**Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение гимназия №49 Приморского района г.Санкт-Петербурга**

Квадратный трехчлен

и его свойства

Составила:

Сивкова Татьяна Владимировна

## ( учитель математики, методист)

*Данная методическая разработка позволит учителю обеспечить поэтапное формирование у школьника представлений об идеях и методах решения основных классов задач и оказать помощь родителям в организации домашних заданий с детьми****.***

**1. Решение неполных квадратных уравнений.**

**Квадратным уравнением** называется уравнение вида : **аx2 + bх + с = 0,**

где **x** — пе­ременная, **a, b** и **с** — некоторые числа, причем **a.**

Числа **а, b** и **с** — коэффициенты квадратного уравнения.

Число **a**  называют старшим коэффициентом**,**

***b -*** *вторым коэффициентом ,*

**с** — свободным членом .

Заметим, что квадратное уравнение называют еще **уравнением второй степе­ни**, так как его левая часть есть многочлен второй степени.

* Если в квадратном уравнении **аx2 + bх + с = 0,** хотя бы один из коэффициентов

**b** или **с** равен нулю, то такое уравнение называют **неполным квадратным урав­нением**.

* Если *a*=1, то квадратное уравнение называется **приведенным квад­ратным уравнением**.

Неполные квадратные уравнения бывают трех видов:

1) ах2 + с = 0, где с 0;

2) aх2 + bх = 0, где Ь 0;

*3)* ах2 = *0.*

* *При решении неполного квадратного уравнения вида* ах2 + с = 0, где с 0:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) переносят свободный член уравнения в правую часть:  2) делят обе части уравне­ния на а: | aх 2 = -с  х 2 = -с/а |

Уравнение х2 = равносильно уравнению ах2 + с = 0. Так как с 0, то 0.

Если 0 , то уравнение имеет два корня x1 = и x1 =

Если 0 , то уравнение не имеет корней.

* *Решите неполное квадратное уравнение:*

***ПРИМЕР 1***

*- 8 х2 + 64 = 0 - 8 х2=- 64 х2= 8 и .*

*Ответ:*

***ПРИМЕР 2*** *.* Решите неполное квадратное уравнение:

*6х2 + 28 = 0 6 х2 = - 28 х2 = (Так как квадрат числа не может быть отрицательным числом, то получившееся уравнение не имеет корней, следовательно, не имеет корней и равносильное ему уравнение 6х2 + 28 = 0) Ответ: Корней нет.*

* *При решении неполного квадратного уравнения вида* aх2 + bх = 0, где Ь 0:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) раскладывают левую часть уравнения на множители:  2) приравниваем каждый из множителей к нулю:  *Необходимо помнить:*  **Произведение некоторого числа множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.** | x (aх+ b) = 0  *x=0 ,* a*x+b =0* |

Решая уравнение a*x+b = 0 ,* где a0, находим : a*x = -b ,* x = *.*

Следовательно корнями уравнения являются два числа: *0 и. ⟺*

Таким образом квадратное уравнение вида aх2 + bх = 0, где Ь 0 ***всегда имеет два корня***.

* *Решите неполное квадратное уравнение:*

***ПРИМЕР 3*** *.*

*9х2 - 121 = 0 (3x-11)(3x+11) = 0*⟺

*Ответ: ; .*

***ПРИМЕР 4*** *.* Решите неполное квадратное уравнение:

*- х2 + 10 =0 ⟺ - х2 =-10 ⟺ х2 = 10⟺ = 10*

*Ответ:*

* *Неполное квадратное уравнение вида* ах2 = 0 равносильно уравнению **х2 = 0** и поэтому имеет ***единственный корень*** *0*.

**Задания для самостоятельного решения.**

Решите неполное квадратное уравнение:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | -6x2  + 32 = 0 |  | 6 | x2  - = 0 |
| 2 | 8x2 + 13 =0 |  | 7 | 3x2 + 7x =0 |
| 3 | 169x2 – 25 =0 |  | 8 | 2x2 - 3x =0 |
| 4 | - x2 + 6 =0 ⟺ = 6 |  | 9 | 3x2  + 2x =0 |
| 5 | 12x2 + 48 =0 |  | 10 | -5x + 8x=0 |

**2. Решение квадратных уравнений с использованием выделения полного квадрата.**

Выражение аx2 + bх + с = 0, если астоящее в левой части квадратного уравнения, называют также квадратным трехчленом.

В квадратном трехчлене всегда можно выделить полный квадрат двухчлена:

аx2 + bх + с =a

.

*Таким образом,* а 2 + b + с =

*Аналогично для приведенного квадратного трехчлена + p +q имеем:*

*+ p +q=* .

* *Выделите квадрат двухчлена в трехчлене:*

***ПРИМЕР 5****.*

+ 4 = + 2 2 + – = + 4 +4 – 4 =

***ПРИМЕР 6.***

3 =*2 =2=* (

***ПРИМЕР 7.***

4= 2(2)= 2( =2(

2 ( (=2(

***ПРИМЕР 8.***

14+36 = + 36 = + - 49+36 = -13

**Задания для самостоятельного решения.**

*Выделите квадрат двухчлена в трехчлене:*

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *1* | + 6= |  | *6* | - 4 = |
| *2* | - 27 |  | *7* | = |
| *3* | 6+8 = |  | *8* |  |
| *4* | 2 + 2= |  | *9* | 4 5- 6 = |
| *5* | = |  | *10* | = |

* Решите квадратные уравнения, предварительно выделив квадрат двухчлена**.**

***ПРИМЕР 9.***

14+49 =0 14+ 49 = , откуда , ,

*Ответ: 7.*

***ПРИМЕР 10 .***

6= 0 6 = 2 -16 , откуда , ,

,

=7. *Ответ: -1 ; 7.*

***ПРИМЕР 11 .***

2= 0 ⟺2 = 0 ⟺ ⟺

=0⟺ ;.

1)нет решений при a ;

2), при a;

3) , при a.

*Ответ:* нет решений при a ;, при a; , при a.

***ПРИМЕР 12 .***

2= ⟺2= 0 ⟺ ⟺

=0⟺ ;

1), при a;

2), при a. *Ответ:* , при a;, при a.

**Задания для самостоятельного решения.**

Решите квадратные уравнения, предварительно выделив квадрат двухчлена.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 0 |  |
|  | 0 |  |
|  | 0 |  |
|  | 0 |  |
|  | 0 |  |
|  | 0 |  |
|  | 0 |  |
|  | 0 |  |
|  | 0 |  |
|  | 0 |  |
|  | 2= 0 | 1)нет коней при a ;  2), при a;  3) , при a. |
|  | 2= | 1), при a;  2), при a. |

**3.Решение полного квадратного уравнения.**

Решим квадратное уравнение аx2 + bх + с = 0 .

Разделив обе части на а , получим равносильное ему приведенное квадратное уравнение .

Преобразуем это уравнение:

.

Число корней последнего уравнения зависит от знака дроби .

Так как a, – положительное число, поэтому знак этой дроби определяется знаком числителя, т.е. .

Это выражение называется **дискриминантом квадратного уравнения**  аx2 + bх + с = *0.*

Его обозначают буквой *D* , т.е.

*D =* .

Запишем уравнение в виде или .

Рассмотрим теперь различные возможные случаи.

1. Если ***D*** , то ,

,

,

Таким образом, в этом случае уравнение аx2 + bх + с = 0 имеет два корня:

,

Принята следующая краткая запись , которую называют

**формулой корней квадратного уравнения.**

2. Если ***D*** , то исходное уравнение примет вид , откуда , .

В этом случае уравнение имеет два совпадающих корня: .

Действительно, при *D* эта формула принимает вид: ,откуда

3. Если ***D*** *,* то значение дроби - отрицательно и поэтому уравнение

не имеет смысла.

Следовательно, уравнение аx2 + bх + с = *0* не имеет корней.

Таким образом, в зависимости от дискриминанта квадратное уравнение может иметь два корня

(при ***D*** ) , один корень ( при ***D***) или не иметь корней (при ***D*** .

**Задания для самостоятельного решения.**

* Найдите дискриминант квадратных уравнений

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 0 |  |
| 2 | 0 |  |
| 3 | 0 |  |
| 4 | 0 |  |
| 5 | 0 |  |
| 6 | 0 |  |
| 7 | 0 |  |
| *8* | 0 |  |
| 9 | 0 |  |
| *10* | 0 |  |

**4.Разложение квадратного трехчлена на линейные множители.**

1. Если  ***D*** ,то квадратный трехчлен можно представить в виде произведения линейных множителей: аx2 + bх + с = ***a ()() ,***

где  или -

**корни квадратного уравнения** аx2 + bх + с =0.

***ПРИМЕР 13 .***Сократите дробь:.

Решение: Разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

1) , корни уравнения и , откуда в числителе

)( ) =2)( )= (,

2)

Далее получим: = =

Ответ:

***ПРИМЕР 14 .***Сократите дробь: .

Решение: Разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби:

1)

Далее получим:

Ответ:

**Задания для самостоятельного решения.**

* Разложите на множители квадратный трехчлен:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 |  |  |
| 7 |  |  |
| 8 |  |  |
| 9 |  |  |

**Задания для самостоятельного решения.**

* Сократите дробь:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |

**5.Теорема Виета.**

При ***D*** корни и квадратного уравнения аx2 + bх + с =0 удовлетворяют следующим

условиям:

**Верно и обратное утверждение**: **если числа *m* и *n* таковы, что их сумма равна *-p* ,**

**произведение равно  *q ,* то эти числа являются корнями уравнения** x2 + pх + q =0 .

***Теорема 1.*** Если сумма коэффициентов квадратного уравнения равна 0 , то один из корней уравнения равен 1, а второй находится по формуле .

***Теорема 2.*** Если сумма cтаршего коэффициента и свободного члена квадратного уравнения равна второму коэффициенту, то один из корней уравнения равен , а второй находится по формуле .

**Задания для самостоятельного решения.**

* Используя теоремы о сумме коэффициентов, найдите корни квадратного уравнения.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | =0 |  |
| 2. | =0 |  |
| 3. | =0 |  |
| 4. |  |  |
| 5. | =0 |  |
| 6. |  |  |
| 7. | =0 |  |
| 8. | =0 |  |

***ПРИМЕР 15 .***Один из корней квадратного уравнения равен -3. Назовите коэффициент *k* и второй корень уравнения : .

Решение: По теореме Виета имеем: и откуда и .

Ответ: , .

**Задания для самостоятельного решения.**

* Один из корней квадратного уравнения равен -3, назовите коэффициент *k* и второй корень :

|  |  |
| --- | --- |
|  | , |
|  | , |
|  | , |

***ПРИМЕР 16 .***Пусть и - корни квадратного уравнения x2 + pх + q =0 . Не решая квадратного уравнения, вычислите: .

Решение: По теореме Виета ,

откуда

**Задания для самостоятельного решения.**

* Пусть и - корни квадратного уравнения x2 + pх - 15 =0 . Выразите через коэффициент *p* сумму:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№** | **Задание** | **Ответ** |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  | + 30 |

**Задания для самостоятельного решения.**

* 1.Сократи дробь и найди ее значение при .

Ответ : .

* 2. Сократи дробь и найди ее значение при

Ответ : .

* 3. Сократи дробь и найди ее значение при .

Ответ : .

* 4. Сократи дробь и найди ее значение при .

Ответ : .

**Задания для самостоятельного решения.**

* Составьте квадратное уравнение, если его корни равны:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | *-3 и 4* |  |
|  | *- 3 и* |  |
|  | *-1 и 7* |  |
|  | *-3 и* |  |
|  | *-1 и -12* |  |
|  | *3 и -* |  |

**Задания для самостоятельного решения.**

***ПРИМЕР 17.*** Дано квадратное уравнениеx2 + pх + q =0, и - его корни . Не решая уравнения, составьте квадратное уравнение ***,*** имеющее следующие корни: и .

Решение: По теореме Виета имеем : + = *- p* ; = *q.*

Следовательно + , откуда по обратной теореме Виета числа и x2 + *k*pх +q =0.

*Ответ:* x2 + *k*pх +q =0.

**Задания для самостоятельного решения.**

* Дано квадратное уравнениеx2 + pх + q =0, и - его корни . Не решая уравнения, составьте квадратное уравнение ***,*** имеющее следующие корни.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | + | x2 + (p-q)х -pq =0, |
| 2. |  |  |

* Числа и - корни квадратного уравнения x2 + pх + q =0. Найдите коэффициенты

p и q, если:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | =3 и = *5* | P=-8, q=15 |
| 2. | = - 2 и = *0* | P=2, q=0 |
| 3. | = и = | P=0, q=-7 |

* Определите, при каких значениях параметра *a* один из корней уравнения равен нулю.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. |  |  |
| 2. |  |  |
| 3. |  |  |

***ПРИМЕР 18.*** Определите, при каких значениях параметра *a* оба корня уравнения равны нулю.

.

Решение: По теореме Виета параметр *a* является решением системы:

, тогда *a =1 Ответ: a =1*

***ПРИМЕР 19.***  Определите, при каких значениях параметра *a* оба корня уравнения равны нулю.

Решение: По теореме Виета параметр *a* является решением системы:

, тогда *a = Ответ*: *a* = **.**

***ПРИМЕР 20.*** Определите, при каких значениях параметра *a* корни уравнения равны по модулю.

Решение. Корни уравнения равны по модулю тогда, когда = или =

Тогда по теореме Виета параметр *a* является решением совокупности с

Первая система решений не имеет, а решением второй является *a=0.*

*Ответ: a=0*

**Задания для самостоятельного решения.**

* Определите, при каких значениях параметра *a* корни уравнения равны по модулю.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 |  | *a =* |
| 2 |  | *a =* |
| 3 |  | *a =* ) |

**6.Решение систем уравнений с использованием свойств квадратного трехчлена.**

***ПРИМЕР 21.* Решите систему уравнений.**

Решение. По обратной теореме Виета числа и являются корнями квадратного уравнения

откуда

*Ответ:* (-8; -2) ; (-2 ; -8)

**Задания для самостоятельного решения.**

По обратной теореме Виета числа и являются корнями квадратного уравнения. ⟺ *Ответ*: ( 4; --1) ; ( -1 ; 4 )

*Ответ:* ( 1; 6 ) ; ( 6 ; 1 )

*Ответ*:( 7; -3 ) ; ( -3 ; 7 )

***ПРИМЕР 22.* Решите систему уравнений.**

Решение. и- корни квадратного уравнения

откуда , и ( нет решения) ,

Тогда и

*Ответ*: ( 49; -3 ) .

**Задания для самостоятельного решения.**

* **Решите систему уравнений.**

⟺ *Ответ:* ( -1 ; 16 )

⟺

Тогда и - корни квадратного уравнения………..

*Ответ:* ( -2 ; -3 ) , ( 6 ; 1 )

⟺

**Решение.** и корни квадратного уравнения…………….

*Ответ:* (; ) , ( 2 ; 5 )

⟺

**Решение.** и- корни квадратного уравнения

*Ответ*: ( 36 ; 1 ) .

⟺

*Ответ:* ( 1 ; 36 ).

**7. Решение квадратных уравнений методом подстановки.**

***ПРИМЕР 23.* Решите уравнение.**

**Решение.** Сделав замену : , получим квадратное уравнение

корнями которого являются числа 4 и 9. Тогда , и ;

, и

*Ответ:* ±2 ; ±3.

**Задания для самостоятельного решения.**

* **Решите уравнения.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. |  | ±2; ± 5 |
| 2. |  | ±6 |
| 3. |  | ± |

***ПРИМЕР 24.* Решите уравнение.**

**Решение.** Пусть , тогда ,

Выполнив замену, получим квадратное уравнение: , ,

корнями которого являются числа 0 и .

Далее сделаем обратную подстановку: так как ; (решений нет);  
 , , ,

*Ответ*: ; .

**Задания для самостоятельного решения.**

* **Решите уравнения.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. |  |  |
| 2. |  |  |
| 3. |  |  |