Окорокова
Наталья Васильевна
учитель математики
МБОУ СОШ № 1

Конспект занятия элективного курса в 11 классе

Тема. *Методы решений иррациональных неравенств.*

Цели:

- организовать исследовательскую деятельность учащихся при поиске нестандартных методов решения иррациональных неравенств;
- научить применять методы решения иррациональных неравенств при решении заданий ЕГЭ и вступительных экзаменов в вузы;
- развивать логическое мышление и интуицию при выполнении заданий;
- воспитывать интерес к предмету, коллективизм и самоконтроль.

Вид занятия: практикум.

Ход занятия

I. Организационный момент. Актуализация знаний

Тема, цель, план занятия.

II. Повторение. Устное решение иррациональных неравенств.

1) $\sqrt{(x-3)^2} \ge 0, \sqrt{(x-3)^2} > 0, \sqrt{(x-3)^2} < 0, \sqrt{(x-3)^2} \le 0.$
2) $\sqrt{x-3} \ge 2, \sqrt{x-3} > 2, \sqrt{x-3} \le 2, \sqrt{x-3} < 2.$
3) $\sqrt{x^2-4} \ge -2, \sqrt{x^2-4} > -2, \sqrt{x^2-4} \le -2, \sqrt{x^2-4} < -2.$

III. Решение иррациональных неравенств.

Повторяем основные методы решения неравенств. Обсуждение подходов к решению – через фронтальную беседу, решение – по одному ученику на доске).

1. Метод решения по алгоритму.

1) $\sqrt{x^2-3x-18} < 4-x$

Алгоритм: $\sqrt{f(x)} \le \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) \ge 0, \\ f(x) \ge 0, \\ f(x) \le \varphi^2(x). \end{cases}$ *Ответ* $(-\infty;-3]$.

2) $\sqrt{x-2} \ge x-4$

Алгоритм: $\sqrt{f(x)} \ge \varphi(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) \ge 0, \\ f(x) \ge \varphi^2(x). \end{cases} \end{array} \right.$ *Ответ. [2;6).*

3) $\sqrt{x^2+2x-3} > \sqrt{x-3}$

Алгоритм: $\sqrt{f(x)} > \sqrt{\varphi(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x), \\ \varphi(x) \geq 0. \end{cases}$ *Ответ. [3;+∞).*

2. Метод оценки.

1. *Метод состоит в том, что оцениваются границы, в которых могут лежать значения выражений в каждой из частей неравенства.*

$\cos x \geq y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1}$

Решение. В неравенстве присутствуют функции разного вида. Справа сумма квадратичной функции и квадратного корня, а в левой части тригонометрическая функция. Правая часть имеет смысл при $y - x^2 - 1 \geq 0$, то есть $y > x^2 + 1$, а $x^2 + 1 \geq 1$ следовательно $y \geq 1$, то есть $y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1} \geq 1$, но $|\cos x| \geq 1$, при всех действительных значениях x выполняется неравенство $\cos x \leq y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1}$, поэтому неравенство наше может быть выполнено только если $\cos x = y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1} = 1$, то есть это выполняется при x = 0, y = 1.

Ответ: (0; 1)

2. *Самостоятельное решение неравенств с проверкой (по 4 человека у доски одновременно):*

а) $\cos x \leq \sqrt{x} + 1$.

Ответ: (0; +∞)

б) $\cos x - \sqrt{z^3} \geq y^2 + \frac{\pi}{3}$.

Ответ: решений нет.

3. Метод интервалов

Решим неравенство: а) $\frac{\sqrt{x-2} - 2}{x} < 0$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x}$. Область определения $[2;+\infty)$, нуль функции 6. Функция на промежутках $[2;6); (6;+\infty)$ определена, непрерывна и не обращается в нуль, поэтому сохраняет постоянный знак. Определим знак значение функции в каждом из интервалов: *f(3)<0,* f*(11) >0*. Значит, решением неравенства является промежуток [2;6).

Ответ: [2;6)

Это же неравенство можно решить более простым способом.

Решение: ОДЗ: x – $2 \geq 0$, x ≥ 2

В области определения x может принимать положительные значения, значит $\begin{cases} x \geq 2, \\ \sqrt{x-2} - 2 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ \sqrt{x-2} < 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x - 2 < 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2, \\ x < 6; \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2 \leq x < 6.$

Ответ: [2;6)

б) $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{5-x} \geq 0$

Решение. Учитывая, что $\sqrt{x^2-16} \geq 0$ при $x \in (-\infty;-4] \cup [4;+\infty)$, то

$$\begin{cases} x \in (-\infty;-4] \cup [4;+\infty) \\ x \in (-\infty;5) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;-4] \cup [4;5)$$

Ответ: $(-\infty;-4] \cup [4;5)$.

4. Решите неравенство, содержащее три и более корня.

1) Решить неравенство $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-5} \geq \sqrt{5-2x}$.

Решение. Обе части неравенства имеют смысл для тех и только тех значений *x*, которые удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases} 2x+1 \geq 0, \\ 2x-5 \geq 0, \\ 5-2x \geq 0. \end{cases}$

Легко видеть, что система имеет одно решение x $= \dfrac{5}{2}$. Подстановкой в неравенство убеждаемся, что x = $\dfrac{5}{2}$ является решением. *Ответ:* $\dfrac{5}{2}$.

2) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} > \sqrt{x-2}$

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x+3 > 0, \\ x+1 \geq 0, \\ x-2 \geq 0, \\ \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} > 0, \\ 2x+3-2\sqrt{(2x+3)(x+1)} + x+1 > x-2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -3/2, \\ x \geq -1, \\ x \geq 2, \\ 2x+3 > x+1, \\ 2(x+3) > 2\sqrt{(2x+3)(x+1)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x > -2, \\ x+3 > \sqrt{(2x+3)(x+1)}; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x^2+6x+9 > (2x+3)(x+1); \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x^2-x-6 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ x \in (-2;3) \end{cases} \; x \in [2;3)$$

Ответ: [2;3).

IV. Практическая работа.

Работа в 6 группах по 4 человека. У каждой группы - инструкции по выполнению исследовательской работы (каждые 3 группы имеют одинаковые задания, что позволяет провести сравнительный отчёт по их выполнению на качественном уровне).

Задание группам 1, 3, 5.

Решите неравенство $x + 2a - 2\sqrt{3ax + a^2} > 0$.

1) Решите неравенство при *a=4*.

2) Замените неравенство равносильной совокупностью неравенств, не содержащих неизвестное под радикалом.
3) Решите каждое неравенство системы.
4) Запишите решения исходного неравенства при всех a.

Решение: $2\cdot\sqrt{3ax+a^2}<x+2a \Leftrightarrow \begin{cases} 3ax+a^2\geq 0 \\ x+2a\geq 0 \\ 4(3ax+a^2)<(x+2a)^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} a>0 \\ x\geq -\dfrac{a}{3} \\ x\geq -2a \\ x^2-8ax>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a=0 \\ x\geq 0 \\ x^2>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a<0 \\ x\leq -\dfrac{a}{3} \\ x\geq -2a \\ 4(3ax+a^2)<(x+2a)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a<0 \\ x\geq -\dfrac{a}{3} \\ x<0; x>8a \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a=0 \\ x>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a<0 \\ \text{нет.решений} \end{cases}$$

Ответ: при a<0 нет решений; при a=0 x>0; при a>0 $-\dfrac{a}{3}\leq x<0, x>8a$.

Задание группам 2, 4, 6.

При каждом значении параметра a найдите все решения неравенства $x+2a-2\sqrt{3ax+a^2}<0$.

1) Решите неравенство при *a=-4*.
2) Замените неравенство равносильной совокупностью неравенств, не содержащих неизвестное под радикалом.
3) Решите каждое неравенство системы.
4) Запишите решения исходного неравенства при всех a.

Отчёт групп о выполнении заданий.

V. Домашнее задание

Решите неравенства:

1) $\dfrac{\sqrt{x^2+6x-7}}{x^2+2x-15}\leq 0$, 2) $2^y-2\cos x+\sqrt{y-x^2-1}\leq 0$, 3) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}>0$,

4) $\dfrac{\sqrt{x^6-64}}{x-3}\geq 0$, 5) $\dfrac{(x-2)(x-4)}{\sqrt{x^2+x+1}}>0$.

VI. Подведение итогов занятия.