***Система творческих заданий по подготовке к ЕГЭ***

***по теме «Множество значений функции»***

***Множество значений функции.***

*Множеством* *(областью) значений Е(y) функции y=f(x)* называется множество всех таких чисел , для каждого из которых найдется число, такое что*: .*

Напомним области значений основных элементарных функций.

Областью значений всякого многочлена четной степени является промежуток [*m*,+, где *m* – наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток [–],где *n* – наибольшее значение этого многочлена.

Областью значений всякого многочлена нечетной степени является *R*.

**1.**У любой функции *y=f(x)* есть множество значений, которое обозначается *E(y)* или *E(f)*.

Как найти множество значений? Проще всего это сделать если построить эскиз графика заданной функции. А это проще всего сделать, если уметь строить графики элементарных функций и их композиций (сложных функций).

**Пример 1.:** ***Найдите множество значений функции*** *y=sin x, x;]*

**Решение.**

Функция не является монотонной на заданном промежутке. Можно, например, посмотреть множество значений на тригонометрическом круге. Видно (рис.1), что при изменении x от до синус изменяется от до 1, а при изменении х от до синус изменяется от 1 до >. Отсюда следует, что синус принимает все значения от до 1, т.е.

(sin*x*; x;)=[ ;1]

Ответ: [ ;1]

*у*

*1*

-1 1 х

-1

**Пример 2.:*Найдите множество значений функции***

**Решение.**

Основной способ решения таких задач известен: надо построить график функции и с его помощью найти *E(f)*. Но чтобы построить график заданной функции, следует провести ее исследование на экстремум с помощью производной, если учащиеся пока не знают. То поступим по-другому: выясним, при каких значениях параметра *а* уравнение имеет корни. Множество таких значений *а* совпадает с множеством значений функции.

Имеем: Уравнение имеет корни, если Значит, *E(f)*=

**2.** Пусть *f(x)* является сложной функцией, в которой можно выделить «подфункцию» *t=t(x).* Тогда *y=f(t)=f(t(x)).*Сначала мы находим *E(t),* потом *E(f)*.

**Пример 1**.: ***Найдите множество значений функции***

*(6-x-)*

Решение. В задачах, если это возможно, лучше перейти к основанию, большему 1. (с ним работать проще)

*(6-x-)(6-x-)=(6,25-(х+)*

Квадратный трехчлен

*f(x)=6-x- = - (x+* принимает все значения из промежутка (∞;].

Логарифмы существуют только у положительных чисел, поэтому

(∞;] тогда ( *- (x+* принимает все значения из промежутка (-∞;]. Отсюда следует, что *(6-x-)* принимает все значения из промежутка [-;+∞), т.е. =[; +∞)

**Пример 2**.:***Найдите множество значений функции***

*y=()*

Решение.

Найдем сначала область определения *Д(y)*

*↔*

Из найденной области определения следует, что

*х+2>0* и *х-4<0*, поэтому *|х+2|+|х-4|=х+2-х+4=6*, тогда =2 и =1

Поэтому в области определения

*y(x)=()==*

квадратный трехчлен *f(x)=8-(x-* принимает все значения из промежутка

(-∞;8], логарифм  *f(x)* существует для всех значений *f(x)∊(0;8].* Но логарифм стоит в знаменателе – поэтому необходимо разбить промежуток на два, исключив значение *f(x)=1.*

Итак,

*[⇒[*

Поэтому *ℇ(y)=(-∞;0)[;+∞)*

*Ответ: (-∞;0)[;+∞)*

**Пример 3*. Найдите наименьшее целое значение функции:***

*y=*

*Решение.*

*y=*. Пусть *y=,*где *t0* монотонно возрастает. , если *t* наименьшее, то выражение т.е. при - наибольшее значение принимает;- - наибольшее, если *x*=0, то =13. =16-13=3.=1,7. Наименьшее целое число *y*=2.

*Ответ:* 2.

*Примеры для решения:*

*1). y=.*

*2).y=*7*∙*

*3).y=*9*∙*

*4).y=*

**Пример 4. *Найдите наибольшее целое значение функции:***

*Решение.*

*Рассмотрим функцию:*

Найдем E(*y*) и выберем наибольшее целое:

выражение

*Ответ:3.*

*Примеры для решения:*

*1).*

***Пример 6.Найдите наибольшее целое значение функции:***

*Решение:*

*,*преобразуем показатель степени по формуле сложения тригонометрических функций.  *y=*4∙ Найдем множество значений выражения, –2Наибольшее значение 2sin(*x*-3) –3=–1, то наибольшее значение , . Наибольшее целое равно 1.

*Ответ: 1.*

*Пример для решения:*

***Пример 7. Найдите наибольшее целое значение функции:***

*Решение:*

Областью определения данной в условии функции является интервал (0;+∞). На этой области определения, то есть при *x* >0 выражение пробегает все множество действительных чисел. Следовательно, –1 при *x* >0. Тогда в силу монотонности функции ( на всем множестве действительных чисел, при *x* >0 выполняется неравенство. Поэтому

Значит, наибольшим целым значением функции является 21.

*Ответ: 21.*

*Пример для решения:*

***Пример 8. Найдите наибольшее целое значение функции:***

*Решение: D(y)=R* при *x∊R.*

Преобразуем дробь,т.е. представим в виде суммы целой и дробной части

Наибольшее целое *y*= –1.

*Ответ:* –1.

***Пример 9. Найдите наибольшее целое значение функции:***

*Решение:*

Чтобы ответить на поставленный вопрос задания, найдем множество значений данной функции. Для этого найдем множество неотрицательных значений функции

Так как функция является квадратным трехчленом с отрицательным старшим коэффициентом, то наибольшее значение этой функции достигается в абсциссе вершины параболы, соответствующей этому трехчлену. Указанная абсцисса вершины параболы вычисляется по формуле:

(a и b – старший и второй коэффициенты трехчлена). Значит, наибольшее значение y(1)=152∙(1=16. Таким образом, отрезок [0;16] является множеством неотрицательном значений этой функции. Так как функция является возрастающей, то множеством значений исходной функции

является отрезок []. Этот отрезок содержит единственное целое число, равное 3, которое и будет наибольшим целым значением данной в условии функции.

*Ответ:* 3.

***Пример 10.***

Найдите длину отрезка, которой является областью значений для функции

заданной на промежутке [2;5].

Найдем область определения E(*y*) данной функции. Рассмотрим данную функцию как произведение двух функций: и . Обе эти функции возрастают на отрезке [2;5]. Однако, каждая из функций и меньше нуля на [2;3], равна нулю при нули на (3;5]. Поэтому функция убывает на [2;3] и возрастает на [3;5]. Значит, минимальное значение функции на отрезке [2;5] – это =0, а максимальное значение равняется max=maxследовательно, E(*y*)=[0;64].

*Ответ:* 64.

***Пример 11.***

Найдите наибольшее целое число, входящее в область значений функции

*Решение:*

Для ответа на вопрос задания найдем множество значений функции   
. На множестве действительных чисел функция   
принимает любое значение из отрезка [–1;1]. Поэтому функция   
 принимает любое значение из отрезка [0;1]. Найдем множество значений функции на отрезке [0;1]. Функция является непрерывной и убывающей на всей числовой оси и, в частности, на отрезке [0;1]. Поэтому множеством ее значений на отрезке [0;1] является отрезок [arcctg1;arcctg0]= . Учитывая коэффициент 6, получаем, что отрезок – область значений функции , заданной на всей числовой оси. Наибольшее целое число из отрезка – 9.

*Ответ: 9.*

*Примеры для решения:*

1).Найдите длину отрезка, которой является областью значений для функции

заданной на промежутке [–2;3].

2).Найдите наибольшее целое число, входящее в область значений функции

.

3).Найдите наименьшее целое число, входящее в область значений функции

.

4).Найдите наименьшее целое число, входящее в область значений функции

*.*

5).Найдите количество целых чисел, входящих в область значений функции

6).Найдите количество целых чисел, входящих в область значений функции

***Пример 12.***

Найдите разность между наибольшим целым и наименьшим целым значениями функции

*Решение .*

, .

*.*

Наибольшее целое *y*=4, наименьшее целое *y*=4. Разность равна 0.

*Ответ: 0 .*

***Пример 13.***

Найдите количество целых значений функции

*Решение.*

Согласно равенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом,

,

. Следовательно, . С другой стороны, при *x*∊ обе функции определены, неотрицательны и множество значений функции на этом интервале совпадает с интервалом (0;+∞), следовательно их сумма может принимать любое значение из промежутка [2; +∞). Поэтому ,0 значит количество целых значений функции равно 8.

*Ответ:* 8.

***Пример 14.Найдите количество целых значений функции***

*Решение.*

Количество целых значений 5.

*Ответ:*5

***Пример 15.***

Сколько нечетных целых чисел входит в область определения функции

?

*Решение.*

Область определения функции является множество решений неравенства . Решим его, для чего определим корни трехчлена

Решений неравенства , а соответственно и областью определения исходной функции. Найденный промежуток содержит целые числа с 1 по 12, среди которых 6 нечетных чисел.

*Ответ:* 6.

*Примеры для решения:*

1).Сколько нечетных целых чисел входит в область определения функции

?

2).Сколько целых чисел входит в область определения функции

?

3).Сколько целых чисел входит в область определения функции

?

***Пример 16.***

Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции

*Решение.*

Разность между наибольшим и наименьшим значением равна 8-4=4.

*Ответ:* 4.

*Пример для решения:*

Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции

***Пример 17.Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке [-1;a].***

*Решение.*

У этой задачи только одна трудность – наличие параметра *a.*

Найдем абсциссу вершины параболы , получим *–x=*2. Значит, при *x* функция убывает, а при *x*2 – возрастает. Дальнейшие рассуждения зависят от того, попала ли точка 2 в заданный отрезок или нет.

Если -1 *a,* то на [-1;*a*] функция убывает, следовательно

Если *a* то Что касается наибольшего значения, то его функция достигает либо в точке , и тогда это значение равно 5, либо в точке , и тогда это значение равно . Сравним эти значения, выясним, когда наибольшим значением функции является первое из них. Решив неравенство 5, получим: -15. Поскольку мы рассматриваем случай, то получаем 2, в этом случае .

Если то 5. В этом случае

Если, наконец,то 5= В этом случае

Итак, если -1, то ,; если 2 то

; если 5, то.

***Пример 18.******При каком значении параметра наибольшее значение функции равно наименьшему значению функции:***

*Решение.* Поскольку , выражение можно преобразовать к виду , где вспомогательный аргумент. Значит, а потому для функции получаем: +24. Так как далее , то для функции получаем: Осталось решить уравнение

*Ответ:* -23.