**Тема урока**

Применение производной к исследованию функции

Цели урока:

Дидактическая:

обеспечить проверку теоретических знаний и умений по теме «Применение производной к исследованию функции».

Развивающая:

развитие умений применять знания в конкретной ситуации; развитие логического мышления; умений сравнивать, обобщать.

Воспитательная:

развитие умения работать в коллективе, взаимопомощи, культуры общения; воспитание таких качеств характера, как настойчивость в достижении цели.

**Задачи.**

1. Проверить теоретические знания и умения по теме «Применение производной к исследованию функции»
2. Развивать умение работать в группе.

Оборудование:Компьютер, проектор, презентация, карточки с заданиями.

План проведения урока:

1. Организационный момент.
2. Актуализация знаний учащихся.
3. Работа в группах.
4. Историческая справка.
5. Итог урока.
6. Домашнее задание.

Ход урока

1. **Организационный момент.**

* Приветствие.
* Сообщение темы и цели урока.

1. **Актуализация знаний учащихся.**

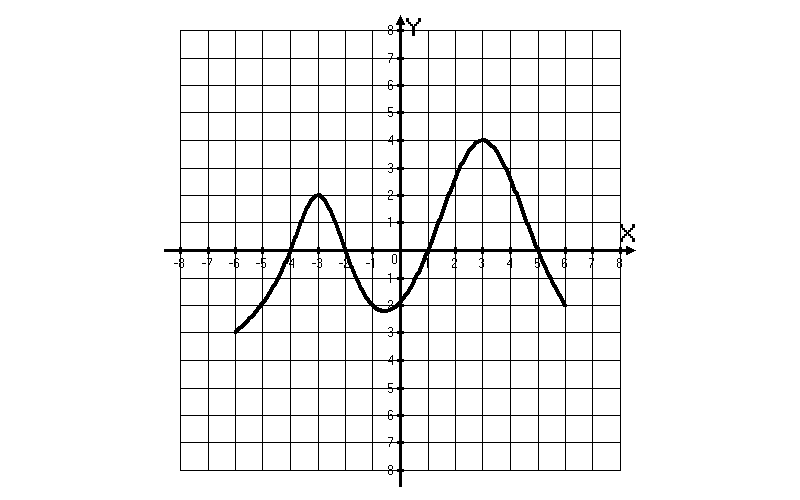
Цифровой диктант: 1- ***если согласны с утверждением, и 0- если не согласны.***

* В точке возрастания функции её производная больше нуля. (1).
* Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то в этой точке имеется экстремум! (0).
* Производная произведения равна произведению производных. (0).
* Наибольшее и наименьшее значения функции на некотором отрезке наблюдаются или в стационарных точках, или на концах отрезка. 1).
* Любая точка экстремума является критической точкой. (1).
* Проверка и подсчет верно выполненных заданий

1. ***На экране по очереди появляются слайды с чертежами и заданиями к ним. Учащиеся фиксируют в тетрадях ответ. Меняются тетрадями с соседом по парте и проверяют,подсчитывают количество правильных ответов. На экран выводятся правильные ответы.***

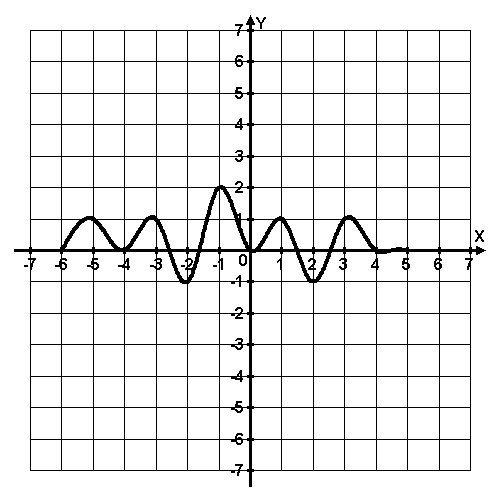
1 слайд

**1 задание:** Функция y = f(x) определена на промежутке (- 6; 6). На рисунке изображён график её производной. Найдите точки, в которых производная функции равна нулю.



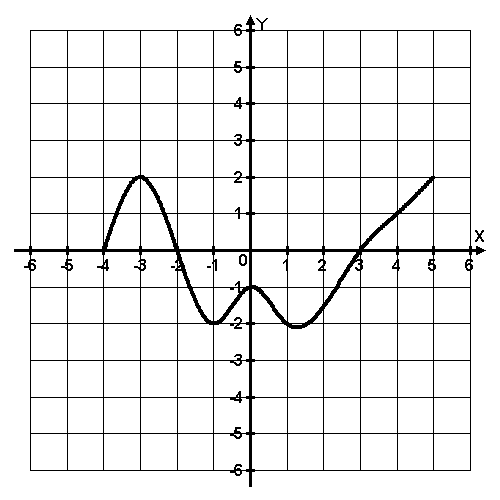
2 слайд

**2 задание:** Функция y = f(x) определена на промежутке (-6; 5). На рисунке изображён график её производной. Укажите количество промежутков, на которых функция возрастает.



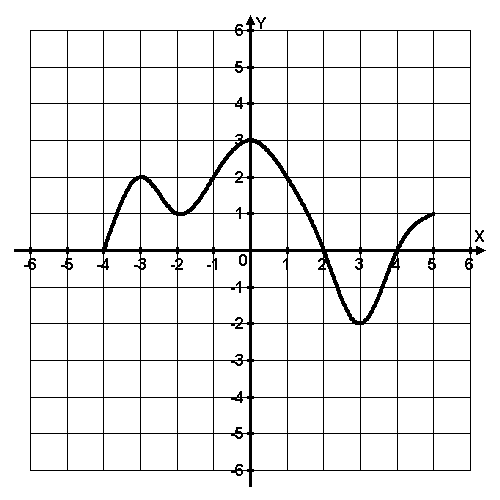
3 слайд

**3 задание:** Функция y = f(x) определена на промежутке (-4; 5). На рисунке изображён график её производной. Найдите точку минимума функции y = f(x).



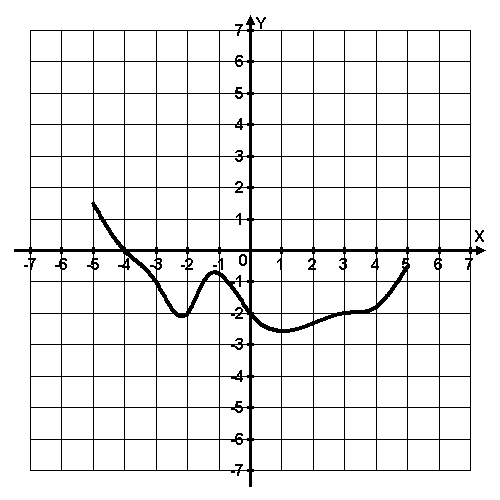
4 слайд

**4 задание:** Функция y = f(x) определена на промежутке (-4; 5). На рисунке изображён график её производной. Найдите точку максимума функции y = f(x).



5 слайд

**5 задание:** Функция y = f(x) определена на промежутке (-5; 5). На рисунке изображён график её производной. Укажите точку, в которой функция принимает наименьшее значение.



6 слайд

**Ответы: 1 задание:** х = - 4; х = - 2; х = 1; х = 5

**2 задание:** 5

**3 задание:** х = 3

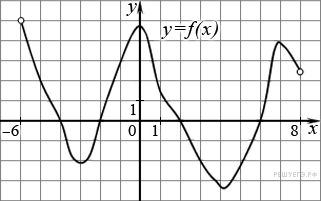
**4 задание**: х = 2

**5 задание:** х = - 4

1. **Работа в парах**

Сформулировать определения ,используемые при выполнении заданий.

**B 8 № 27487.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик функ­ции http://reshuege.ru/formula/7c/7c1c9491ba7c6e8d6d2cfa82e39b22cap.png, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−6; 8). Опре­де­ли­те ко­ли­че­ство целых точек, в ко­то­рых про­из­вод­ная функ­ции по­ло­жи­тель­на.



**Ре­ше­ние.**

Про­из­вод­ная функ­ции по­ло­жи­тель­на на тех ин­тер­ва­лах, на ко­то­рых функ­ция воз­рас­та­ет, т. е. на ин­тер­ва­лах (−3; 0) и (4,2; 7). В них со­дер­жат­ся целые точки −2, −1, 5 и 6, всего их 4.

Ответ: 4.

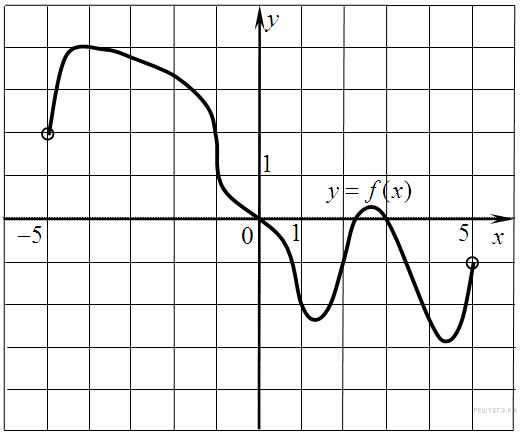
Ответ: 4

**2. B 8 № Ре­ше­ние.**

Про­из­вод­ная функ­ции от­ри­ца­тель­на на тех ин­тер­ва­лах, на ко­то­рых функ­ция убы­ва­ет, т. е. на ин­тер­ва­лах (−3,8; 1,2) и (2,8; 4,4). В них со­дер­жат­ся целые точки −3, −2, −1, 0, 1, 3, 4. Их 7 штук.

Ответ: 7.

Ответ: 7

**3. B 8 № 27489.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик функ­ции *y=f(x)*, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−5; 5). Най­ди­те ко­ли­че­ство точек, в ко­то­рых ка­са­тель­ная к гра­фи­ку функ­ции па­рал­лель­на пря­мой *y* = 6 или сов­па­да­ет с ней.

**Ре­ше­ние.**

По­сколь­ку ка­са­тель­ная па­рал­лель­на пря­мой *y* = 6 или сов­па­да­ет с ней, их уг­ло­вые ко­эф­фи­ци­ен­ты равны 0. Уг­ло­вой ко­эф­фи­ци­ент ка­са­тель­ной равен зна­че­нию про­из­вод­ной в точке ка­са­ния. Про­из­вод­ная равна нулю в точ­ках экс­тре­му­ма функ­ции. На за­дан­ном ин­тер­ва­ле функ­ция имеет 2 мак­си­му­ма и 2 ми­ни­му­ма, итого 4 экс­тре­му­ма. Таким об­ра­зом, ка­са­тель­ная к гра­фи­ку функ­ции па­рал­лель­на пря­мой y = 6 или сов­па­да­ет с ней в 4 точ­ках.

Ответ: 4.

Ответ: 4

**Ре­ше­ние.**

За­дан­ная функ­ция имеет мак­си­му­мы в точ­ках 1, 4, 9, 11 и ми­ни­му­мы в точ­ках 2, 7, 10. По­это­му сумма точек экс­тре­му­ма равна 1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44.

Ответ: 44.

Ответ: 44

**Ре­ше­ние.**

На за­дан­ном от­рез­ке про­из­вод­ная функ­ции от­ри­ца­тель­на, по­это­му функ­ция на этом от­рез­ке убы­ва­ет. По­это­му наи­боль­шее зна­че­ние функ­ции до­сти­га­ет­ся на левой гра­ни­це от­рез­ка, т. е. в точке −3.

Ответ: −3.

Ответ: -3

**Ре­ше­ние.**

На за­дан­ном от­рез­ке про­из­вод­ная функ­ции по­ло­жи­тель­на, по­это­му функ­ция на этом от­рез­ке воз­рас­та­ет. По­это­му наи­мень­шее зна­че­ние функ­ции до­сти­га­ет­ся на левой гра­ни­це от­рез­ка, т. е. в точке http://reshuege.ru/formula/74/74687a12d3915d3c4d83f1af7b3683d5p.png.

Ответ: −7.

Ответ: -7

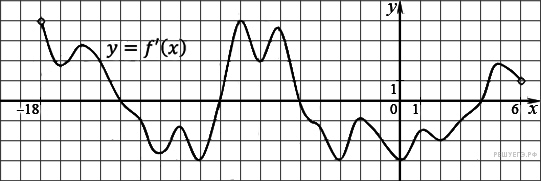
**Ре­ше­ние.**

Точки мак­си­му­ма со­от­вет­ству­ют точ­кам смены знака про­из­вод­ной с по­ло­жи­тель­но­го на от­ри­ца­тель­ный. На от­рез­ке [−6; 9] функ­ция имеет одну точку мак­си­му­ма *x* = 7.

Ответ: 1.

Ответ: 1

**8. B 8 № 27495.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции http://reshuege.ru/formula/50/50bbd36e1fd2333108437a2ca378be62p.png, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле http://reshuege.ru/formula/21/21d50c96e540328cb709d960571fcdacp.png. Най­ди­те ко­ли­че­ство точек ми­ни­му­ма функ­ции http://reshuege.ru/formula/50/50bbd36e1fd2333108437a2ca378be62p.pngна от­рез­ке http://reshuege.ru/formula/bf/bf767128d9b0607e3d00bcb3ee7e4e2ep.png.



**Ре­ше­ние.**

Точки ми­ни­му­ма со­от­вет­ству­ют точ­кам смены знака про­из­вод­ной с ми­ну­са на плюс. На от­рез­ке http://reshuege.ru/formula/bf/bf767128d9b0607e3d00bcb3ee7e4e2ep.pngфунк­ция имеет одну точку ми­ни­му­ма http://reshuege.ru/formula/84/8470d05761224eef5bbbd5e1f9df74fdp.png.

Ответ: 1.

Ответ: 1

**Ре­ше­ние.**

Про­ме­жут­ки воз­рас­та­ния дан­ной функ­ции *f(x)* со­от­вет­ству­ют про­ме­жут­кам, на ко­то­рых ее про­из­вод­ная по­ло­жи­тель­на, то есть ин­тер­ва­лам (−7; −5,5), (−2,5; 4). Дан­ные ин­тер­ва­лы со­дер­жат целые точки –6, –2, –1, 0, 1, 2, 3. Их сумма равна –3.

Ответ: –3.

Ответ: -3

**Ре­ше­ние.**

Про­ме­жут­ки убы­ва­ния функ­ции *f(x)* со­от­вет­ству­ют про­ме­жут­кам, на ко­то­рых про­из­вод­ная функ­ции от­ри­ца­тель­на, то есть ин­тер­ва­лу (−2,5; 6,5). Дан­ный ин­тер­вал со­дер­жит сле­ду­ю­щие целые точки: –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 сумма ко­то­рых равна 18.

Ответ: 18.

Ответ: 18

**Ре­ше­ние.**

Про­ме­жут­ки воз­рас­та­ния функ­ции *f(x)* со­от­вет­ству­ют про­ме­жут­кам, на ко­то­рых про­из­вод­ная функ­ции по­ло­жи­тель­на, то есть ин­тер­ва­лам (−11; −10), (−7; −1), (2; 3). Наи­боль­ший из них — ин­тер­вал (−7; −1), длина ко­то­ро­го 6.

Ответ: 6.

Ответ: 6

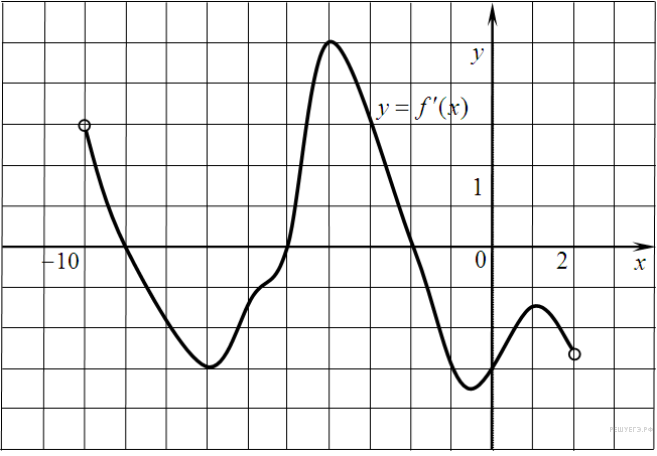
**Ре­ше­ние.**

Про­ме­жут­ки убы­ва­ния функ­ции *f(x)* со­от­вет­ству­ют про­ме­жут­кам, на ко­то­рых про­из­вод­ная функ­ции от­ри­ца­тель­на, то есть ин­тер­ва­лам (−1; 5) дли­ной 6 и (7; 11) дли­ной 4. Длина наи­боль­ше­го из них 6.

Ответ: 6.

Ответ: 6

**14. B 8 № 27501.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции *f(x)*, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−10; 2). Най­ди­те ко­ли­че­ство точек, в ко­то­рых ка­са­тель­ная к гра­фи­ку функ­ции *f(x)* па­рал­лель­на пря­мой *y* = −2*x* − 11 или сов­па­да­ет с ней.



**Ре­ше­ние.**

Зна­че­ние про­из­вод­ной в точке ка­са­ния равно уг­ло­во­му ко­эф­фи­ци­ен­ту ка­са­тель­ной. По­сколь­ку ка­са­тель­ная па­рал­лель­на пря­мой *y* = −2*x* − 11 или сов­па­да­ет с ней, их уг­ло­вые ко­эф­фи­ци­ен­ты равны –2. Най­дем ко­ли­че­ство точек, в ко­то­рых *y'*(*x*0) = −2, это со­от­вет­ству­ет ко­ли­че­ству точек пе­ре­се­че­ния гра­фи­ка про­из­вод­ной с пря­мой *y* = −2. На дан­ном ин­тер­ва­ле таких точек 5.

Ответ: 5.

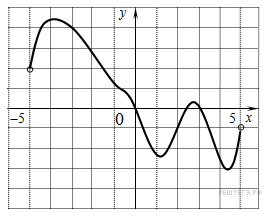
Ответ: 5

**Ре­ше­ние.**

Если про­из­вод­ная в не­ко­то­рой точке равна нулю, а в ее окрест­но­сти ме­ня­ет знак, то это точка экс­тре­му­ма. На от­рез­ке [–2; 6] гра­фик про­из­вод­ной пе­ре­се­ка­ет ось абс­цисс, про­из­вод­ная ме­ня­ет знак с плюса на минус. Сле­до­ва­тель­но, точка 4 яв­ля­ет­ся точ­кой экс­тре­му­ма.

Ответ: 4.

Ответ: 4

**16. B 8 № 119971.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик функ­ции *f(x)*, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−5; 5). Най­ди­те ко­ли­че­ство точек, в ко­то­рых про­из­вод­ная функ­ции *f(x)* равна 0.

**Ре­ше­ние.**

Про­из­вод­ная изоб­ра­жен­ной на ри­сун­ке функ­ции *f(x)* равна нулю в точ­ках экс­тре­му­мов: −3,7; 1,4; 2,6 и 4,2. Про­из­вод­ная равна нулю в 4 точ­ках.

Ответ: 4.

Ответ: 4

**Ре­ше­ние.**

Воз­рас­та­нию диф­фе­рен­ци­ру­е­мой функ­ции http://reshuege.ru/formula/50/50bbd36e1fd2333108437a2ca378be62p.pngсо­от­вет­ству­ют по­ло­жи­тель­ные зна­че­ния её про­из­вод­ной. Про­из­вод­ная по­ло­жи­тель­на в точ­ках http://reshuege.ru/formula/71/71ed5272953166f3022b57a34ed43fabp.pngТаких точек 3.

Ответ:3.

Ответ: 3

**Ре­ше­ние.**

Убы­ва­нию диф­фе­рен­ци­ру­е­мой функ­ции http://reshuege.ru/formula/50/50bbd36e1fd2333108437a2ca378be62p.pngсо­от­вет­ству­ют от­ри­ца­тель­ные зна­че­ния её про­из­вод­ной. Про­из­вод­ная от­ри­ца­тель­на в точ­ках http://reshuege.ru/formula/9f/9f6ae98d004e89104ee7465593bbfde3p.png: точки лежат ниже оси абс­цисс, их ор­ди­на­ты от­ри­ца­тель­гы. Таких точек 5.

Ответ: 5.

Ответ: 5

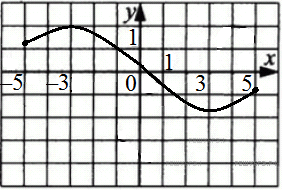
**Ре­ше­ние.**

Зна­че­ние про­из­вод­ной в точке ка­са­ния равно уг­ло­во­му ко­эф­фи­ци­ен­ту ка­са­тель­ной, ко­то­рый в свою оче­редь равен тан­ген­су угла на­кло­на дан­ной ка­са­тель­ной к оси абс­цисс. Про­из­вод­ная от­ри­ца­тель­на в точ­ках −1 и 4. Мо­дуль тан­ген­са угла на­кло­на ка­са­тель­ной явно боль­ше в точке 4, по­это­му тан­генс в этой точке наи­мень­ший.

Ответ:4.

Ответ: 4

**Ре­ше­ние.**



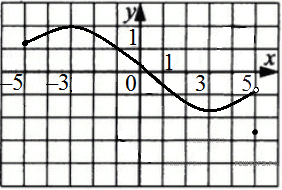
На­пом­ним, что если функ­ция не­пре­рыв­на на от­рез­ке [*a*; *b*], а её про­из­вод­ная по­ло­жи­тель­на (от­ри­ца­тель­на) на ин­тер­ва­ле (*a*; *b*), то функ­ция воз­рас­та­ет (убы­ва­ет) на от­рез­ке [*a*; *b*].

Тем самым, функ­ция *f*, гра­фик про­из­вод­ной ко­то­рой дан в усло­вии, воз­рас­та­ет на от­рез­ках [−5; −3] и [3; 5] и убы­ва­ет на от­рез­ке [−3; 3].

Из этого сле­ду­ет, что *f* при­ни­ма­ет наи­мень­шее зна­че­ние на левой гра­ни­це от­рез­ка, в точке −5, или в точке ми­ни­му­ма *х*min = 3. В силу воз­рас­та­ния *f* на от­рез­ке [3; 5] спра­вед­ли­во не­ра­вен­ство *f* (5) > *f* (3). По­сколь­ку по усло­вию *f* (−5) не мень­ше, чем *f* (5), спра­вед­ли­ва оцен­ка *f* (−5) > *f* (3).

Тем самым, наи­мень­ше­го зна­че­ния функ­ция *f* до­сти­га­ет в точке 3. Гра­фик одной из функ­ций, удо­вле­то­в­ря­ю­щих усло­вию, при­ведён на ри­сун­ке.

Ответ:3.



**При­ме­ча­ние Б. М. Бек­ке­ра (Санкт-Пе­тер­бург).**

Не­пре­рыв­ность функ­ции на кон­цах от­рез­ка су­ще­ствен­на. Дей­стви­тель­но, если бы функ­ция *f* имела в точке 5 раз­рыв пер­во­го рода (см. рис.), зна­че­ние *f* (5) могло ока­зать­ся мень­ше зна­че­ния *f* (3), а тогда наи­мень­шим зна­че­ни­ем функ­ции на от­рез­ке [−5; 5] яв­ля­лось бы зна­че­ние функ­ции в точке 5.

**При­ме­ча­ние пор­та­ла РЕШУ ЕГЭ.**

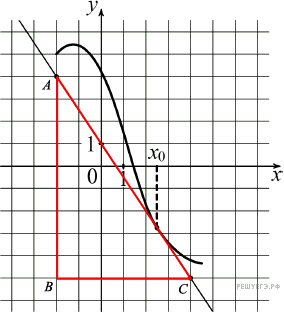
Мы были удив­ле­ны, об­на­ру­жив это за­да­ние в эк­за­ме­на­ци­он­ной ра­бо­те до­сроч­но­го ЕГЭ по ма­те­ма­ти­ке 28.04.2014 г. Это не­про­стое за­да­ние от­сут­ству­ет в От­кры­тых бан­ках за­да­ний, что, не­со­мнен­но, ока­за­лось не­при­ят­ным сюр­при­зом для вы­пуск­ни­ков.

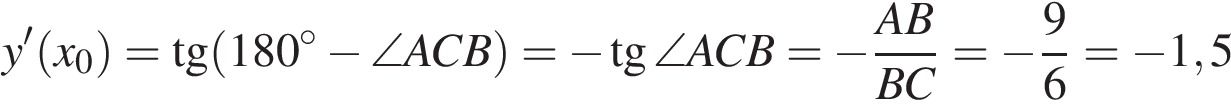
**При­ме­ча­ние Алек­санд­ра Ла­ри­на (Москва).**

В этой за­дач­ке весь ужас «вы­стре­лил вхо­ло­стую», 99,9999% ре­ша­ю­щих даже и не об­ра­тят вни­ма­ние на по­тен­ци­аль­ную угро­зу — ответ-то по­лу­ча­ет­ся такой же. А про со­от­но­ше­ние зна­че­ний на гра­ни­цах и уж тем более про не­пре­рыв­ность никто чи­тать и не со­би­ра­ет­ся :-) А вот если усло­вие слег­ка по­ме­нять, то «минус балл» всей стра­не обес­пе­чен будет.

Ответ: 3

**21. B 8 № Ре­ше­ние.**

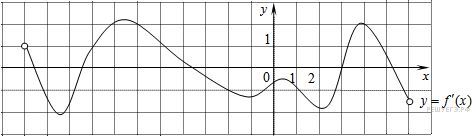
Зна­че­ние про­из­вод­ной в точке ка­са­ния равно уг­ло­во­му ко­эф­фи­ци­ен­ту ка­са­тель­ной, ко­то­рый в свою оче­редь равен тан­ген­су угла на­кло­на дан­ной ка­са­тель­ной к оси абс­цисс. По­стро­им тре­уголь­ник с вер­ши­на­ми в точ­ках *A* (−2; 4), *B* (−2; −5), *C* (4; −5). Угол на­кло­на ка­са­тель­ной к оси абс­цисс будет равен углу, смеж­но­му с углом *ACB*:

.

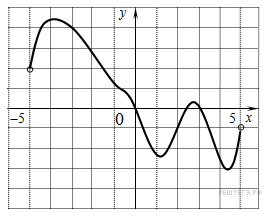
Ответ: −1,5.

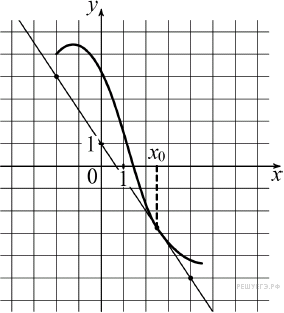
Ответ: -1,5

**22. B 8 № 505442.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик функ­ции http://reshuege.ru/formula/bb/bb22502d91a5906412aa5004ab2b82a5p.png— про­из­вод­ной функ­ции *f*(*x*), опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−10; 6). В какой точке от­рез­ка [−2; 4] функ­ция *f*(*x*) при­ни­ма­ет наи­мень­шее зна­че­ние?

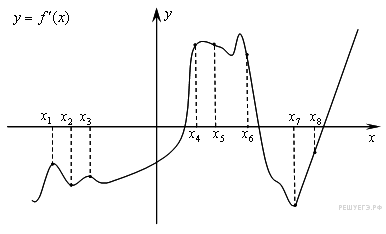


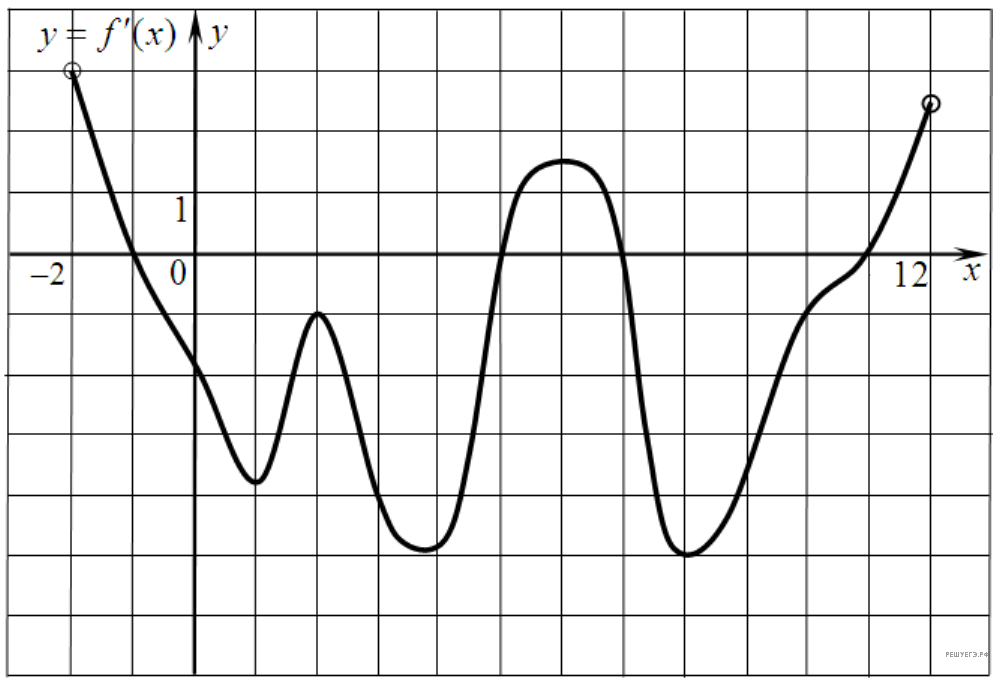
***Самостоятельная работа (на экране слайды с заданиями)***

**27488.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик функ­ции http://reshuege.ru/formula/7c/7c1c9491ba7c6e8d6d2cfa82e39b22cap.png, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−5; 5). Опре­де­ли­те ко­ли­че­ство целых точек, в ко­то­рых про­из­вод­ная функ­ции http://reshuege.ru/formula/50/50bbd36e1fd2333108437a2ca378be62p.png от­ри­ца­тель­на.

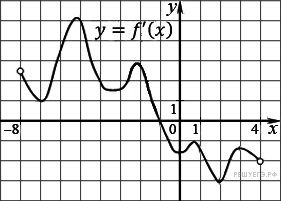
**505400.** На ри­сун­ке изоб­ра­же­ны гра­фик функ­ции *y* = *f*(*x*) и ка­са­тель­ная к нему в точке с абс­цис­сой http://reshuege.ru/formula/2e/2e9c23c4d754e38e4b358a1744420252p.pngНай­ди­те зна­че­ние про­из­вод­ной функ­ции *f*(*x*) в точке http://reshuege.ru/formula/2e/2e9c23c4d754e38e4b358a1744420252p.png

**. B 8 № 317541.** На ри­сун­ке изоб­ражён гра­фик http://reshuege.ru/formula/bb/bb22502d91a5906412aa5004ab2b82a5p.pngпро­из­вод­ной функ­ции http://reshuege.ru/formula/50/50bbd36e1fd2333108437a2ca378be62p.pngи во­семь точек на оси абс­цисс: http://reshuege.ru/formula/0a/0a886d8d7f69aab15bc76ccaf23ce109p.pnghttp://reshuege.ru/formula/2d/2d7616976eeff7d7dd56512675ccb59bp.pnghttp://reshuege.ru/formula/79/79a60d393eb31d182ec89074101f9c00p.pnghttp://reshuege.ru/formula/3b/3bde5c71067f2d0732e27d1598d0e3f1p.png, http://reshuege.ru/formula/96/96633bb730e5b646bb4cde4a0398ff84p.png. В сколь­ких из этих точек функ­ция http://reshuege.ru/formula/50/50bbd36e1fd2333108437a2ca378be62p.pngвоз­рас­та­ет?





**. B 8 № 27500.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции *f(x)*, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−2; 12). Най­ди­те про­ме­жут­ки убы­ва­ния функ­ции *f(x)*. В от­ве­те ука­жи­те длину наи­боль­ше­го из них.

**.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции http://reshuege.ru/formula/50/50bbd36e1fd2333108437a2ca378be62p.png, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле http://reshuege.ru/formula/cf/cfb4355bbe4889a6f5b30a3dd10a4b78p.png. В какой точке от­рез­ка http://reshuege.ru/formula/3c/3c22799ef93de97bf94c08123d1b62a3p.pnghttp://reshuege.ru/formula/50/50bbd36e1fd2333108437a2ca378be62p.pngпри­ни­ма­ет наи­мень­шее зна­че­ние?

1. **Историческая справка. (сообщение учащегося)**

**Производная** - одно из фундаментальных понятий математики. Оно возникло в XXVII веке в связи с необходимостью решения ряда задач из физики, механики и математики, но в первую очередь следующих двух: определение скорости прямолинейного движения и построения касательной к прямой. Независимо друг от друга И. Ньютон и Г. Лейбниц разработали аппарат, которым мы и пользуемся в настоящее время. И. Ньютон в основном опирался на физическое представление о мгновенной скорости движения, считая его очевидным и сводя к нему другие случаи производной, а Г. Лейбниц использовал понятие бесконечно малой. Исчисление созданное Ньютоном и Лейбницем, получило название дифференциального исчисления. С его помощью был решен целый ряд задач теоретической механики, физики и астрономии. В частности, используя методы дифференциального исчисления, ученые предсказали возвращение кометы Галлея, что было большим триумфом науки XVIII в. С помощью тех же методов математики изучали в XVII и XVIII вв. различные кривые, нашли кривую, по которой быстрее всего падает дифференциального исчисления сыграл Л. Эйлер, написавший учебник «Дифференциальное исчисление».

Основные понятия дифференциального исчисления долгое время не были должным образом обоснованы. Однако в начале XIX в. французский математик О. Коши дал строгое построение дифференциального исчисления на основе понятия предела.

Применяемая сейчас система обозначений для производной восходит к Лейбницу и Лагранжу.

В настоящее время понятие производной находит большое применение в различных областях науки и техники.

1. **Итог урока.**

Каждый сдает лист с результатами работы, заполнялся в ходе урока. Оценивание ведётся по пятибалльной шкале.

ФИО

Цифровой диктант

Результаты проверки в парах

Количество правильных определений

Ответы самостоятельной работы

**Затем учащимся предлагается продолжите фразу:**

“Сегодня на уроке я узнал…”

“Сегодня на уроке я научился…”

“Сегодня на уроке я познакомился…”

Сегодня на уроке я повторил…”

“Сегодня на уроке я закрепил…”

1. **Домашнее задание:**

П 30 № 22(а),25(а)27(а)29(а)



ИНФОРМАЦИОННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. А Г Мордкович. и др "Алгебра и начала анализа". Учебник для 10-11 классов.  М.: Мнемозина , 2012г  
   материалы сайта Дмитрия Гущина «Решу ЕГЭ»

Глейзер Г.И. История математики в школе. IX—X кл.  М.: Просвещение, 1983