**Показательная функция.**

 Данная тема изучается в 10 классе. Применение знаний и навыков по этой теме крайне необходимы при сдаче ЕГЭ, но при кажущейся простоте темы она вызывает затруднения у учащихся. Часто незнание формул, теории, а так же разнообразие видов заданий по теме не всем ученикам позволяют увидеть ход их решения. Таким образом хочу предложить вам свою методику преподавания данной темы. Надеюсь она поможет найти ответы на вопросы о понятии степени, степенной функции и ее свойствах.

 Методика изучения показательной функции начинается с повторения:

а) Понятие степени с действительным показателем и её свойства

б) Понятие степенной функции и её свойства.

 Основная цель - познакомить учащихся с показательной функцией , научить решать показательные уравнения, неравенства, системы содержащие показательные уравнения; обобщить и систематизировать имеющиеся у учащихся сведения об уравнениях, неравенствах, системах и методах их решения; познакомить с общими методами решения.

Опр: Функция заданная формулой $у=а^{х}$, где а$>0, а\ne 1,$ называется показательной с основанием a.

 Чтобы вывести свойства показательной функции начинаем с построения графиков вида $у=а^{х}, 0<а<1, и у=а^{х}, а>1$.

Например: $у=\left(\frac{1}{2}\right)^{х} и у=2^{х}$

 

 Выявляем основные свойства этой функции:

а) область определения - множество действительных чисел (R)

б) область значений - множество всех положительных чисел (R+)

в) при а = 0, у = 1

г) при а$ >1$, функция возрастает на всей числовой прямой $\left\{\begin{array}{c}х>0, а^{х}>1\\ х<0, 0<а<1\end{array}\right.$

д) при $0<а<1$ функция убывает на всей числовой прямой $\left\{\begin{array}{c}х>0, 0<а^{х}<1\\х<0,а^{х}>1\end{array}\right.$

 Повторив свойства степеней для рациональных х имеем, что при любых действительных значениях х и у справедливы равенства:

$$а^{х}∙а^{у}=а^{ху}; а^{х}:а^{у}=а^{х-у} $$

$$\left(ав\right)^{х}=а^{х}∙в^{х}; \left(а^{х}\right)^{у}=а^{ху} \left(\frac{а}{в}\right)^{х}=\frac{а^{х}}{в^{х}}$$

Перечисленные свойства дают возможность выполнять различные задания. (можно взять задания в учебнике или подобные им)

а) построить графики функций: $ у=0,2^{х}, у=2,5^{х} и перечислить свойства этих функций$. Необходимо добиваться, чтобы ребята могли схематически изображать графики показательных функций

б) найти область значения функций: $у=5^{х}-2, ответ:\left(-2; +\infty \right)$

 у=3+$\left(\frac{1}{5}\right)^{х}, ответ:$ (3; +$\infty $)

в) сравнить числа: $2,5^{-\sqrt{2} } и 1; (2,5^{-\sqrt{2}} и 2,5^{0}$; т.к 2,5$>1, а$ -$\sqrt{2}<0, то 2,5^{-\sqrt{2}}<1$)

г) вычислить: $3^{1-2\sqrt{3}}∙9^{1+\sqrt{3}} (3^{1-2\sqrt{3}}∙\left(3^{2}\right)^{\left(1+\sqrt{3}\right)}=3^{1-2\sqrt{3}+2+2\sqrt{2}}=3^{3}$=27)

д) упростить выражение: $\frac{а^{2\sqrt{2}}-в^{2\sqrt{3}}}{\left(а^{\sqrt{2}}-в^{\sqrt{3}}\right)^{2}}+1$ =$\frac{\left(а^{\sqrt{2}}\right)^{2}-\left(в^{\sqrt{3}}\right)^{2}}{\left(а^{\sqrt{2}}-в^{\sqrt{3}}\right)^{2}}$ +1=$\frac{\left(а^{\sqrt{2}}-в^{\sqrt{3}}\right)∙\left(а^{\sqrt{2}}+в^{\sqrt{3}}\right)}{\left(а^{\sqrt{2}}-в^{\sqrt{3}}\right)^{2}}$ +1=$\frac{\left(а^{\sqrt{2}}+в^{\sqrt{3}}\right)^{}}{\left(а^{\sqrt{2}}-в^{\sqrt{3}}\right)^{}}+1=\frac{а^{\sqrt{2}}+в^{\sqrt{3}}+а^{\sqrt{2}}-в^{\sqrt{3}}}{а^{\sqrt{2}}-в^{\sqrt{3}}}=\frac{2а^{\sqrt{2}}}{а^{\sqrt{2}}-в^{\sqrt{3}}}$

е) указать, какая из данных функций является убывающей, а какая возрастающей:

$$у=\left(\frac{π}{3}\right)^{х}-возрастающая т.к а=\frac{3,14}{3}>1,$$

$$у=\left(\frac{3}{π}\right)^{х}- убывающая, т.к а=\frac{3}{3,14}<1$$

ж) решить графически уравнение:

 1. $3^{х}=4-х $

$рассматриваем две функции: у=3^{х} и у=4-х, строим их графики$ 

ответ: х=1

2. $3^{-х}=-\frac{3}{х}$

рассматриваем функции: $у=3^{-х}$ =$ \frac{1}{3^{х}}$ =$\left(\frac{1}{3}\right)^{х}$ и $у=-\frac{3}{х}$



 ответ: х = -1

з) устно: указать область значений: $0,4^{х}; 1^{х}; 2^{х}-2$

Самостоятельная работаследующего вида:

№1. Сравнить числа: $а)2^{1,3} и \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}; б) 0,5^{\sqrt{5} } и 0,5^{5}$

№2. Вычислите: $2^{1+2\sqrt{2}}∙8^{1-\sqrt{2}}$

№3. Упростить выражение: а) $\frac{а-в}{а^{\frac{1}{2}-в^{\frac{1}{2}}}}$; б) $а^{\sqrt{2}}∙\left(\frac{1}{а}\right)^{\left(\sqrt{2}-1\right)}$

 №4. Указать какая из данных функций является возрастающей, а какая - убывающей на множестве действительных чисел: $у=0,8^{х}; у=\left(\sqrt{2}\right)^{х}$

Решение показательных уравнений

Опр: Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным. Например $а^{х}=в, а>0, а\ne 1$

такого вида уравнения можно решать и графически и на основании свойств показательной функции: а) $\left(\frac{2}{5}\right)^{х}=\left(\frac{5}{2}\right)^{4}; \left(\frac{2}{5}\right)^{х}=\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}; Ответ: х=-4$

 б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{х}∙\left(\frac{9}{8}\right)^{х}=\frac{27}{64}$

 $\frac{2^{х}}{3^{х}}∙\frac{3^{2х}}{2^{3х}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$

 $\frac{3^{х}}{2^{2х}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$

 $\left(\frac{3}{4}\right)^{х}=\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$ Ответ: х = 3

 в) $4^{х+1,5}$+$2^{х+2}$=4

 $2^{2х+3}+2^{х+2}=4$

 8$∙2^{2х}+4∙2^{х}=4$ Заменим $2^{х}=t, где t>0 тогда$

 8$ t$2+4$ t-4=0 (:4)$

 2$ t+t-1=0$

 t1= $\frac{1}{2}$ t2= $-1 посторонний корень\left(не удовл где t>0\right)$

$2^{х}=\frac{1}{2}$; $2^{х}=2^{-1}; $Ответ: х= -1.

 г) 2$∙3^{х+1}-3^{х}=15$

 $3^{х}∙\left(2∙3-1\right)=15$

 $3^{х}∙5=15$

 $3^{х}=3$; Ответ: х = 1

 д)$\left(\frac{1}{7}\right)^{2х^{2}+х-0,5}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

 $\left(\frac{1}{7}\right)^{2х^{2}+х-0,5}=7^{\frac{1}{1}}∙7^{-1}$

 $7^{-2х^{2}-х+0,5}=7^{-0,5}$

 $-2х^{2}-х+0,5=-0,5$

 2х2+х$-1=0$

 х1= 0,5; х2= - 1 Ответ: - 1; 0,5.

 Это уравнение можно рассматривать как равенство двух функций f(x)=g(x). Задача решения заключается в отыскивании всех значений аргумента х, при некоторых f(x)=g(x).

 Методы решения показательных уравнений необходимо рассматривать по степени трудности и желательно давать домашнее задание дифференцированно.

№ 469(а) (учебник Колмагорова)

 $5^{х+1}=8^{х+1} $

$5∙5^{х}=8∙8^{х}$$/:8^{х}$

 $5∙\left(\frac{5}{8}\right)^{х}=8$

$\left(\frac{5}{8}\right)^{х}=\frac{8}{5}$

$\left(\frac{5}{8}\right)^{х}=\left(\frac{5}{8}\right)^{-1}$

 х = $-1$ Ответ: $-1$

 В учебнике Колмагорова решать с №№460 - 464. Аналогичные примеры №№ 468 - 470.

 Для проверки усвоения данного материала дать самостоятельную работу; например:

Решить уравнения: Автор Бородуля

а)$ 3^{х}=81$

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{х}=\frac{1}{27}$

в) $\left(\frac{2}{5}\right)^{х+2}=\left(\frac{5}{2}\right)^{3х-4}$

г) $2^{х^{2}-5х+6}=2$

д) 100у-11$∙$10у+10=0

е) $\sqrt{5^{х}}=125$

Системы показательных уравнений.

 С моей точки зрения рациональнее пройти уравнения и системы уравнений, а затем перейти к изучению неравенств показательной функции. Так лучше запоминаются свойства этой функции.

Опр: Системой показательных уравнений называется совокупность показательных уравнений.

 Здесь так же рассматриваются различные методы решения систем:

№ 471 (а) (учебник Колмагорова)

$$\left\{\begin{array}{c}5^{х+у}=125\\4^{\left(х-у\right)^{2}-1}=1\end{array}\right.$$

 $\left\{\begin{array}{c}5^{х+у}=5^{3}\\\frac{1}{4}∙4^{\left(х-у\right)^{2}}=4^{0}\end{array}\right.$ или $\left\{\begin{array}{c}5^{х+у}=5^{3}\\4^{\left(х-у\right)^{2}-1}=4^{0}\end{array}\right.$

 $\left\{\begin{array}{c}х+у=3\\\left(х-у\right)^{2}-1=0\end{array}\right.$

 $\left\{\begin{array}{c}х+у=3\\\left|х-у\right|=1\end{array}\right.$ отсюда решаем две системы

а) $\left\{\begin{array}{c}х+у=3\\-х+у=1\end{array}\right.$ решая получаем х=1; у=2 т.е (1; 2)

б) $\left\{\begin{array}{c}х+у=3\\х-у=1\end{array}\right.$ решая получаем х= 2; у=1 т.е (2; 1)

Ответ: (1;2); (2; 1)

Следующее задание из учебника Крамара стр 327

 $\left\{\begin{array}{c}2^{х}∙3^{у}=24\\2^{у}∙3^{х}=54\end{array}\right.$ запишем систему в следующем виде:

 $\left\{\begin{array}{c}2^{х}∙3^{у}=2^{3}∙3\\2^{у}∙3^{х}=2∙3^{3}\end{array}\right.$

1) перемножив обе части уравнения получаем:

 $2^{х+у}∙3^{х+у}=2^{4}∙3^{4} $

 $6^{х+у}=6^{4}$

 х+у=4

2) разделив обе части уравнений, получаем:

 $2^{х-у}∙3^{у-х}=2^{2}∙3^{-2}$

 $\left(\frac{2}{3}\right)^{х-у}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$

 х - у = 2 решим систему:

3) $\left\{\begin{array}{c}х+у=4\\х-у=2\end{array}\right.$ решив данную систему получаем х = 3; у = 1

Ответ: (3; 1)

Следующим см. учебник Колмагорова № 471 (в)

 $\left\{\begin{array}{c}3^{х}+3^{у}=12\\6^{х+у}=216\end{array}\right.$

 $\left\{\begin{array}{c}3^{х}+3^{у}=12\\6^{х+у}=6^{3}\end{array}\right.$

 $\left\{\begin{array}{c}3^{х}+3^{у}=12\\х+у=3\end{array}\right.$ из второго уравнения выражаем х:

 х= 3 - у , подставим его в первое уравнение, получаем:

 $3^{3-у}+3^{у}=12$, пусть 3у= t, где t>0, тогда

 27t-1+t = 12 умножим данное уравнение на t,

 27 + t2 - 12t = 0

 t2 - 12t + 27 = 0 отсюда t1= 3 t2 = 3 имеем два уравнения

 1) 3у = 9 и 2) 3у=3

 у1=2 у2=1 найдем х из х = 3 - у

 х1=1 х2= 2

Ответ: (1; 2); (2; 1)

 Для закрепления решения систем и прочного усвоения решаем из учебника №471(б; г); № 465

 На уроках необходимо ставить контрольные вопросы:

1) Какая функция называется показательной?

2) Что является областью определения и множеством значения показательной функции?

3) Перечислите свойства функции при а>1; при 0<a<1

4) Почему функция у = 3х является возрастающей?

5) Почему функция у = 2 -х является убывающей?

6) Сделать эскизы графиков функций: $у=\left(\frac{2}{3}\right)^{х}; у=1,5^{х}$ Каково их взаимное расположение?

7) На уроках для устной работы использовать готовые графики по которым находить значения у при данных х равных: - 2; 1,5; 0; - 1; и наоборот.

 Дальше дать контрольную работу.

Литература: 1) дидактический материал. Авторы: Ивлев, Саакян, Шварцбурд

 2) Крамар "Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал

 анализа" стр 319-стр328

Берем один из вариантов:

№ 1. Построить графики функций $у=\left(\frac{1}{3}\right)^{х}; у=3^{х}$

 При х = - 1,5; х = 4, найти значения у

 при у = 1,5; у = 5 найти значения х

№ 2. Решить уравнения:

 а) $3^{6-х}=3^{3х-2}$ б) $\left(\frac{1}{9}\right)^{х}=\frac{1}{27}$

 в) $27^{-1}∙3^{2х}=81$ г) $2∙3^{х}+3^{х-2}=57$

№ 3. Решить систему уравнений:

 $\left\{\begin{array}{c}х+у=6\\у^{х^{2}-7х+12}=1\end{array}\right.$

№ 4. Дополнительно:

 $\left\{\begin{array}{c}3^{2х-1}∙27^{х+у}=3\\\left(5х-у\right)^{2}=36\end{array}\right.$

Показательные неравенства.

Опр: Неравенство, содержащее переменную в показателе, называется показательным

 Решение показательных неравенств основано на том, что функция у = ах при а>1 является монотонно возрастающей, а при 0<a<1 монотонно убывающей. Решение показательных неравенств основано на следующих утверждениях:

1) $\left\{\begin{array}{c}а^{f(x)}>a^{g(x)}\\a>1\end{array}\right.$ => $\left\{\begin{array}{c}f(x)>g(x)\\a>1\end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{c}а^{f(x)}>a^{g(x)}\\0<a<1\end{array}\right.$ => $\left\{\begin{array}{c}f(x)<g(x)\\0<a<1\end{array}\right.$

 Решение нестрогих показатедьных неравенств отличается от решения соответствующих строгих неравенств лишь включением в множество всех решений неравенства также и корней соответствующего уравнения.

 Неравенство вида $a^{f(x)}\geq b$, где a>0, a$\ne 1, b>0$, может быть решено путем логарифмирования обоих его частей (т.к. обе части неравенства положительные)/

 При всех b$\leq 0$ неравенство подобного вида справедливо для любого х из области допустимых значений неравенства f(x).

 Неравенство $a^{f(x)}\leq b, при b\leq 0. a>0, a\ne 1$ решений не имеет.

Рассмотрим методы решения показательных неравенств:

а)$ 3^{х}<\frac{1}{9}$

 $3^{х}<3^{-2}$ т.к. 3>1,то

 х< $-2$

Ответ: х$\in $($-\infty ; -2)$

б) $\left(0,25\right)^{6х-х^{2}}>0,25^{5}$ т.к. 0<0,25<1, то

 6х - х2<5

 х2 - 6х+5>0

 (х -5)(х-1)>0

решая неравенство методом интервалов, получаем

 + - + Ответ: х$\in (-\infty ;1)∪$ (5; +$\infty $)

 1 5

в) 4х - 6$∙2^{х}+8<0$

 Пусть 2х = у, где у>0, тогда

 у2 - 6у + 8 = 0 решая находим (у1=2; у2=4)

 $2<у<4$, но у = 2х, поэтому

 $2<2^{х}<4$

 $2^{1}<2^{х}<2^{2}$, откуда т.к 2>1,

 $1<х<2$

Ответ: (1; 2)

№ 474(б) учебник Колмагорова

 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2х-1}-10∙3^{-х}+3<0$

 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2х}∙\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-10∙\left(\frac{1}{3}\right)^{х}+3<0,$

 $3∙\left(\frac{1}{3}\right)^{2х}-10∙\left(\frac{1}{3}\right)^{х}+3<0,$ пусть $\left(\frac{1}{3}\right)^{х}=у, где у>0, тогда$

 $3у^{2}-10у+3<0$, f(x)=$3у^{2}-10у+3$

 $3у^{2}-10у+3$=0, у1 = 3; у2 = $\frac{1}{3}$

 $\frac{1}{3}$ 3 у

 $\frac{1}{3}<у<3,$

 $\frac{1}{3}<\left(\frac{1}{3}\right)^{х}<3$

 $\left(\frac{1}{3}\right)^{1}<\left(\frac{1}{3}\right)^{х}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, т. к.$\frac{1}{3}<1, то$

 $-1<х<1.$

 Ответ: (- 1; 1)

№ 474(г)

 $\left(\frac{1}{36}\right)^{х}-5∙6^{-х}-6\leq 0$

 $\left(\frac{1}{6}\right)^{2х}-5∙\left(\frac{1}{6}\right)^{х}-6\leq 0$ Пусть $\left(\frac{1}{6}\right)^{х}=у, где у>0, тогда$

 $у^{2}-5у-6\leq 0$ f(у)=$ у^{2}-5у-6$

 $у^{2}-5у-6=0$

 у1 = - 1 не удовлетворяет; у2 = 6

 $\left(\frac{1}{6}\right)^{х}=6; х=-1$

 + -1 х Ответ: $\left[-1; +\infty \right.)$

 По учебнику решить № 466 - 467

 № 472 - 474

 Решим графически неравенство: № 475(а) Колмагоров

 $2^{х}\leq 3-х$

 у =2х ; у = $3-х$ строим графики этих функций



Ответ: $\left(-\infty ;\right.\left.1\right]$

 Более сложные неравенства решаю на дополнительных занятиях. Системы неравенств также решаю во внеурочноевремя.

 Затем даю проверочную работу (желательно большее количество вариантов) следующего вида:

№ 1. Решить неравенства:

 а) $8^{х}<16 б) 25^{-х}>\frac{1}{5}$

 в) $0,5^{х}<\frac{1}{64 } г) 3^{6-х}\geq 3^{3х-2}$

 д) $2^{9х-х^{2}}>1 е) 2^{9х-х^{3}}<1$

 ж) $0,4^{х^{2}-х-20}>1 з) 3^{х+2}+3^{х-1}<28$

для более сильных можно дать дополнительно систему неравенств.

 Для проверки усвоения знаний заключительным уроком по теме "Показательные уравнения и неравенства" провожу зачет. В зачет входят контрольные вопросы по теории и практические задания.

Например.

1. Построить эскиз графика функции у = 6х, (у = 2х)

2. Перечислить свойства показательной функции при $а>1, и 0<а<1$

3. Почему функция у = 0,4х является убывающей?

4. Дано уравнение вида $а^{f(х)}=1 можно ли$ утверждать, f(х)=0?

5. Используя свойства показательной функции сравнить с 1: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}; π^{-\frac{2}{3}}; \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} и т.д$

6. Какие свойства показательной функции применяются при решении неравенств:

 а) $2^{х}>2^{4}; б) \left(\frac{1}{3}\right)^{х}<\left(\frac{1}{3}\right)^{5}?$

7. Дано неравенства вида $a^{f(x)}<a^{g(x)}$ можно ли утверждать, что

 а) f(x)<g(x) б) ) f(x)>g(x) ?

8. Решить графически уравнение: $2^{х}=6; 2^{х}=3^{х} и т.д.$

9. Дано уравнение вида : $a^{f\left(x\right)}=a^{k} $ В каком случае можно утверждать, что f(x)=k?

10. Почему при решении показательных уравнений полагают, что $а>0; а\ne 1?$

11. Какое заключение можно сделать о знаке числа х, если $3^{х}=0,9?$

12. Используя график функции $у=\left(\frac{1}{2}\right)^{х},$ найдите:

 а) значение у, если х= - 2; - 1; 5; 0; 1

 б) показатель степени в котрую нужно возвести число $\frac{1}{2}$, чтобы получить 4; 3; $\frac{1}{4};0;8$.

Дать в задании три вопроса и 2 - 3 примера подобных заданиям из самостоятельных работ.

 В ходе рассмотрения данной темы мы познакомили учащихся с показательной функцией, способствовали формированию навыков решения показательных уравнений, неравенств и систем показательных уравнений и неравенств.