**С-4. Окружность и треугольники.**

**C 4** В тре­уголь­ни­ке  Точка *D* лежит на пря­мой *BC* при­чем . Окруж­но­сти, впи­сан­ные в каж­дый из тре­уголь­ни­ков *ADC* и *ADB* ка­са­ют­ся сто­ро­ны *AD* в точ­ках *E* и*F*. Най­ди­те длину от­рез­ка *EF*.

 **Ре­ше­ние.**

Пусть , , . Ис­поль­зуя свой­ства ка­са­тель­ных, под­счи­та­ем раз­ны­ми спо­со­ба­ми пе­ри­мет­ры тре­уголь­ни­ков



От­ку­да по­лу­ча­ем:  Ана­ло­гич­но, 

Тогда 

Воз­мож­ны два слу­чая:

1. Точка  лежит на от­рез­ке  Тогда  зна­чит 



2. Точка *D* лежит вне от­рез­ка  Тогда  зна­чит 



Ответ:  или 

**C 4** В тре­уголь­ни­ке  Точка  лежит на пря­мой  при­чем  Окруж­но­сти, впи­сан­ные в тре­уголь­ни­ки  и  ка­са­ют­ся сто­ро­ны  в точ­ках  и  Най­ди­те длину от­рез­ка 

 **Ре­ше­ние.**

Пусть  Ис­поль­зуя свой­ства ка­са­тель­ных, под­счи­та­ем раз­ны­ми спо­со­ба­ми пе­ри­мет­ры тре­уголь­ни­ков



От­ку­да по­лу­ча­ем:  Ана­ло­гич­но, 

Тогда 

Воз­мож­ны два слу­чая:

1. Точка  лежит на от­рез­ке  Тогда  зна­чит, 



2. Точка  лежит вне от­рез­ка  Тогда  зна­чит, 



Ответ: 4,5 или 6.

**C-4.**  Вы­со­та рав­но­бед­рен­но­го тре­уголь­ни­ка, опу­щен­ная на ос­но­ва­ние, равна 9, а ра­ди­ус впи­сан­ной в тре­уголь­ник окруж­но­сти равен 4. Най­ди­те ра­ди­ус окруж­но­сти, ка­са­ю­щей­ся сто­ро­ны тре­уголь­ни­ка и про­дол­же­нии двух его сто­рон.

 **Ре­ше­ние.**

Пусть  — вы­со­та рав­но­бед­рен­но­го тре­уголь­ни­ка  опу­щен­ная на его ос­но­ва­ние  — центр впи­сан­ной окруж­но­сти,  — точка ее ка­са­ния с бо­ко­вой сто­ро­ной 

Тогда



Обо­зна­чим  Из пря­мо­уголь­но­го тре­уголь­ни­ка на­хо­дим, что 

Тогда 

Пусть окруж­ность с цен­тром  и ра­ди­у­сом  ка­са­ет­ся про­дол­же­ния бо­ко­вых сто­рон  и  в точ­ках  и  со­от­вет­ствен­но, а также ос­но­ва­ния  Тогда  — точка ка­са­ния, по­это­му



Сле­до­ва­тель­но, 



Пусть те­перь окруж­ность с цен­тром  ра­ди­у­са  ка­са­ет­ся бо­ко­вой сто­ро­ны  про­дол­же­ния ос­но­ва­ния  в точке  и про­дол­же­ния бо­ко­вой сто­ро­ны  в точке  Центр окруж­но­сти, впи­сан­ной в угол, лежит на его бис­сек­три­се, по­это­му  и  — бис­сек­три­сы смеж­ных углов  и  зна­чит, . Тогда  — пря­мо­уголь­ник. Сле­до­ва­тель­но, . Ра­ди­ус окруж­но­сти, ка­са­ю­щей­ся бо­ко­вой сто­ро­ны  и про­дол­же­ний ос­но­ва­ния  и бо­ко­вой сто­ро­ны  также равен 9.



 Ответ: 9 или 36.

**C 4** Пря­мая, пер­пен­ди­ку­ляр­ная бо­ко­вой сто­ро­не рав­но­бед­рен­но­го тре­уголь­ни­ка, от­се­ка­ет от него четырёхуголь­ник, в ко­то­рый можно впи­сать окруж­ность. Най­ди­те ра­ди­ус окруж­но­сти, если от­ре­зок пря­мой, за­ключённый внут­ри тре­уголь­ни­ка, равен , а от­но­ше­ние бо­ко­вой сто­ро­ны тре­уголь­ни­ка к его ос­но­ва­нию равно .

 **Ре­ше­ние.**

Обо­зна­чим дан­ный тре­уголь­ник ,  — ос­но­ва­ние, . За­ме­тим, что окруж­ность, о ко­то­рой го­во­рит­ся в усло­вии, — окруж­ность, впи­сан­ная в тре­уголь­ник  Пусть  — её центр, а  — точка ка­са­ния с ос­но­ва­ни­ем 

Обо­зна­чим 

Так как  — бис­сек­три­са тре­уголь­ни­ка , то  сле­до­ва­тель­но, 



*Пер­вый слу­чай.* Пусть пря­мая  пер­пен­ди­ку­ляр­ная  ка­са­ет­ся окруж­но­сти, пе­ре­се­ка­ет  в точке , а  в точке  (рис. 1). Тогда ,



В тре­уголь­ни­ке  имеем 

У опи­сан­но­го че­ты­рех­уголь­ни­ка суммы про­ти­во­по­лож­ных сто­рон равны:



от­ку­да на­хо­дим: 



*Вто­рой слу­чай.*Пусть пря­мая  пер­пен­ди­ку­ляр­ная  ка­са­ет­ся окруж­но­сти, пе­ре­се­ка­ет  в точке , а  в точке  (рис. 2). В пря­мо­уголь­ном тре­уголь­ни­ке 

имеем 

У опи­сан­но­го четырёхуголь­ни­ка  суммы про­ти­во­по­лож­ных сто­рон равны:

, 

от­ку­да на­хо­дим: 

 Ответ:  или .

**C 4**Пря­мая, пер­пен­ди­ку­ляр­ная ги­по­те­ну­зе пря­мо­уголь­но­го тре­уголь­ни­ка, от­се­ка­ет от него че­ты­рех­уголь­ник, в ко­то­рый можно впи­сать окруж­ность. Най­ди­те ра­ди­ус окруж­но­сти, если от­ре­зок этой пря­мой, за­ключённый внут­ри тре­уголь­ни­ка, равен 12, а ко­си­нус остро­го угла равен .

 **Ре­ше­ние.**

 Обо­зна­чим дан­ный тре­уголь­ник *ABC*, , , — ги­по­те­ну­за, 

 . За­ме­тим, что окруж­ность, о ко­то­рой го­во­рит­ся в усло­вии, — окруж­ность, впи­сан­ная в тре­уголь­ник *ABC*. Пусть *О* — её центр, а *D* и*Е* — точки ка­са­ния с ка­те­та­ми *АС* и *ВС* со­от­вет­ствен­но. Тогда, так как *ODCE* — квад­рат, ра­ди­ус этой окруж­но­сти

.

Пусть пря­мая *MN* пер­пен­ди­ку­ляр­на *АВ*, ка­са­ет­ся окруж­но­сти, пе­ре­се­ка­ет *АВ* в точке *М*, а *АС* в точке *N* (рис. 1). Пря­мо­уголь­ный тре­уголь­ник *ANM* по­до­бен тре­уголь­ни­ку *ABC*. В нём , , .

У опи­сан­но­го четырёхуголь­ни­ка суммы про­ти­во­по­лож­ных сто­рон равны:

, , от­ку­да на­хо­дим: .



Пусть пря­мая *MN* пер­пен­ди­ку­ляр­на *АВ*, ка­са­ет­ся окруж­но­сти, пе­ре­се­ка­ет *АВ* в точке *М*, а *ВС* в точке *N* (рис. 2). Пря­мо­уголь­ный тре­уголь­ник *NBM* по­до­бен тре­уголь­ни­ку *ABC*. В нём , , . У опи­сан­но­го четырёхуголь­ни­ка суммы про­ти­во­по­лож­ных сто­рон равны:

, , от­ку­да на­хо­дим: .



Ответ: 8 или 9.

**C -4.** Точка *M* лежит на от­рез­ке *AB.* На окруж­но­сти с диа­мет­ром *AB* взята точка *C,* уда­лен­ная от точек*A,* *M* и *B* на рас­сто­я­ния 20, 14 и 15 со­от­вет­ствен­но. Най­ди­те пло­щадь тре­уголь­ни­ка *BMC.*

 **Ре­ше­ние.**

 

Точка  лежит на окруж­но­сти с диа­мет­ром  по­это­му  По тео­ре­ме Пи­фа­го­ра



Пусть  — вы­со­та тре­уголь­ни­ка  Тогда:

.

От­сю­да



Из пря­мо­уголь­но­го тре­уголь­ни­ка на­хо­дим:



Если точка  лежит между точ­ка­ми  и , то 

Сле­до­ва­тель­но,



 

Если точка  лежит между  и  то   Сле­до­ва­тель­но,



 **Ответ:** 

**C -4.**  Точка  лежит на от­рез­ке  На окруж­но­сти с диа­мет­ром  взята точка  уда­лен­ная от точек  и  на рас­сто­я­ния 40, 29 и 30 со­от­вет­ствен­но. Най­ди­те пло­щадь тре­уголь­ни­ка 

 **Ре­ше­ние.**

 

Точка  лежит на окруж­но­сти с диа­мет­ром  по­это­му 

По тео­ре­ме Пи­фа­го­ра Пусть  — вы­со­та тре­уголь­ни­ка  Тогда:

 

Из пря­мо­уголь­но­го тре­уголь­ни­ка на­хо­дим:



Если точка  лежит между точ­ка­ми  и , то 

Сле­до­ва­тель­но,



 

Если точка  лежит между  и  , то .

Сле­до­ва­тель­но,



 **Ответ:** 

**C 4** Пря­мая, пер­пен­ди­ку­ляр­ная ги­по­те­ну­зе пря­мо­уголь­но­го тре­уголь­ни­ка, от­се­ка­ет от него четырёхуголь­ник, в ко­то­рый можно впи­сать окруж­ность. Най­ди­те ра­ди­ус окруж­но­сти, если от­ре­зок этой пря­мой, за­ключённый внут­ри тре­уголь­ни­ка, равен 40, а от­но­ше­ние ка­те­тов тре­уголь­ни­ка равно 

 **Ре­ше­ние.**

Обо­зна­чим тре­уголь­ник . Пред­по­ло­жим, что от­ре­зок  от­се­ка­ет от тре­уголь­ни­ка  тре­уголь­ник 



Обо­зна­чим точки ка­са­ния окруж­но­сти и пря­мых  Так как  и  — квад­ра­ты,  где  — ра­ди­ус окруж­но­сти. Кроме того,  Зна­чит,  — бис­сек­три­са угла 

Тре­уголь­ни­ки  и  равны по ги­по­те­ну­зе и ка­те­ту. Пусть  а По тео­ре­ме Пи­фа­го­ра  Тогда  Из по­до­бия тре­уголь­ни­ков  и  по­лу­ча­ем: , от­ку­да  Сле­до­ва­тель­но, 

Найдём ра­ди­ус окруж­но­сти: 

 

Если от­ре­зок от­се­ка­ет тре­уголь­ник  то, рас­суж­дая ана­ло­гич­но, на­хо­дим,

что  Из по­до­бия тре­уголь­ни­ков  и  по­лу­ча­ем:  от­ку­

да  Тогда 

 Ответ: 25 или 32.

**C 4**Рас­сто­я­ние между па­рал­лель­ны­ми пря­мы­ми равно  На одной из них лежит вер­ши­на , на дру­гой — ос­но­ва­ние  рав­но­бед­рен­но­го тре­уголь­ни­ка . Из­вест­но, что  Най­ди­те рас­сто­я­ние между цен­тра­ми окруж­но­стей, одна из ко­то­рых впи­са­на в тре­уголь­ник  а вто­рая ка­са­ет­ся дан­ных па­рал­лель­ных пря­мых и бо­ко­вой сто­ро­ны тре­уголь­ни­ка 

 **Ре­ше­ние.**

 

Пусть  — вы­со­та тре­уголь­ни­ка,  — ра­ди­ус окруж­но­сти, впи­сан­ной тре­уголь­ник ,  — центр этой окруж­но­сти. Так как, , то . Сле­до­ва­тель­но, по­лу­пе­ри­метр тре­уголь­ни­

ка  равен , а его пло­щадь , от­ку­да .

Пусть . Тогда  .

Пусть окруж­ность с цен­тром  ка­са­ет­ся дан­ных па­рал­лель­ных пря­мых и бо­ко­вой сто­ро­ны  рав­но­бед­рен­но­го тре­уголь­ни­ка , при­чем пря­мой  — в точке  , и не имеет общих точек с бо­ко­вой сто­ро­ной  (рис. 1). Не­труд­но по­нять, что ра­ди­ус этой окруж­но­сти равен 3.

Центр окруж­но­сти, впи­сан­ной в угол, лежит на его бис­сек­три­се, по­это­му  — бис­сек­три­са угла MAC . Тогда



,



Из пря­мо­уголь­но­го тре­уголь­ни­ка  на­хо­дим, что



 

Пусть те­перь окруж­ность с цен­тром  ка­са­ет­ся дан­ных па­рал­лель­ных пря­мых и бо­ко­вой cто­ро­ны  рав­но­бед­рен­но­го тре­уголь­ни­ка , при­чем пря­мой  — в точке , и пе­ре­се­ка­ет бо­ко­вую сто­ро­ну (рис. 2).

Тогда точки O и Q лежат на бис­сек­три­се угла . Тре­уголь­ник  по­до­бен тре­уголь­ни­ку с ко­эф­фи­ци­ен­том , по­это­му

. Сле­до­ва­тель­но,



.

 Ответ:  или 