3) = 5,

3 + 3 + (3 – 3) = 6,

3 + 3 + (3 : 3) = 7,

3 · 3 – (3 : 3) = 8,

3 · 3 · (3 : 3) = 9,

3 · 3 + (3 : 3) = 10,

(33 – 3) : 3 = 10.

Опять забавное недоразумение во второй задаче с двойками.

(2 · 2) – (2 · 2) = 0, а не 1!

Следует поменять знак вычитания на знак деления, тогда всё будет правильно.

Только шестая задача с двойками имеет единственное решение, а из задач с тройками – третья и шестая. Самое удивительное, что в только в самой последней задаче Р.Вайблум впервые отмечает оба возможных варианта решения.

**Разновидности задач с одинаковыми цифрами**

В заключение рассмотрим пособие [И.Г.Сухина "800 новых логических и математических головоломок"](http://suhin.narod.ru/mat1.htm) (СПб.: Союз, 2001), в котором дана нестандартная трактовка задач с одинаковыми цифрами. В разделе "Числовая горизонталь гнома Забывалки" (задачи с дополнительными условиями и подсказками, с.45) приведены "Задачи из тетради гнома Забывалки". Ниже дадим пояснение к этим головоломкам и примеры, в которых фигурируют только одинаковые цифры:

"Гном Забывалка принёс нам свою тетрадь, в которой он решал примеры на вычитание, сложение, умножение и деление однозначных чисел. Но очень многие цифры Забывалка забыл поместить в квадратики и без твоей помощи тут не обойтись. Кое-что из этих задач гном помнит, и его подсказки помогут тебе справиться с заданиями.

В этих задачах впиши в пустые клетки-квадратики такие забытые гномом цифры, чтобы арифметический пример был решён правильно. И учти: в одной клетке должна быть только одна цифра.

Задачи на вычитание

9. В девятой задаче во всех трёх клетках – одинаковые цифры.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | – |  | = |  |

Ответ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | –  | 0 | = | 0 |

Задачи на умножение

71. В задаче нет 1. Все цифры одинаковые.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | · |  | = |  |

Ответ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | · | 0  | = | 0 |

72. В примере нет 0. Все цифры одинаковые.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | · |  | = |  |

Ответ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | · | 1  | = | 1 |

Задачи на деление

105. В задаче все цифры одинаковые.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | :  |  | = |  |

Ответ:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | : | 1  | = | 1 |

Равенства

Сочетание арифметических действий

132. В задании все цифры одинаковые.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | : |  | = |  | · |  |

Ответ:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1  | : | 1 | = | 1 | · | 1 |

133. В примере все цифры одинаковые. Нет 0.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | + |  | = |  | · |  |

Ответ:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | + | 2 | = | 2 | · | 2 |

"

Как можно видеть, все 6 приведённых задач довольно просты. Несложны и ещё две головоломки ("Задачи из тетради гнома Загадалки") из цитируемой книги. Первую из них находим в разделе "От нуля до девяти" (с.141):

"7. Сумма трёх одинаковых однозначных чисел равна их произведению. Что это за числа?

Ответ: Нули."

Вторая – из раздела "Исправление, зачёркивание, превращение, отгадывание цифр и чисел" (с.155):

"1. Зачеркни одинаковые цифры. Какое число осталось?

5 3 7 1 8 3 5 8 7.

Ответ: 1".