ГБОУ СОШ №47

Некоторые примеры решений уравнений с параметром в 8 классе.

Учитель математики Стародубцева Т.Н.

г.Владикавказ

ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНМЯ С ПАРАМЕТРАМИ.

Что значит решить уравнение с параметром?

Решим задачу « В 7-ом, в 8-ом и в 9-ом классе учатся 105 учеников. В 8-ом классе учащихся на p больше, чем в 7-ом, а в 9-ом на p меньше, чем в 7-ом. Сколько учащихся в каждом классе, если известно, что в каждом классе их не меньше 30 человек».

Обозначим за x - число учащихся в 7-ом классе, тогда в 8-ом $(x+p)$. В9-ом (х-3). Составим уравнение $x+(x+p)+(x-3)=105.$

$$3x = 108 – р.$$

В этом уравнении буквой x обозначено неизвестное число, а буква p выполняет роль известного числа (p – натуральное число). Букву p в полученном уравнении называют

ПАРАМЕТРОМ, а само уравнение – УРАВНЕНИЕМ С ПАРАМЕТРОМ.

Выразим x через p , получим:

$$x=\frac{108-p}{3},$$

$$x=36-\frac{p}{3}.$$

Таким образом, в 7-ос классе было $36-\frac{p}{3}$ в 8-ом – ($36+\frac{2p}{3}$) , в 9-ом – ($33-\frac{p}{3}$).

По условию в каждом классе было не менее 30 человек. Т.к. меньшее число учащихся может быть в 7-ом или 9-ом классе, тогда должны выполняться условия:

$$36-\frac{p}{3}\geq 30 \quad \text{и} \quad 33-\frac{p}{3}\geq 30.$$

$p \le 18$ и $p \le 9.$

.

Следовательно, $p \le 9$.Число p должно быть кратно трем, т.е. p =3;6;9. Таким образом, можно записать ответ.

Ответ: в 7-ом классе было $36-\frac{p}{3}$ учащихся; 35;34; 32.

В 8-ом классе было $36+\frac{2p}{3}$ учащихся; 38;40;31.

В 9-ом классе было $33-\frac{p}{3}$ учащихся; 32;31;30.

С понятием параметра мы уже встречались, изучая линейные и квадратные уравнения. Так, в квадратном уравнении $ax^2+вx+c=o$ его коэффициенты $a,в,c$ являются параметрами, в уравнении $y = кx+в$, которое задает линейную функцию, параметрами $к$ и в также служат его коэффициенты.

Рассмотрим уравнение $в(в-1)x=в^2+в-2$ в котором буквой x обозначают неизвестное число, а буква в выполняет роль неизвестного фиксированного числа. Это уравнение – линейное с параметром в. Придадим «в» различные значения. Например:

При $в$ = 2, получим 2x=4.

При в = - 0,5, получим 0,75 x = - 2,25.

При в = 1, получим 0 $\cdot x$ = 0

При в = 0, получим 0 $\cdot x$ = - 2.

1) уравнение имеет единственное решение.
2) Уравнение имеет единственное решение.
3) Уравнение имеет бесконечное множество решений.
4) Уравнение не имеет решений.

Итак, решая уравнение $в(в-1)x=в^2+в-2$, мы должны рассмотреть случаи:

1) когда $в(в-1)\neq 0$ $в\neq 0, в\neq 1$, $x=\frac{в+2}{в}$ - единственный корень.

2)когда $в(в-1)=0$ и $в^2+в-2\neq 0$ нет корней.

3)когда $в(в-1)=0$ и $в^2+в-2=0$ бесконечное множество корней.

Таким образом, для уравнения $в(в-1)x=в^2+в-2$ мы выявили различные значения параметра $в$, для каждого из которых определено соответствующее множество корней.

Решить уравнение с параметром $в$ - это значит установить соответствие, с помощью которого для каждого значения параметра $в$

Указывается множество корней соответствующего уравнения.

Примеры: 1) При каких значениях параметра a уравнение $ax^2-x+3=0$ имеет единственное решение?

Решение.

Это уравнение не квадратное, а уравнение степени не выше второй. Рассмотрим следующие случаи: 1) $a=0$, тогда $-x+3=0$. $x=3$ решение единственное

2) $a\neq 0$, тогда $ax^2-x+3=0$ квадратное уравнение D=$1-12a$.

Чтобы уравнение имело единственное решение , необходимо, чтобы D=0, следовательно $a=\frac{1}{12.}$

Ответ: при $a=0$ или $a=\frac{1}{12}$ уравнение имеет единственное решение.

Пример2. При каких значениях параметра a уравнение $(a-2)x^2+(4-a)x+3=0$

Имеет единственное решение?

Решение.

1)При $a=2$ имеем $3=0$ - ложно, т. е. уравнение не имеет решения.

2) при $a \neq 2$ уравнение является квадратным.

$$x^2 - 2x + \frac{3}{a-2} = 0$$

$$D = 1 - \frac{3}{a-2}$$

$$D = \frac{a-5}{a-2}, \quad D=0,\ a = 5.$$

Ответ: при $a = 5$

Уравнение имеет единственное решение.

Пример3. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$ имеет более одного корня?

Решение.

1) при $a = 0,\ -4x = -3,\ \ x = \frac{3}{4}$ - единственный корень.
2) При $a \neq 0$ исходное уравнение будет квадратным, оно имеет два корня, если D$\rhd 0$, т.е. D$=4 - (a+3)a = 4 - a^2 - 3a = 4 - a^2 - 3a$

   $-a^2 - 3a + 4 \rhd 0$

   $a^2 + 3a - 4 \lhd 0$,

   $(a-1)(a+4) \lhd 0$,

   $a \in (-4;1)$

Так как при $a = 0$ имеем единственный корень, то $a \in (-4;0) \cup (0;1)$.

Ответ: уравнение имеет более одного корня при $a \in (-4;1) \cup (0;1)$.

Пример 4. При каких значениях параметра a уравнения $x^2 - a = 0$ и $\sqrt{x - a = 0}$ равносильны?

Решение.

При $a = 0, x^2 = 0$ и $\sqrt{x = 0.}$

$x = 0$ и $x = 0.$ Решения совпадают.

При $a \succ 0$ $x^2 = a$ (два корня)

$\sqrt{x = a}$ (один корень) Равносильности нет.

При $a \prec 0$ $x^2 = a$ (корней нет)

$\sqrt{x = a}$ (корней нет). Уравнения равносильны.

Ответ: при $a \leq 0$ уравнения равносильны

Решите самостоятельно: 1) При каких значениях параметра $в$ уравнение $в(в - 3)x = 10(2в + x)$ не имеет корней?

Ответ: при $в = 5$ и $в = - 2.$

2) При каких значениях параметра n

Уравнение $(n^2 - 4)[= n^3 - 2n^2$-n+2

а) имеет единственный корень;

б) имеет бесконечное множество корней;

в) не имеет корней.

Ответ: при а) при $n \neq 2$; при $n \neq 2$ учим 0xX=0