# Олимпиада по математике 11 класс (1 тур)

№1. Доказать, что число $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2010}$ можно представить в виде $a\sqrt{3}-в\sqrt{2}$, где *а* и *в* такие целые числа, что $3a^2-2в^2=1$. *(10 баллов)*

№2. Решить уравнение в целых числах: $2x^2-1=2xy$. *(6 баллов)*

№3. Доказать, что если повернуть катеты прямоугольного треугольника так, чтобы они легли на гипотенузу, то длина их общей части (на гипотенузе) будет равна диаметру вписанной в треугольник окружности. *(10 баллов)*

№4. Первая цифра некоторого шестизначного числа равна 1. Если эту цифру переставить в конец числа, оставив остальные цифры без изменения, то полученное число окажется втрое больше исходного. Найдите исходное число. *(6 баллов)*

№5. Доказать, что $\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$.

*(7 баллов)*

# Решения и ответы

№1. Воспользоваться тем, что $(a\sqrt{3}-в\sqrt{2})(a\sqrt{3}+в\sqrt{2})=3a^2-2в^2=1$ и $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2010}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2010}=1=3a^2-2в^2$.

№2. Данное уравнение не имеет решений, так как левая часть – число нечётное, а правая – чётная.

№3. AC = AM + r
BC = BP + r
AB = AO + BO
Но AO = AM, BO = BP.
AB = AM + BP
KT = AC + BC – AB
KT = AM + r + BP + r – AM – BP = 2 r.

№4. Обозначим число *x*, тогда $x$ = 100 000 + *a*. Если в числе *x* 1 переставить в конец, то в полученном числе *y* число *a* будет показывать число его десятков, т.е. *y* = 10*a* + 1. По условию, 10*a* + 1 = 3(100 000 + *a*), поэтому 7*a* = 299 999 и *a* = 42 857. Тогда *x* = 142 857.

№5. Легко показать, используя формулы приведения, что $\sin\frac{3\pi}{8}=\sin\frac{5\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}$ и $\sin\frac{7\pi}{8}=\sin\frac{\pi}{8}$, тогда данная сумма имеет вид $2(\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8})$ или $2((\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8})^2-2\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8})=2(1-\frac{1}{4})=2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$.