**Принцип Дирихле и его  применение  при решении задач.**

 Очень  часто  в задания математических  олимпиад  включаются  задачи, при решении которых можно  использовать прием, называемый  принципом  Дирихле. В  школьном  курсе математики этот  прием отсутствует. Поэтому  научить  этому  приему   стоит  при  подготовке  к  олимпиадам школьников  от 5 до 10 класса. Ученики 5  класса свободно  схватывают  идею  решения с  использованием  принципа Дирихле.

Основы теории. Принцип Дирихле выражает соотношение между двумя множествами. Существует несколько формулировок данного принципа. Самая популярная следующая:

 "Если в клетках сидит m зайцев, причем m $>$ n, то хотя бы в одной клетке сидят, по крайней мере, два зайца."

Доказывается данный принцип Дирихле легко, методом доказательства от противного. Некоторые задачи на применение этого принципа также можно решить, используя метод доказательства от противного, но не все.
На первый взгляд, непонятно, почему это совершенно очевидное предложение, тем не менее, является мощным математическим методом решения задач, причем самых разнообразных. Все дело оказывается в том, что в каждой конкретной задаче нелегко понять, что же здесь выступает в роли "зайцев", а что - в роли"клеток". И почему надо, чтобы "зайцев" было больше, чем "клеток". Выбор "зайцев" и "клеток" часто не очевиден. Далеко не всегда по формулировке задачи можно определить, что следует применить принцип Дирихле. Главное же достоинство данного метода решения состоит в том, что он дает неконструктивное решение (т.е. мы знаем, что такие клетки есть, но где именно они находятся, часто указать не можем); попытка же дать конструктивное доказательство приводит к большим трудностям.

 Рассмотрим другие формулировки принципа Дирихле:

 "Пусть в n клетках сидят m зайцев, причем n больше m. Тогда найдется хотя бы одна пустая клетка".

( Доказывается аналогично- методом от противного);

"Если m зайцев сидят в n клетках, то найдется клетка, в которой сидят не меньше, чем  $\frac{m}{n}$ зайцев, и найдется клетка, в которой сидят не больше, чем $\frac{m}{n} $зайцев";

"Если m зайцев съели n килограммов травы, то какой-то заяц съел не менее $\frac{m}{n}$ килограммов травы, а какой-то заяц съел не больше $\frac{m}{n}$ килограммов (а если кто-то съел больше среднего, то кто-то съел меньше среднего)" (непрерывный принцип );

" Если в n клетках сидят m зайцев и m $\geq $ kn+1, то в какой-то из клеток сидят, по крайней мере , k+1 заяц" (обобщенный принцип).

Некоторые задачи решаются с использованием формулировок, аналогичным принципу Дирихле. Сформулируем данные утверждения:

1) Если на отрезке длиной 1 расположено несколько отрезков, сумма длин которых больше 1, то, по крайней мере, два из них имеют общую точку.

2) Если на окружности радиуса 1 расположено несколько дуг, сумма длин которых больше $2π$, то, по крайней мере, две из них имеют общую точку.
3) Если внутри фигуры площадью 1 расположено несколько фигур, сумма площадей которых больше 1, то, по крайней мере, две из них имеют общую точку.

Далее мы рассмотрим примеры задач, решаемых данным методом.

1.Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 см расположено 5 точек. Докажите, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5 см.

Это наиболее трудная задача на принцип Дирихле. Но на примере ее решения очень хорошо видны все достоинства принципа Дирихле.

Решение: сначала надо выбрать что-то за «зайцев».Так как в задаче фигурирует число «5», то пусть 5 точек будут «зайцами».Так как «клеток» должно быть меньше, и чаще всего на 1, то их должно быть 4.Как получить эти 4 «клетки» ? Так как в условии задачи есть еще 2 числа: 1 и 0,5;причем второе меньше первого в 2 раза, то можно получить 4 «клетки», разбив равносторонний треугольник с помощью проведения средних линий. Тогда получим 4 равносторонних треугольника со сторонами по 0,5 см, которые и будут у нас «клетками».

Так как «зайцев»- 5, «клеток»-4 и 5$>4$, то по принципу Дирихле найдется «клетка»-равносторонний треугольник со стороной 0,5 см, в который попадут не менее 2 «зайцев»-точек. А так как все 4 треугольника равны и расстояние между точками в любом треугольнике будет меньше, чем 0.5 см, то мы доказали, что между некоторыми 2 точками из 3 расстояние будет меньше, чем 0,5 см.

*Замечание. Можно разбить треугольник и на другие фигуры ( в этих случаях придется вместо средних линий треугольника (одной, двух или трех) проводить соответственно дуги радиуса 0,5 см с центром в вершинах треугольника).*

***2. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2, разность которых делится на 11.***

Решение: примем числа за «зайцев», их 12,значит клеток должно быть меньше. Пусть»клетки» - остатки от деления целого числа на 11.Всего таких» клеток» будет 11: 0,1,2, 3,4,5,6,7,8,9,10.Тогда по принципу Дирихле найдется «клетка», в которой будут сидеть не менее чем 2 «зайца», то есть найдутся 2 целых числа с одним остатком. А разность 2 чисел с одинаковым остатком от деления на 11, будет делиться на 11:

$a\_{m}–a\_{n}$=(11m + q) – (11n + q) = 11(m – n).

***3. В ковре размером 4х4 метра моль проела 15 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1х1 метр, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки можно считать точечными).***

Решение: Разрежем ковер на 16 ковриков размером 1х1 метр. Так как ковриков- «клеток» - 16, а дырок –«зайцев»- 15, то найдется хотя бы одна «клетка», в которой не будет «зайцев», то есть найдется коврик без дырок внутри. Здесь мы применили вторую формулировку принципа Дирихле.

***4. В классе 27 учеников. Найдется ли месяц, в котором отмечают свои дни рождения не меньше, чем три ученика этого класса.***

Решение: В году 12 месяцев. Обозначим их за «клетки», а учеников за «Зайцев».Так как 27 ≥ 12•2 + 1, то по обобщенному принципу Дирихле найдется «клетка», в которой сидят не менее 3 «Зайцев», то есть найдется месяц, в котором дни рождения празднуют не менее 3 учеников.

*Замечание. Задачу можно решить, применяя метод от противного.*

***ВЫВОДЫ.***

***Применяя данный метод, надо:***

1. ***Определить, что удобно в задаче принять за «клетки», а что за «зайцев»;***
2. ***Получить «клетки».Чаще всего «клеток» меньше(больше), чем «зайцев» на одну;***
3. ***Выбрать для решения требуемую формулировку принципа Дирихле.***

 Иногда в доказательстве используются слова «в худшем случае в каждой клетке сидит…». Принцип Дирихле связан с понятием «более»(кроликов больше, чем клеток). Верно близкое утверждение, связанное с понятием «менее».

**Теорема**. ***Если в n клетках сидит менее*** $\frac{n(n-1)}{2}$ ***кроликов, то найдутся две клетки, в которых сидит одинаковое количество кроликов (может быть, ни одного).***

Доказательство. Пусть это не так. Расположим клетки в порядке увеличения числа кроликов. Тогда в первой клетке число кроликов не меньше 0, во второй - больше, чем в первой, т.е. не менее 1, в третьей – больше, чем во второй, т.е. не менее 2, и т.д. Но тогда всего кроликов по меньшей мере 0+1+ ….+(n-1) = $\frac{n(n-1)}{2}$ . Противоречие.

**Дополнительные соображения по применению принципа Дирихле**

Для старших школьников задачи могут уже быть сложнее.

 Рассмотрим задачи, отличающиеся от предыдущих тем, что в них либо количество кроликов, либо количество клеток, либо и то, и другое явно не дано, и их надо посчитать из условия задачи. Иногда (в более сложных задачах) клетки (кроликов) необходимо создать (сконструировать).

***5. В бригаде 7 человек и их суммарный возраст – 332.Доказать, что из них можно выбрать 3 человека, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.***

Решение 1. Выберем трех старших членов бригады. Если им вместе 142 года, то хотя бы одному из них больше 47 лет. Если самому младшему из троих больше 47 лет, то им троим больше 142 лет. Пусть самому младшему из троих 47 лет или меньше, им троим вместе менее 142 лет. Тогда на долю остальных четверых приходится более 320 – 142 = 190 лет.

Разделим 190 на 4 с остатком: 190 =4•47 + 2. Тогда по принципу Дирихле одному из четверых больше 47 лет. Это противоречит выбору троих самых старших в бригаде.

Решение 2. Рассмотрим все возможные тройки рабочих бригады. Всего таких троек $ C\_{7}^{3}$ =$ \frac{7∙6∙5}{3∙2}$ = 35. Сумма их суммарных возрастов равна

 332∙35∙ $\frac{ 3}{7}$ = 4980. Значит по принципу Дирихле есть тройка, суммарный возраст в которой не меньше, чем 4980 : 35, что больше 142.

Решение 3. Средний возраст трех самых старших не меньше среднего возраста по бригаде, который равен $\frac{332}{7}$ . Поэтому сумма их возрастов по меньшей мере $\frac{3∙332}{7}$ $>142 $ года.

***6. Даны 8 натуральных чисел 1≤***$ a\_{1}$$<$$a\_{2}<$ ***∙∙∙***$<a\_{8}$$\leq $ ***15Докажите, что среди всевозможных разностей*** $ a\_{i}–a\_{k}$ ***( k***$< $***I***$ \leq $ ***8) имеются три равных.***

Решение 1. Рассмотрим семь разностей $a\_{i+1}–a\_{i}$ (i=1,…,7). Если среди разностей нет трех равных, то среди этих семи не более чем по две единицы, двойки, тройки и одно число не меньше 4.

$a\_{8}$ – $a\_{1}=a\_{8}$ –$ a\_{7}+a\_{7}$ – $a\_{6}$+…$a\_{2}$ –$ a\_{1}\geq $ 2(1 + 2 + 3) + 4 = 16.

Так как 1$\leq a\_{i}$ $\leq $ 15, то$ a\_{8}$ – $a\_{1}\leq $14 . Противоречие.

Решение 2. Общее число разностей - $C\_{8}^{2}$ = 28 . Они принимают значения

1, …,14, причем 14 не более одного раза. Значит, не менее 27 разностей принимают значения 1, …,13.Тогда по принципу Дирихле среди этих разностей найдутся три равных.

 *Для занятий со школьниками при подготовке к олимпиадам задачи на применение принципа Дирихле подбирайте в книге А. Фаркова и В. Горбачева из списка литературы.*

**Задание 6**

  **Решите следующие пять  задач  на  применение  принципа Дирихле:**

**1. Дано 9 целых чисел.Докажите, что  из  них можно выбрать 2, разность  которых делится на 8.**

**2. Внутри правильного  шестиугольника со  стороной 1 см расположено 7 точек.Докажите, что  расстояние между некоторыми  двумя  точками  меньше, чем 1 см.**

**3. Можно  ли  увезти 50 камней весом 370, 372, 374, 376,..., 466, 468 кг на  семи  трехтонках?**

**4. Пятеро  рабочих получили на  всех  зарплату 1500 долларов.Каждый из  них хочет  купить себе магнитофон ценой 30 долларов.Докажите, что  кому-то придется подождать до  следующей зарплаты.**

**5. Десять  студентов-математиков составили 35 задач  для  математической  олимпиады.Известно, что  среди  них были  студенты, которые  составили по 1, 2 и 3 задачи.Докажите, что  среди  них  есть  студент (по  меньшей  мере один), который составил не  менее пяти  задач.**