**Про­из­вод­ная и первообразная**

**Физический смысл производной**

**1. № 119975.** Ма­те­ри­аль­ная точка дви­жет­ся пря­мо­ли­ней­но по за­ко­ну (где *x* — рас­сто­я­ние от точки от­сче­та в мет­рах, *t* — время в се­кун­дах, из­ме­рен­ное с на­ча­ла дви­же­ния). Най­ди­те ее ско­рость (в м/с) в мо­мент вре­ме­ни *t* = 9 с.

**2№ 119976.** Ма­те­ри­аль­ная точка дви­жет­ся пря­мо­ли­ней­но по за­ко­ну (где *x* — рас­сто­я­ние от точки от­сче­та в мет­рах, *t* — время в се­кун­дах, из­ме­рен­ное с на­ча­ла дви­же­ния). Най­ди­те ее ско­рость в (м/с) в мо­мент вре­ме­ни *t* = 6 с.

 **3. № 119977.** Ма­те­ри­аль­ная точка дви­жет­ся пря­мо­ли­ней­но по за­ко­ну  (где x — рас­сто­я­ние от точки от­сче­та в мет­рах, t — время в се­кун­дах, из­ме­рен­ное с на­ча­ла дви­же­ния). Най­ди­те ее ско­рость в (м/с) в мо­мент вре­ме­ни  с.

 **4. № 119978.** Ма­те­ри­аль­ная точка дви­жет­ся пря­мо­ли­ней­но по за­ко­ну (где *x* — рас­сто­я­ние от точки от­сче­та в мет­рах, *t* — время в се­кун­дах, из­ме­рен­ное с на­ча­ла дви­же­ния). В какой мо­мент вре­ме­ни (в се­кун­дах) ее ско­рость была равна 3 м/с?

**5. № 119979.** Ма­те­ри­аль­ная точка дви­жет­ся пря­мо­ли­ней­но по за­ко­ну  (где x — рас­сто­я­ние от точки от­сче­та в мет­рах, t — время в се­кун­дах, из­ме­рен­ное с на­ча­ла дви­же­ния). В какой мо­мент вре­ме­ни (в се­кун­дах) ее ско­рость была равна 2 м/с?

 **Геометрический смысл производной, касательная**

**1. № 27485.** Пря­мая  па­рал­лель­на ка­са­тель­ной к гра­фи­ку функ­ции . Най­ди­те абс­цис­су точки ка­са­ния.

 **2. № 27486.** Пря­мая  яв­ля­ет­ся ка­са­тель­ной к гра­фи­ку функ­ции . Най­ди­те абс­цис­су точки ка­са­ния.

**3. № 27503.** На ри­сун­ке изоб­ражён гра­фик функ­ции *y=f(x)* и ка­са­тель­ная к нему в точке с абс­цис­сой *x*0. Най­ди­те зна­че­ние про­из­вод­ной функ­ции *f(x)* в точке *x*0.

**4. № 27504.** На ри­сун­ке изоб­ражён гра­фик функ­ции *y=f(x)*и ка­са­тель­ная к нему в точке с абс­цис­сой *x*0. Най­ди­те зна­че­ние про­из­вод­ной функ­ции *f(x)* в точке *x*0.

**5. № 27505.** На ри­сун­ке изоб­ражён гра­фик функ­ции *y=f(x)* и ка­са­тель­ная к нему в точке с абс­цис­сой *x*0. Най­ди­те зна­че­ние про­из­вод­ной функ­ции *f(x)* в точке *x*0.

**6. № 27506.** На ри­сун­ке изоб­ражён гра­фик функ­ции*y=f(x)* и ка­са­тель­ная к нему в точке с абс­цис­сой *x*0. Най­ди­те зна­че­ние про­из­вод­ной функ­ции *f(x)* в точке *x*0.

**7. № 40129.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик функ­ции *y=f(x)*. Пря­мая, про­хо­дя­щая через на­ча­ло ко­ор­ди­нат, ка­са­ет­ся гра­фи­ка этой функ­ции в точке с абс­цис­сой 8. Най­ди­те *f'*(8).



**8. № 40130.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции . Най­ди­те абс­цис­су точки, в ко­то­рой ка­са­тель­ная к гра­фи­ку  па­рал­лель­на пря­мой или сов­па­да­ет с ней.

**9. № 40131.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции . Най­ди­те абс­цис­су точки, в ко­то­рой ка­са­тель­ная к гра­фи­ку  па­рал­лель­на оси абс­цисс или сов­па­да­ет с ней.

**10. № 119972.** Пря­мая  яв­ля­ет­ся ка­са­тель­ной к гра­фи­ку функ­ции . Най­ди­те .

**Ре­ше­ние.** Пря­мая  яв­ля­ет­ся ка­са­тель­ной к гра­фи­ку функ­ции  в точке  тогда и толь­ко тогда, когда од­но­вре­мен­но  и . В нашем слу­чае имеем:

 Ис­ко­мое зна­че­ние *а* равно 0,125 Ответ: 0,125.

**При­ве­дем дру­гое ре­ше­ние.**

По смыс­лу за­да­чи *a* ≠ 0, а зна­чит, гра­фик за­дан­ной функ­ции — па­ра­бо­ла. Ка­са­тель­ная к па­ра­бо­ле (а также и к ги­пер­бо­ле) имеет с ней един­ствен­ную общую точку. По­это­му не­об­хо­ди­мо и до­ста­точ­но, чтобы урав­не­ние  имело един­ствен­но ре­ше­ние. Для этого дис­кри­ми­нант  урав­не­ния  дол­жен быть равен нулю, от­ку­да .

 **11. № 119973.** Пря­мая  яв­ля­ет­ся ка­са­тель­ной к гра­фи­ку функ­ции . Най­ди­те , учи­ты­вая, что абс­цис­са точки ка­са­ния боль­ше 0.

**Ре­ше­ние.** Усло­вие ка­са­ния гра­фи­ка функ­ции  и пря­мой  задаётся си­сте­мой тре­бо­ва­ний:



В нашем слу­чае имеем:



По усло­вию абс­цис­са точки ка­са­ния по­ло­жи­тель­на, по­это­му *x*=0,5, от­ку­да *b*=−33. Ответ: −33.

**12. № 119974.** Пря­мая  яв­ля­ет­ся ка­са­тель­ной к гра­фи­ку функ­ции . Най­ди­те .

**Ре­ше­ние.** Усло­вие ка­са­ния гра­фи­ка функ­ции  и пря­мой  задаётся си­сте­мой тре­бо­ва­ний:

 В нашем слу­чае имеем:  Ответ: 7.

**13. № 317539.** На ри­сун­ке изоб­ражён гра­фик функ­ции  и во­семь точек на оси абс­цисс: , , , , . В сколь­ких из этих точек про­из­вод­ная функ­ции  по­ло­жи­тель­на?

. 

**14. № 317540.** На ри­сун­ке изоб­ражён гра­фик функ­ции  и две­на­дцать точек на оси абс­цисс: , , , , . В сколь­ких из этих точек про­из­вод­ная функ­ции  от­ри­ца­тель­на?



**15. № 317543.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик функ­ции  и от­ме­че­ны точки −2, −1, 1, 2. В какой из этих точек зна­че­ние про­из­вод­ной наи­боль­шее? В от­ве­те ука­жи­те эту точку.

 **Ре­ше­ние.**

Зна­че­ние про­из­вод­ной в точке ка­са­ния равно уг­ло­во­му ко­эф­фи­ци­ен­ту ка­са­тель­ной, ко­то­рый в свою оче­редь равен тан­ген­су угла на­кло­на дан­ной ка­са­тель­ной к оси абс­цисс. Про­из­вод­ная по­ло­жи­тель­на в точ­ках −2 и 2. Угол на­кло­на (и его тан­генс) явно боль­ше в точке −2.

Ответ:−2.

**16. № 505379.** На ри­сун­ке изоб­ра­же­ны гра­фик функ­ции *y* = *f*(*x*) и ка­са­тель­ная к нему в точке с абс­цис­сой *x*0. Най­ди­те зна­че­ние про­из­вод­ной функ­ции *f*(*x*) в точке *x*0.

**Ре­ше­ние.**

Зна­че­ние про­из­вод­ной в точке ка­са­ния равно уг­ло­во­му ко­эф­фи­ци­ен­ту ка­са­тель­ной, ко­то­рый в свою оче­редь равен тан­ген­су угла на­кло­на дан­ной ка­са­тель­ной к оси абс­цисс. По­стро­им тре­уголь­ник с вер­ши­на­ми в точ­ках *A* (−2; 13), *B* (−2; 3), *C* (6; 3). Угол на­кло­на ка­са­тель­ной к оси абс­цисс будет равен углу, смеж­но­му с углом *ACB*:

. Ответ: −1,25.

**Применение про­из­вод­ной к ис­сле­до­ва­нию функций**

**1. № 27487.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик функ­ции , опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−6; 8). Опре­де­ли­те ко­ли­че­ство целых точек, в ко­то­рых про­из­вод­ная функ­ции по­ло­жи­тель­на.



**2. № 27488.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик функ­ции , опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−5; 5). Опре­де­ли­те ко­ли­че­ство целых точек, в ко­то­рых про­из­вод­ная функ­ции  от­ри­ца­тель­на.

**3. № 27489.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик функ­ции *y=f(x)*, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−5; 5). Най­ди­те ко­ли­че­ство точек, в ко­то­рых ка­са­тель­ная к гра­фи­ку функ­ции па­рал­лель­на пря­мой *y* = 6 или сов­па­да­ет с ней.

 **Ре­ше­ние.**

По­сколь­ку ка­са­тель­ная па­рал­лель­на пря­мой *y* = 6 или сов­па­да­ет с ней, их уг­ло­вые ко­эф­фи­ци­ен­ты равны 0. Уг­ло­вой ко­эф­фи­ци­ент ка­са­тель­ной равен зна­че­нию про­из­вод­ной в точке ка­са­ния. Про­из­вод­ная равна нулю в точ­ках экс­тре­му­ма функ­ции. На за­дан­ном ин­тер­ва­ле функ­ция имеет 2 мак­си­му­ма и 2 ми­ни­му­ма, итого 4 экс­тре­му­ма. Таким об­ра­зом, ка­са­тель­ная к гра­фи­ку функ­ции па­рал­лель­на пря­мой y = 6 или сов­па­да­ет с ней в 4 точ­ках.

 Ответ: 4.

 **4. № 27490.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик функ­ции *y* = *f*(*x*), опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−2; 12). Най­ди­те сумму точек экс­тре­му­ма функ­ции *f*(*x*),.

****

**5. № 27491.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции , опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле . В какой точке от­рез­ка  функ­ция  при­ни­ма­ет наи­боль­шее зна­че­ние?

**6. № 27492.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции , опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле . В какой точке от­рез­ка   при­ни­ма­ет наи­мень­шее зна­че­ние?

  **7. № 27494.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции *f(x)*, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−7; 14). Най­ди­те ко­ли­че­ство точек мак­си­му­ма функ­ции *f(x)* на от­рез­ке [−6; 9].



**8. № 27495.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции , опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле . Най­ди­те ко­ли­че­ство точек ми­ни­му­ма функ­ции  на от­рез­ке .



**9. № 27496.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции *f(x)*, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−11; 11). Най­ди­те ко­ли­че­ство точек экс­тре­му­ма функ­ции *f(x)* на от­рез­ке [−10; 10].



**10. № 27497.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции *f(x)*, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−7; 4). Най­ди­те про­ме­жут­ки воз­рас­та­ния функ­ции *f(x)*. В от­ве­те ука­жи­те сумму целых точек, вхо­дя­щих в эти про­ме­жут­ки.

 

**11. № 27498.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции *f(x)*, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−5; 7). Най­ди­те про­ме­жут­ки убы­ва­ния функ­ции *f(x)*. В от­ве­те ука­жи­те сумму целых точек, вхо­дя­щих в эти про­ме­жут­ки.

 **12. № 27499.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции *f(x)*, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−11; 3). Най­ди­те про­ме­жут­ки воз­рас­та­ния функ­ции *f(x)*. В от­ве­те ука­жи­те длину наи­боль­ше­го из них.



**13. № 27500.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции *f(x)*, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−2; 12). Най­ди­те про­ме­жут­ки убы­ва­ния функ­ции *f(x)*. В от­ве­те ука­жи­те длину наи­боль­ше­го из них.



**14. № 27501.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции *f(x)*, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−10; 2). Най­ди­те ко­ли­че­ство точек, в ко­то­рых ка­са­тель­ная к гра­фи­ку функ­ции *f(x)* па­рал­лель­на пря­мой *y* = −2*x* − 11 или сов­па­да­ет с ней.



**15. № 27502.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик про­из­вод­ной функ­ции *f(x)*, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−4; 8). Най­ди­те точку экс­тре­му­ма функ­ции *f(x)* на от­рез­ке [−2; 6].

**16. № 119971.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик функ­ции *f(x)*, опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−5; 5). Най­ди­те ко­ли­че­ство точек, в ко­то­рых про­из­вод­ная функ­ции *f(x)* равна 0.

**17. № 317541.** На ри­сун­ке изоб­ражён гра­фик  про­из­вод­ной функ­ции  и во­семь точек на оси абс­цисс:    , . В сколь­ких из этих точек функ­ция  воз­рас­та­ет?



**18. № 317542.** На ри­сун­ке изоб­ражён гра­фик  про­из­вод­ной функ­ции  и во­семь точек на оси абс­цисс:    ,. В сколь­ких из этих точек функ­ция  убы­ва­ет?



**19.№ 317544.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик функ­ции  и от­ме­че­ны точки −2, −1, 1, 4. В какой из этих точек зна­че­ние про­из­вод­ной наи­мень­шее? В от­ве­те ука­жи­те эту точку.



**20. № 505119.** Функ­ция *y* = *f* (*x*) опре­де­ле­на и не­пре­рыв­на на от­рез­ке [−5; 5]. На ри­сун­ке изоб­ражён гра­фик её про­из­вод­ной. Най­ди­те точку *x*0, в ко­то­рой функ­ция при­ни­ма­ет наи­мень­шее зна­че­ние, если  *f* (−5) ≥ *f* (5).

**21. № 505400.** На ри­сун­ке изоб­ра­же­ны гра­фик функ­ции *y* = *f*(*x*) и ка­са­тель­ная к нему в точке с абс­цис­сой *x*0. Най­ди­те зна­че­ние про­из­вод­ной функ­ции *f*(*x*) в точке *x*0.

**22. № 505442.** На ри­сун­ке изоб­ра­жен гра­фик функ­ции  — про­из­вод­ной функ­ции *f*(*x*), опре­де­лен­ной на ин­тер­ва­ле (−10; 6). В какой точке от­рез­ка [−2; 4] функ­ция *f*(*x*) при­ни­ма­ет наи­мень­шее зна­че­ние?



**Первообразная**

**1. № 323077.** На ри­сун­ке изоб­ражён гра­фик функ­ции *y* = *F*(*x*) — одной из пер­во­об­раз­ных не­ко­то­рой функ­ции *f*(*x*), опре­делённой на ин­тер­ва­ле (−3;5). Поль­зу­ясь ри­сун­ком, опре­де­ли­те ко­ли­че­ство ре­ше­ний урав­не­ния *f*(*x*)=0 на от­рез­ке [−2;4].



**Ре­ше­ние.**

По опре­де­ле­нию пер­во­об­раз­ной на ин­тер­ва­ле (−3; 5) спра­вед­ли­во ра­вен­ство 

Сле­до­ва­тель­но, ре­ше­ни­я­ми урав­не­ния *f*(*x*)=0 яв­ля­ют­ся точки экс­тре­му­мов изоб­ра­жен­ной на ри­сун­ке функ­ции *F*(*x*) Это точки −2,6; −2,2; −1,2; −0,5; 0; 0,4; 0,8; 1,2; 2,2; 2,8; 3,4; 3,8. Из них на от­рез­ке [−2;4] лежат 10 точек. Таким об­ра­зом, на от­рез­ке [−2;4] урав­не­ние  имеет 10 ре­ше­ний. Ответ:10.

**2. № 323078.** На ри­сун­ке изоб­ражён гра­фик не­ко­то­рой функ­ции  (два луча с общей на­чаль­ной точ­кой). Поль­зу­ясь ри­сун­ком, вы­чис­ли­те , где  — одна из пер­во­об­раз­ных функ­ции .



**Ре­ше­ние.**

Раз­ность зна­че­ний пер­во­об­раз­ной в точ­ках 8 и 2 равна пло­ща­ди вы­де­лен­ной на ри­сун­ке тра­пе­ции  По­это­му

 Ответ:7.

**3. № 323079.** На ри­сун­ке изоб­ражён гра­фик функ­ции . Функ­ция  — одна из пер­во­об­раз­ных функ­ции . Най­ди­те пло­щадь за­кра­шен­ной фи­гу­ры.

**Ре­ше­ние.**

Пло­щадь вы­де­лен­ной фи­гу­ры равна раз­но­сти зна­че­ний пер­во­об­раз­ных, вы­чис­лен­ных в точ­ках  и 

Имеем:







**При­ве­дем дру­гое ре­ше­ние.**

По­лу­чим явное вы­ра­же­ние для  По­сколь­ку



имеем:



**При­ме­ча­ние.**

Вни­ма­тель­ный чи­та­тель от­ме­тит, что вто­рой под­ход эк­ви­ва­лен­тен вы­де­ле­нию пол­но­го куба:



что поз­во­ля­ет сразу же найти 

Еще один спо­соб рас­суж­де­ний по­ка­жем на при­ме­ре [сле­ду­ю­щей](http://math.reshuege.ru/problem?id=323080) за­да­чи. Ответ:6.

**4. № 323080.** На ри­сун­ке изоб­ражён гра­фик не­ко­то­рой функ­ции . Функ­ция  — одна из пер­во­об­раз­ных функ­ции . Най­ди­те пло­щадь за­кра­шен­ной фи­гу­ры.

**Ре­ше­ние.**

Най­дем фор­му­лу, за­да­ю­щую функ­цию  гра­фик ко­то­рой изоб­ражён на ри­сун­ке.



Сле­до­ва­тель­но, гра­фик функ­ции  по­лу­чен сдви­гом гра­фи­ка функ­ции  на  еди­ниц влево вдоль оси абс­цисс. По­это­му ис­ко­мая пло­щадь фи­гу­ры равна пло­ща­ди фи­гу­ры, огра­ни­чен­ной гра­фи­ком функ­ции  и от­рез­ком  оси абс­цисс. Имеем:

 Ответ: 4.