Семенова Анна Васильевна –

учитель математики

МБОУ Хоринской СОШ им. Г.Н.Чиряева

Верхневилюйского района

Республики Саха (Якутия)

**Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях**

Тригонометрия традиционно относится к наиболее трудному для школьников материалу. Главной причиной этой трудности является большое количество формул и различных фактов, которые школьники должны не только помнить наизусть, но и уметь гибко и широко варьировать их применимость. Проблема отбора корней, отсеивания лишних корней при решении тригонометрических уравнений специфична.

При отборе корней в процессе решения тригонометрических уравнений обычно используют один из следующих способов.

**Арифметический способ.** Перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней приходиться в случаях, когда требуется отобрать корни, принадлежащие заданному промежутку или некоторому условию.

**Алгебраический способ** отбора корней наиболее удобен в тех случаях, когда последовательный перебор значений параметров приводит к вычислительным трудностям, промежуток для отбора корней большой, значения обратных тригонометрических функций, входящих в серии решений, не являются табличными. Для этого решают неравенство относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисления корней.

**Геометрический способ.** В последние годы в учебниках используются разные модели к иллюстрации решения простейших тригонометрических уравнений с применением тригонометрического круга, графика тригонометрической функции или числовой прямой.

а) Тригонометрическую окружность удобно использовать при отборе корней на промежутке, длина которого не превосходит 2, или в случае, когда значения обратных тригонометрических функций, входящих в серию решений, не являются табличными.

б) При изображении решении простейших тригонометрических уравнений иногда используют графики простейших тригонометрических функций. Для нахождения решения тригонометрического уравнения при этом подходе требуется построение «кусочка» графика.

в) Числовую прямую удобно использовать при отборе корней на промежутке, длина которого превосходит 2.

Процессе обучения решению задач, в которых требуется отобрать корни тригонометрического уравнения, следует обсудить разные способы выполнения этого действия, а также выяснить случаи, когда тот или иной способ может оказать наиболее удобным или наоборот непригодным.

**Примеры решения задач**

Предлагаем на конкретных примерах рассматривать различные способы и приемы отбора корней на отрезках.

**Пример 1.**

а) Решите уравнение

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку **.**

**Решение.**

а) Применяя формулу приведения , запишем уравнение в виде

Вынося общий множитель *sinx*за скобки, получаем

Отсюда или

Из уравнения

Из уравнения

б) Отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку

**1. Арифметический способ.**

Пусть . Подставляя *n=…*  , получаем . Отрезку принадлежат корни: , .

Пусть . Подставляя *k=…*  получаем . Отрезку принадлежит только

Пус Подставляя =…  получаем . Полученные значения отрезку непринадлежат.

Отрезку принадлежат корни: .

**2. Алгебраический способ.**

Отберем корни, принадлежащие отрезку **.** Решаем двойное неравенство.

Пусть .

Тогда

Пусть

Тогда

Пусть

Тогда

Последнее неравенство не имеет целочисленных решений.

Отрезку принадлежат корни: .

**3. Геометрический способ**

1. В данном примере отбор корней на тригонометрическом круге не рассматривается, так как длина промежутка превосходит
2. Корни, принадлежащие отрезку , отберем по графику у = sinx. Прямая y=0 (ось ) пересекает график в точках и , абсцисса которых принадлежит отрезку .

Прямая пересекает график в единственной точке, абсцисса которой принадлежит (см. рис.). Так как период функции y=sinx равен , то эта абсцисса равна .

у

0

Х

В отрезке содержится три корня: .

1. Рассмотрим отбор корней с помощью координатной прямой.

y=sinx *////////////////////////////////////////////////*

**ответ:** а) ,

б).

**Пример 2.**

*а)* Решите уравнение

*б)* Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку .

**Решение.**

а) Вынося общий множитель *sinx*за скобки, получаем

Отсюда или

Из уравнения

Из уравнения находим:

Отметим, что решение уравнения

б) Рассмотрим отбор корней на отрезке **.**

**1. Арифметический способ**

Пусть . Подставляя *n=…*  , получаем . Отрезку принадлежит корень .

Пусть .Подставляя *k=…*  получаем . Отрезку принадлежит только .

Пусть .Подставляя *k =…*  получаем . Отрезку принадлежит только .

Отрезку принадлежат корни: .

**2. Алгебраический способ**

Отберем корни, принадлежащие отрезку . Решаем двойное неравенство.

Пусть .

Тогда

Пусть

Тогда

.

Пусть

Тогда

Отрезку принадлежат корни:

1. **Геометрический способ**
2. Корни уравнения изображается точкой *А*, а корни уравнения - точками *В* и *С*, отрезок изображен жирной дугой (см. рис.). В указанном отрезке содержаться три корня уравнения .

у

х

1. Корни, принадлежащие отрезку , отберем по графику у=sinx. Прямая y=0 (ось ) пересекает график в точке , абсцисса которой принадлежит отрезку , равна

у

0

Х

Корни, принадлежащие отрезку , отберем по графику у=сosx. Прямая y= пересекает график в двух точках, абсцисса которых принадлежат отрезку , Так как период функции равен , то эти абсциссы равны и .

у

Х

В отрезке содержится три корня: .

1. Рассмотрим отбор корней с помощью координатной прямой.

у=sinx////////////////////////////////////////

у=сosx **/////////////////////////////////////**

**Ответ.**

б) .

**Пример 3.**

*а)* Решите уравнение .

*б)* Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку .

**Решение.**

*а)* Решая квадратное уравнение относительно sin, находим, что или

Уравнение так как

Уравнение

Отметим, что решение уравнения можно записать в виде

б) Рассмотрим отбор корней на отрезке

**1. Арифметический способ.**

Пусть . Подставляя *n=…*, получаем . Отрезку принадлежит корень .

Пусть . Подставляя *n=…*  , получаем . Отрезку принадлежит корень .

Отрезку принадлежат корни:

**2. Алгебраический cпособ.**

Отберем корни, принадлежащие отрезку . Решаем двойное неравенство.

Пусть

Тогда

Пусть  *.*

Тогда

Отрезку принадлежат корни:

**3. Геометрический способ.**

1.В данном примере отбор корней на тригонометрическом круге не рассматривается, так как длина промежутка превосходит

2. Корни, принадлежащие отрезку , отберем по графику у=sinx. Прямая пересекает график в двух точках, абсциссы которых принадлежат отрезку . Так как период функции y=sinx равен , то эти абсциссы равны , .

у

х

Отрезку принадлежат корни:

3.Рассмотрим отбор корней с помощью координатной прямой.

у= /////////////////////

Отрезку принадлежат корни:

**Ответ.** а)

б)

**Пример 4.**

*а)* Решите уравнение

*б)* Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

**Решение.**

а) Используя формулу для синуса двойного аргумента, запишем уравнение в виде

Вынося общий множитель за скобки, получаем

или

Из уравнения находим: , откуда

Из уравнения находим откуда

б) Отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку

**1. Арифметический способ.**

Пусть . Подставляя *k=…*  , получаем . Отрезку принадлежит корень .

Пусть . Подставляя *m=…*  , получаем . Отрезку принадлежит корень Пусть . Подставляя *n=…*  , получаем . Отрезку принадлежат два корня: ,.

Отрезку принадлежат корни .

**2. Алгебраический способ.**

Отберем корни, принадлежащие отрезку .

Пусть .

Тогда

.

Пусть

Тогда

.

Пусть

Тогда

.

Отрезку принадлежат корни .

**3. Геометрический способ.**

1*.* Корни уравнения изображаются точками *А* и *В*, а корни уравнения - точками *C* и *D,* отрезок изображен жирной дугой (см. рис.). В указанном отрезке содержаться четыре корня уравнения:

**у**

**D** 1

х

**А В**

**С**

2.Корни, принадлежащие отрезку , отберем по графику у=sinx. Прямая пересекает график в двух точках, абсциссы которых принадлежат отрезку . Так как период функции y=sinx равен , то эти абсциссы равны , .

у

х

Корни, принадлежащие отрезку , отберем по графику у = tgx. Прямая пересекает график в двух точках, абсциссы которых принадлежат отрезку . Так как период функции y = tgx равен , то эти абсциссы равны .

у

1

0

х

Отрезку принадлежат корни

3.Рассмотрим отбор корней с помощью координатной прямой.

у = sinx ./////////////////////////

у = tgx

Отрезку принадлежат корни

Ответ. а)

б)

**Пример 5.**



*а)* Решите уравнение

*б)* Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

**Решение.**

а) Используя формулу для косинуса двойного угла и формулу приведения, запишем уравнение в виде

Решаем квадратное уравнение относительно ,

Отсюда

Уравнение так как

Из уравнения х = .

Отметим, что решение уравнения

х= или х= .

б) отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку

**1. Арифметический способ.**

Пусть . Подставляя *k =…*  , получаем

. Отрезку принадлежит корень .

Пусть . Подставляя *k =…*  , получаем . Отрезку принадлежит корень .

Отрезку принадлежат корни

**2. Алгебраический способ.**

Отберем корни, принадлежащие отрезку . Решаем двойное неравенство.

Пусть .

Тогда

.

Пусть .

Тогда

.

Отрезку принадлежат корни

**3. Геометрический способ.**

1*.* Корни уравнения изображаются точками *А* и *В*, отрезок изображен жирной дугой (см. рис.). В указанном отрезке содержаться два корня уравнения:

**у**

**А**

- 0,5

х

**В**

2.Корни, принадлежащие отрезку , отберем по графику у=. Прямая пересекает график в двух точках, абсциссы которых принадлежат отрезку , Так как период функции y = равен , то эти абсциссы равны ; .

у

-0,5

х

1. Рассмотрим отбор корней с помощью координатной прямой.

у=. //////////////// /////////////////

Отрезку принадлежат корни

**Ответ:** а) х = .

б)