

Уравнения и неравенства с модулем

Частные случаи уравнений с модулями:

$$|f(x)| = a \ (a > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{cases} \quad |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{cases}$$

Частные случаи неравенств с модулями:

$$|f(x)| < a \ (a > 0) \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a, \\ f(x) > -a. \end{cases}$$

$$|f(x)| > a \ (a > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < -a. \end{cases}$$

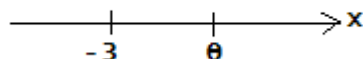
$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases} \quad |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$$

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) < 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) < 0$$

(аналогично для знака >)

Если уравнение или неравенство не относится ни к одному из частных случаев, то решаем его «раскрывая модуль на промежутках».

Пример 1. $|x+3| - 2x = |x| + 6$



$$1. \begin{cases} x < -3, \\ -x - 3 - 2x = -x + 6; \end{cases}$$

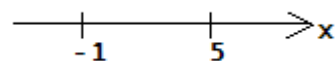
$$\begin{cases} x < -3, \\ x = -4,5. \end{cases} \quad x = -4,5.$$

$$2. \begin{cases} -3 \leq x \leq 0, \\ x+3-2x = -x+6; \end{cases} \quad \begin{cases} -3 \leq x \leq 0, \\ 0x = 3; \end{cases} \quad \text{решений нет}$$

$$3. \begin{cases} x > 0, \\ x+3-2x = x+6; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x = -1,5; \end{cases} \quad \text{решений нет}$$

Ответ: -4,5

Пример 2. $|x+1| \leq |x-5| + x - 2$



$$1. \begin{cases} x < -1, \\ -x-1 \leq -x+5+x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1, \\ x \geq -4; \end{cases} \quad x \in [-4; -1).$$

$$2. \begin{cases} -1 \leq x \leq 5, \\ x+1 \leq -x+5+x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \leq x \leq 5, \\ x \leq 2; \end{cases} \quad x \in [-1; 2].$$

$$3. \begin{cases} x > 5, \\ x+1 \leq x-5+x-2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 5; \\ x \geq 8. \end{cases} \quad x \in [8; +\infty).$$

Объединяем полученные решения: $x \in [-4; 2] \cup [8; +\infty)$.

Ответ: $[-4; 2] \cup [8; +\infty)$.