**С-4 Окружность и четырехугольники.**

**C 4**Че­ты­рех­уголь­ник  опи­сан около окруж­но­сти и впи­сан в дру­гую окруж­ность. Пря­мые  и  пе­ре­се­ка­ют­ся в точке  Най­ди­те пе­ри­метр тре­уголь­ни­ка  если из­вест­но, что  и 

 **Ре­ше­ние.**

Воз­мож­ны два слу­чая  и 

 

***Пер­вый слу­чай.***

Че­ты­рех­уголь­ник опи­сан около окруж­но­сти, сле­до­ва­тель­но,  Че­ты­рех­уголь­ник впи­сан в окруж­ность, зна­чит,  но  от­ку­да сле­до­ва­тель­но,  с ко­эф­фи­ци­ен­том по­до­

бия 

Обо­зна­чим через  пе­ри­метр тре­уголь­ни­ка  тогда если  — пе­ри­метр тре­уголь­ни­ка 



По­сколь­ку  по­лу­ча­ем: 



***Вто­рой слу­чай****.*

Ана­ло­гич­но слу­чаю 1 имеем:



 Ответ:  или 

**C 4 .** Дан ромб  с диа­го­на­ля­ми  и  Про­ве­де­на окруж­ность ра­ди­у­са  с цен­тром в точке пе­ре­се­че­ния диа­го­на­лей ромба. Пря­мая, про­хо­дя­щая через вер­ши­ну  ка­са­ет­ся этой окруж­но­сти и пе­ре­се­ка­ет пря­мую  в точке  Най­ди­те 

 **Ре­ше­ние.**

Пусть точка  лежит между  и  — точка ка­са­ния пря­мой  с дан­ной окруж­но­стью,  — центр ромба.



По тео­ре­ме Пи­фа­го­ра 

Обо­зна­чим 

Из пря­мо­уголь­ных тре­уголь­ни­ков и на­хо­дим, что



При­ме­няя тео­ре­му си­ну­сов к тре­уголь­ни­ку  по­лу­чим, что 

по­это­му



Сле­до­ва­тель­но, 

Пусть те­перь точка лежит на про­дол­же­нии сто­ро­ны за точку Тогда по тео­ре­ме о внеш­нем угле тре­уголь­ни­ка





Далее, рас­суж­дая ана­ло­гич­но, по­лу­чим, что



Сле­до­ва­тель­но, 

 Ответ:  или 

**C 4 .** Че­ты­рех­уголь­ник  опи­сан около окруж­но­сти и впи­сан в окруж­ность. Пря­мые  и  пе­ре­се­ка­ют­ся в точке . Най­ди­те пло­щадь че­ты­рех­уголь­ни­ка, если из­вест­но, что  и ра­ди­у­сы окруж­но­стей, впи­сан­ных в тре­уголь­ни­ки  и  равны со­от­вет­ствен­но  и .

 **Ре­ше­ние.**

***Пер­вый слу­чай****.*

Цен­тры  и  окруж­но­стей, впи­сан­ных в тре­уголь­ни­ки  и  со­от­вет­ствен­но, лежат на бис­сек­три­се угла  Окруж­ность, впи­сан­ная в че­ты­рех­уголь­ник  яв­ля­ет­ся также окруж­но­стью, впи­сан­ной в тре­уголь­ник  и внев­пи­сан­ной окруж­но­стью тре­уголь­ни­ка  Будем ис­кать пло­щадь че­ты­рех­уголь­ни­ка  как раз­ность пло­ща­дей тре­уголь­ни­ков  и 



Че­ты­рех­уголь­ник  впи­сан в окруж­ность, сле­до­ва­тель­но,  но  от­ку­да  Так как тре­уголь­ни­ки  и  имеют еще общий угол они по­доб­ны, при­чем ко­эф­фи­ци­ент по­до­бия равен от­но­ше­нию ра­ди­у­сов окруж­но­стей, впи­сан­ных в эти тре­уголь­ни­ки.

Далее имеем:

1) 

2)  где  — по­лу­пе­ри­метр тре­уголь­ни­ка  рав­ный по свой­ству внев­пи­сан­ной окруж­но­сти длине от­рез­ка 

3) Из пря­мо­уголь­но­го тре­уголь­ни­ка  на­хо­дим  от­ку­

да 

Под­став­ляя най­ден­ное зна­че­ние  в фор­му­лу  окон­ча­тель­но по­лу­ча­ем



**Вто­рой слу­чай.**

От­ли­ча­ет­ся от пер­во­го по­ло­же­ни­ем точки  левее точек  и . В этом слу­чае  и в рас­суж­де­нии они и тре­уголь­ни­ки  и  долж­ны быть по­ме­ня­ны ме­ста­ми. Таким об­ра­зом, в этом слу­чае





Ответ:  или 

**C 4 .** Че­ты­рех­уголь­ник  опи­сан около окруж­но­сти и впи­сан в окруж­ность. Пря­мые  и  пе­ре­се­ка­ют­ся в точке . Най­ди­те пло­щадь тре­уголь­ни­ка , если из­вест­но, что  и ра­ди­у­сы окруж­но­стей, впи­сан­ных в тре­уголь­ни­ки  и  равны со­от­вет­ствен­но  и .

 **Ре­ше­ние.**

***Пер­вый слу­чай.***

Цен­тры  и  окруж­но­стей, впи­сан­ных в тре­уголь­ни­ки  и  со­от­вет­ствен­но, лежат на бис­сек­три­се угла . Окруж­ность, впи­сан­ная в че­ты­рех­уголь­ник , яв­ля­ет­ся также окруж­но­стью, впи­сан­ной в тре­уголь­ник  и внев­пи­сан­ной окруж­но­стью тре­уголь­ни­ка .



Че­ты­рех­уголь­ник  впи­сан в окруж­ность, сле­до­ва­тель­но . Но , от­ку­да . Так как тре­уголь­ни­ки  и  имеют еще общий угол , они по­доб­ны, при­чем ко­эф­фи­ци­ент по­до­бия равен от­но­ше­нию ра­ди­у­сов окруж­но­стей, впи­сан­ных в эти тре­уголь­ни­ки.

Далее имеем:

1) 

2) , где  — по­лу­пе­ри­метр тре­уголь­ни­ка  рав­ный длине от­рез­ка  как сумма от­рез­ков ка­са­тель­ных про­ве­ден­ных из одной точки.

3) из пря­мо­уголь­но­го тре­уголь­ни­ка  на­хо­дим , от­ку­да .

Под­став­ляя най­ден­ное  в фор­му­лу пло­ща­ди тре­уголь­ни­ка , окон­ча­тель­но по­лу­ча­ем

.

***Вто­рой слу­чай.***

От­ли­ча­ет­ся от пер­во­го рас­по­ло­же­ни­ем точки  левее точек  и . В этом слу­чае  и в рас­суж­де­нии они и тре­уголь­ни­ки  и  долж­ны быть по­ме­ня­ны ме­ста­ми. Таким об­ра­зом, в этом слу­чае  — мень­ший из двух тре­уголь­ни­ков, а ра­ди­ус впи­сан­ной в него окруж­но­сти . Зна­чит

 где  — по­лу­пе­ри­метр тре­уголь­ни­ка  рав­ный от­рез­ку  При этом, как и в пер­

вом слу­чае,  Таким об­ра­зом 

 Ответ:  или 

**C 4 .** Бо­ко­вые сто­ро­ны *AB* и *CD* тра­пе­ции *ABCD* равны 6 и 8 со­от­вет­ствен­но. От­ре­зок, со­еди­ня­ю­щий се­ре­ди­ны диа­го­на­лей, равен 5, сред­няя линия тра­пе­ции равна 25. Пря­мые *AB* и *CD* пе­ре­се­ка­ют­ся в точке *М*. Най­ди­те ра­ди­ус окруж­но­сти, впи­сан­ной в тре­уголь­ник *ВМС*.

**Ре­ше­ние.**

 

В любой тра­пе­ции от­ре­зок, со­еди­ня­ю­щий се­ре­ди­ны диа­го­на­лей тра­пе­ции, равен по­лу­раз­но­сти ос­но­ва­ний тра­пе­ции, а сред­няя линия — по­лу­сум­ме ос­но­ва­ний тра­пе­ции. В нашем слу­чае по­лу­раз­ность ос­но­ва­ний равна 5, а по­лу­сум­ма ос­но­ва­ний равна 25, по­это­му ос­но­ва­ния тра­пе­ции равны 20 и 30.

Пред­по­ло­жим что  . Сто­ро­ны *BС* и *АD* тре­уголь­ни­ков *МВС*и *MAD* па­рал­лель­ны, по­это­му эти тре­уголь­ни­ки по­доб­ны с ко­эф­фи­ци­ен­том  Зна­чит,

, .

За­ме­тим, что , по­это­му тре­уголь­ник *МВС* — пря­мо­уголь­ный с ги­по­те­ну­зой *BС*. Ра­ди­ус его впи­сан­ной окруж­но­сти равен: .

 

Пусть те­перь ,  (рис. 2). Ана­ло­гич­но преды­ду­ще­му слу­чаю можно по­ка­зать, что ра­ди­ус впи­сан­ной окруж­но­сти тре­уголь­ни­ка *MAD* равен 6. Тре­уголь­ник *MAD*и *МВС* по­доб­ны с ко­эф­фи­ци­ен­том   Зна­чит, ра­ди­ус впи­сан­ной окруж­но­сти тре­уголь­ни­ка *МВС* равен .

 Ответ: 4; 6.

**C 4** Бо­ко­вые сто­ро­ны *KL* и *MN* тра­пе­ции *KLMN* равны 8 и 17 со­от­вет­ствен­но. От­ре­зок, со­еди­ня­ю­щий се­ре­ди­ны диа­го­на­лей, равен 7,5, сред­няя линия тра­пе­ции равна 17,5. Пря­мые *KL* и *MN* пе­ре­се­ка­ют­ся в точке *A*. Най­ди­те ра­ди­ус окруж­но­сти, впи­сан­ной в тре­уголь­ник *ALM*.

 **Ре­ше­ние.**

 

В любой тра­пе­ции от­ре­зок, со­еди­ня­ю­щий се­ре­ди­ны диа­го­на­лей тра­пе­ции, равен по­лу­раз­но­сти ос­но­ва­ний тра­пе­ции, а сред­няя линия — по­лу­сум­ме ос­но­ва­ний тра­пе­ции. В нашем слу­чае по­лу­раз­ность ос­но­ва­ний равна 7,5, а по­лу­сум­ма ос­но­ва­ний равна 17,5, по­это­му ос­но­ва­ния тра­пе­ции равны 10 и 25.

Пред­по­ло­жим что ,  (рис. 1). Сто­ро­ны *LM* и *KN* тре­уголь­ни­ков *ALM* и *AKN* па­рал­лель­ны, по­это­му эти тре­уголь­ни­ки по­доб­ны с ко­эф­фи­ци­ен­том  Зна­чит,

, .

За­ме­тим, что , по­это­му тре­уголь­ник *ALM* — пря­мо­уголь­ный с ги­по­те­ну­зой *AM*. (По­это­му тра­пе­ция пря­мо­уголь­ная, как и изоб­ра­же­но на ри­сун­ке.) Ра­ди­ус впи­сан­ной в тре­уголь­

ник *ALM* окруж­но­сти равен .

 

Пусть те­перь  (рис. 2). Ана­ло­гич­но преды­ду­ще­му слу­чаю можно по­ка­зать, что ра­ди­ус впи­сан­ной окруж­но­сти тре­уголь­ни­ка *AKN* равен 5. Тре­уголь­ник *AKN* и *ALM* по­доб­ны с ко­эф­фи­ци­ен­том  Зна­чит, ра­ди­ус впи­сан­ной окруж­но­сти тре­уголь­ни­ка *ALM* равен .

 Ответ: 2; 5.

**C 4 .** Дан пря­мо­уголь­ник *KLMN* со сто­ро­на­ми: *KN* = 13, *MN* = *6*. Пря­мая, про­хо­дя­щая через вер­ши­ну *М*, ка­са­ет­ся окруж­но­сти с цен­тром *К* ра­ди­у­са 3 и пе­ре­се­ка­ет­ся с пря­мой *KN* в точке *Q*. Най­ди­те *QK*.

 **Ре­ше­ние.**

Пусть точка  лежит между  и  (рис.1),  - точка ка­са­ния пря­мой  с дан­ной окруж­но­стью. Обо­зна­чим .



Из пря­мо­уголь­но­го тре­уголь­ни­ка  по тео­ре­ме Пи­фа­го­ра на­хо­дим



.

Пря­мо­уголь­ные тре­уголь­ни­ки  и  по­доб­ны, по­это­му , от­ку­да .

, , .

Если точка  лежит на про­дол­же­нии сто­ро­ны  за точку  (рис.2), то, рас­суж­дая ана­ло­гич­но,

по­лу­чим урав­не­ние, из ко­то­ро­го .

 Ответ:  или .

**C 4 .** Дан пря­мо­уголь­ник *KLMN* со сто­ро­на­ми: *KN* = 11, *MN* = 8. Пря­мая, про­хо­дя­щая через вер­ши­ну *М*, ка­са­ет­ся окруж­но­сти с цен­тром *К* ра­ди­у­са 4 и пе­ре­се­ка­ет­ся с пря­мой *KN* в точке *Q*. Най­ди­те *QK*.

 **Ре­ше­ние.**

Пусть точка  лежит между  и  (рис.1),  - точка ка­са­ния пря­мой  с дан­ной окруж­но­стью. Обо­зна­чим .



Из пря­мо­уголь­но­го тре­уголь­ни­ка  по тео­ре­ме Пи­фа­го­ра на­хо­дим



.

Пря­мо­уголь­ные тре­уголь­ни­ки  и  по­доб­ны, по­это­му , от­ку­да .

, , .

Если точка  лежит на про­дол­же­нии сто­ро­ны  за точку  (рис.2), то, рас­суж­дая ана­ло­гич­но, по­лу­чим урав­не­ние, из ко­то­ро­го .

 Ответ:  или .