**Элективный курс "Делимость чисел. Признаки делимости чисел".**

**Программа элективного курса "Делимость чисел. Признаки делимости чисел".**

Кузнецова Татьяна Николаевна, учитель математики

**Пояснительная записка**

Программа элективного курса “Делимость целых чисел” согласована с содержанием программы основного курса алгебры. Учебный материал курса предназначен для учащихся 7-х классов, он также имеет практическую значимость для учащихся 11 классов, готовящихся к поступлению в вуз.

В настоящее время все более актуальной становится проблема развития одаренных детей. Это, прежде всего, связано с потребностью общества в неординарной творческой личности. Неопределенность современной окружающей обстановки требует от человека не только высокой активности, но и его умения, способности нестандартного поведения. Раннее выявление, обучение и развитие одаренных и талантливых детей составляет одну их главных проблем совершенствования системы образования.

**Цель программы**

– создание условий для раскрытия и развития внутреннего потенциала, способностей высокомотивированных учащихся и детей с признаками одаренности, удовлетворения их познавательных потребностей.

.Данная программа соответствует основной стратегии развития школы:

* ориентации нового содержания образования на развитие личности;
* реализации деятельностного подхода к обучению;
* обучению ключевым компетенциям (готовности учащихся использовать усвоенные знания, умения и способы деятельности в реальной жизни для решения практических задач) и привитие общих умений, навыков, способов деятельности как существенных элементов культуры, являющихся необходимым условием развития и социализации учащихся;
* обеспечению пропедевтической работы, направленной на раннюю профилизацию учащихся (выбор в 10-м классе физико-математического направления).

**Главной задачей** данной программы является формирование и развитие аналитических способностей у одаренных учеников, формирование исследовательских умений, а также развитие у них таких психических функций, как систематичность и последовательность мышления, способность к обобщению, сообразительность, память на числа, сосредоточение внимания, выдержку и настойчивость в работе.

Обучению решению задач в математике уделяется много внимания, но единственным методом такого обучения на уроках является показ способов решения определенных видов стандартных задач и значительная, порой изнурительная практика по овладению ими. Решением нестандартных задач на уроках учащиеся практически не занимаются или делают это крайне редко. А ведь именно решение таких задач способствует углублению знаний учащихся, развитию их природных способностей и дарований, развитию логического, аналитического мышления, вовлекает их в серьезную самостоятельную работу. Поэтому на занятиях курса ученикам предлагаются различные виды нестандартных задач, а также даются способы и методы их решения.

Предлагаемая программа ставит **своей задачей** создать у учащихся целостное представление о стандартных и нестандартных задачах, способах и схеме поиска их решения, развить общие умения решать любые математические задачи. Кроме того, программа способствует расширению кругозора школьников, дополняет обязательный учебный материал сведениями о математике и математиках, о математических фокусах, вовлекает учеников в исследовательскую самостоятельную деятельность.

Программа данного математического курса рассчитана на 34 часа. Работа математического курса осуществляется с учетом индивидуального подхода к обучению учащихся с использованием активных форм и методов познавательной деятельности, современных образовательных технологий: информационно-коммуникативной, исследовательской (проблемно-поисковой), деятельностного подхода и другие. Учитывая физиологические и психологические особенности учащихся 7-х классов, занятия курса должны быть разнообразными как по содержанию, так и по организации учебной деятельности. Поэтому занятие курса включает в себя либо теоретические подходы к решению задач и, конечно, решение самих нестандартных задач, дополненные биографическими миниатюрами, занимательным материалом. Каждое теоретическое положение рассматривается на какой – либо конкретной задаче, что позволяет активно вовлекать учащихся в процесс ее обсуждения и решения. Во время проведения занятий, посвященных изучению теории (поиск плана решения, методы решения нестандартных задач), уместна организация групповой работы школьников с целью развития самостоятельности мышления и исследовательских умений.

На протяжении всего периода курсовой работы с учащимися планируется выполнение творческих и исследовательских работ, соответствующих их способностям и интересам, с которыми они могут выступить на занятиях математического курса, школьных и городских научно-практических конференциях.

Процесс учебной деятельности на занятиях математического курса необходимо ориентировать на рациональное сочетание устных и письменных видов работы, как при изучении теории, так и при решении задач. Особое внимание должно быть уделено развитию математической культуры учащихся и их способностей.

В ходе проведения занятий курса следует обратить внимание на то, чтобы обучающиеся овладели умениями общеучебного характера, разнообразными способами деятельности, приобрели опыт:

* решения стандартных и нестандартных задач;
* исследовательской деятельности;
* грамотного использования математического языка в устной и письменной речи;
* поиска, систематизации, анализа, классификации информации;
* использования учебной и справочной литературы.

*Планируемый результат:*

* расширить математические представления учащихся о свойствах целых чисел;
* рассмотреть свойства делимости чисел, теоремы о делимости, показать применения делимости в практических целях;
* вспомнить признаки делимости на 2, 5, 10, 3, 9, вывести признаки делимости на 4, 25, 6, и т.д. Рассмотреть признак делимости на 11, уметь применять признаки для решения задач; рассмотреть теорему о делении с остатком и свойства деления, уметь выполнять деление с остатком, находить остаток при делении, неполное частное;
* уметь доказывать: простым или составным является данное число;
* знать различные способы нахождения наибольшего общего делителя, уметь применять при сокращении дробей;
* уметь находить наименьшее общее кратное нескольких чисел, применять в практических целях.

*Структура курса:*

Каждый раздел курса включает в себя теоретический материал, который предполагает систематизацию знаний по определенной теме: определения тех или иных понятий, теоремы, свойства. Затем рассматривается их применение при решении задач. Каждый раздел включает в себя задания для самостоятельной работы учащихся.

Основные компоненты содержания курса:

Числа. Делимость чисел. Основные свойства делимости.

Деление является наиболее трудным арифметическим действием, которое не всегда выполняется на множестве целых чисел. В данном разделе рассматриваются определения и свойства делимости, их применение к решению задач повышенной сложности, например, к исследованию уравнений на наличие целочисленных корней. Теоремы и свойства о делимости даются без строгого доказательства. Метод полной математической индукции рассматривается на информативном уровне с приведением нескольких примеров.

Простые и составные числа.

Определение простых, составных чисел, взаимно простых чисел. Без доказательства дается основная теорема арифметики. Среди простых и составных чисел существуют числа, обладающие интересными свойствами. Одним числам дали название “близнецы”, другие числа признали “совершенными”. А есть, так называемое, “число Шахиризады”. Учащимся предлагается самостоятельно найти информацию об этих числах.

Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное.

В разделе рассматриваются вопросы, связанные с НОД и НОК: способы их нахождения - разложение на простые множители, алгоритм Евклида; формула, связывающая НОД и НОК; применение НОД и НОК для сокращения дробей, сложения дробей.

Деление с остатком.

На делении с остатком основаны различные формы представления целых чисел. Например, при делении числа на 3 могут получиться остатки 0, 1, 2. Поэтому всякое целое число может быть представлено в виде 3k, 3k+1, 3k+2, kZ. Такое разбиение применяют как в теории, так и при решении задач. Практика показывает, что решение задач на деление с остатком представляет определенную трудность для учащихся, поэтому изучение этой темы предусмотрено в рамках данного курса. Без доказательства формулируется теорема о делении с остатком и рассматриваются свойства. Применение их демонстрируется на конкретных примерах.

Признаки делимости чисел.

Ответ на вопрос, делится ли целое число а на целое число b, можно получить непосредственным делением. Однако при решении многих задач, например, при разложении чисел на простые множители, сокращении дробей, вынесении общего множителя за скобки, упрощении уравнений и т.д. этот путь может оказаться излишне трудоемким. Поэтому удобно иметь некоторые признаки, позволяющие без выполнения деления определять, делится одно число на другое или нет. В данном разделе рассматриваются признаки делимости чисел на 2, 5, 4, 25, 3, 9, 11,13,17, 19,… и их применение для решения задач.

Применение признаков делимости чисел.

Такие задания практически полностью отсутствуют в школьных учебниках математики, их решение способствует развитию логического мышления, сообразительности и наблюдательности, умения самостоятельно осуществлять небольшие исследования.

*Формы контроля:*

Эффективность обучения отслеживается следующими формами контроля: промежуточный – домашняя проверочная работа по учебному материалу каждого раздела; защита проектов по учебному материалу курса.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ КУРСА

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № п\п | Темы курса. | Всего часов. |
| 1 | Всё прекрасно благодаря числу. | 2 |
| 2 | Делимость чисел. Основные свойства делимости. | 1 |
| 3 | Простые и составные числа. | 7 |
| 4 | Деление с остатком. | 1 |
| 5 | Деление с остатком. | 2 |
| 6 | Определение сравнения. | 4 |
| 7 | Признаки делимости чисел. | 7 |
| 8 | Применение признаков делимости. | 7 |
| 9 | Это интересно. | 1 |
| 10 | Выступление участников курса с исследовательскими работами.  Подведение итогов работы (рефлексия, диагностика). | 2 |

***Содержание курса.***

* 1. ***Всё прекрасно благодаря числу (1 ч).***

Существует большое количество определений понятию "число". О числах первый начал рассуждать Пифагор. Пифагору принадлежит высказывание "Всё прекрасно благодаря числу". По его учению число 2 означало гармонию, 5 – цвет, 6 –холод, 7 – разум, здоровье, 8 –любовь и дружбу. А число 10 называли "священной четверицей", так как 10 = 1 + 2 + 3 + 4. Оно считалось священным числом и олицетворяла всю Вселенную.

Первое научное определение числа дал Эвклид в своих "Началах": "Единица есть то, в соответствии, с чем каждая из существующих вещей называется одной. Число есть множество, сложенное из единиц". Так определял понятие числа и русский математик Магницкий в своей "Арифметике" (1703 г.).

Считается, что термин "натуральное число" впервые применил римский государственный деятель, философ, автор трудов по математике и теории музыки Боэций (480 – 524 гг.), но еще греческий математик Никомах из Геразы говорил о натуральном, то есть природном ряде чисел.

Понятием "натуральное число" в современном его понимании последовательно пользовался выдающийся французский математик, философ-просветитель Даламбер (1717-1783 гг.).

Первоначальные представления о числе появились в эпоху каменного века, при переходе от простого собирания пищи к ее активному производству, примерно 100 веков до н. э. Числовые термины тяжело зарождались и медленно входили в употребление. Древнему человеку было далеко до абстрактного мышления, хватило того, что он придумал числа: "один" и "два". Остальные количества для него оставались неопределенными и объединялись в понятии "много". Росло производство пищи, добавлялись объекты, которые требовалось учитывать в повседневной жизни, в связи, с чем придумывались новые числа: "три", "четыре"… Долгое время пределом познания было число "семь".

О непонятном говорили, что эта книжка "за семью печатями", знахарки в сказках давали больному "семь узелков с лекарственными травами, которые надо было настоять на семи водах в течение семи дней и принимать каждодневно по семь ложек".

Познаваемый мир усложнялся, требовались новые числа. Так дошли до нового предела. Им стало число 40. Запредельные количества моделировались громадным по тем временам числом "сорок сороков", равным 1600.

Большой интерес вызывает история числа "шестьдесят", которое часто фигурирует в вавилонских, персидских и греческих легендах как синоним большого числа. Вавилоняне считали его Божьим числом: шестьдесят локтей в высоту имел золотой идол из храма вавилонского царя Навуходоносора. Позже с тем же самым значением (неисчислимое множество) возникли числа, кратные 60: 300, 360. Со временем число 60 в Вавилоне легло в основу шестидесятеричной системы исчисления, следы которой сохранились до наших дней при измерении времени и углов.

Следующим пределом у славянского народа было число "тьма", (у древних греков – мириада), равное 10 000, а запределом – "тьма тьмущая", равное 100 миллионам. У славян применяли также и иную систему исчисления (так называемое "большое число" или "большой счет").

В Античном мире дальше всех продвинулись Архимед (III в. до н.э.) в "исчислении песчинок" - до числа 10, возведенного в степень 8×1016 , и Зенон Элейский (IV в. до н. э.) в своих парадоксах – до бесконечности ∞.

Долго и трудно человечество добиралось до 1-го уровня обобщения чисел. Сто веков понадобилось, чтобы выстроить ряд самых коротких натуральных чисел от единицы до бесконечности:1, 2, … ∞ . Натуральных потому, что ими обозначались реальные неделимые объекты: люди, животные, вещи… Самое трудное было придумать нуль. Его придумали на много веков позже, чем другие цифры. Первая точно датированная запись, в которой встречается знак нуля, относится к 876 г.

Как только люди немного научились считать, этот процесс стал приятным времяпровождением для многих людей, склонных к абстрактному теоретизированию. Знания о числах накапливались в течение многих веков, порождая интерес к новым исследованиям, которые в свою очередь приумножали эти накопления. И сейчас, в современной математике, мы имеем величественную конструкцию, известную как теория чисел. Некоторые части этой теории все еще составляют простые игры с числами, а другие относятся к наиболее трудным и сложным разделам математики.

До сих пор у нас нет оснований считать себя выше предрассудков, связанных с числами. Вероятно, у каждого есть знакомые, которые ни за что не посадят за стол 13 гостей, а как мало в гостиницах США этажей и комнат с номером 13. По существу, мы не знаем, откуда взялись подобные «табу» на числа. Существует множество всевозможных объяснений, но большинство из них совершенно безосновательны. Например, в «Библии» записано, что на Тайной вечере было 13 гостей, разумеется, тринадцатым был Иуда. Если же заметить, что многие предметы считаются дюжинами, а число 13 даёт «чертову дюжину», т. е. лишний предмет, то это соображение имеет больший реальный смысл.

В «Библии», особенно в «Ветхом Завете», особую роль играет число 7, в древнегерманском фольклоре часто встречаются числа 3 и 9, индусы же, как видно из их мифологии, неравнодушны к числу 10.

Желающие познакомиться с более развитой «теорией» магических чисел могут сделать это, прочтя восьмую книгу «Республики» Платона. Такая «наука» мало что даёт в смысле математических идей, но она содержит умение обращаться с числами и их свойствами. Как мы дальше увидим, некоторые замечательные проблемы в теории чисел, до сих пор занимающие умы математиков, берут свое начало из греческого учения о магических числах.

Итак, теория чисел – раздел математики, в котором изучаются свойства чисел. Главное их свойство, которое рассматривает теория чисел, это делимость.

Хотя умножение в старину и считалось нелегким делом, однако деление было еще сложнее. В Италии до сих пор сохранилась поговорка: «Трудное дело - деление». Так обычно говорят. Когда оказываются перед почти неразрешимой проблемой. В Средние века людей, умевших производить действие деление, можно было пересчитать чуть ли не по пальцам. Их уважительно называли «магистрами деления». Они переезжали из города в город по приглашениям купцов, желавших привести в порядок свои счета.

Методов деления было придумано немало. Монах-математик Герберт, будущий Папа Римский Сильвестр II, привел в своих сочинениях несколько способов деления на абаке. При этом он придерживался таких принципов:

- как можно меньше применять таблицу умножения, в частности не использовать умножение в уме двузначных чисел па однозначные;

- избегать вычитаний, заменяя их сложениями;

- работа должна выполняться автоматически, без проверок, при которых тоже могут появиться ошибки.

Такие строгие ограничения он ввел, учитывая, сколь неграмотны были монахи, производившие вычисления. Почти никто из них не знал таблицы умножения. Но в итоге правила Герберта оказались настолько сложными, что не были понятны даже самым прилежным счетчикам - абацистам. Когда в Европе появился арабский способ деления, основанный на принятой сейчас позиционной десятичной системе счисления, он получил название «золотое деление». Им мы пользуемся и по сей день. А метод Герберта стали называть «железным делением». Кроме этих способов были и другие. Например, раскладывали делитель на множители, а затем последовательно делили делимое на эти числа. При этом для деления на однозначные числа существовал специальный метод.

Долгое время в Европе конкурировали два способа деления: «золотое деление» и «галера». Прежде всего напомним правила «золотого деления». Разделим 987654 на 345:

Сначала находим наибольшее целое число, которое, будучи умноженным на 346, окажется меньше, чем 987. Такое число - 2, оно и будет первой цифрой частного. Затем в уме умножаем 346 на 2, результат записываем под первыми тремя цифрами делимого и производим вычитание. Потом к полученному числу приписываем следующую цифру делимого и продолжаем процесс, повторяя те же действия.

Второй способ итальянцы называли «галера», из-за того что после окончания вычислений цифры располагаются 13 виде фигуры, напоминающей это гребное судно. У англичан он известен как «метод зачеркиваний», поскольку здесь постоянно приходится зачеркивать цифры. Лука Пачоли считал этот способ самым быстрым.

Метод «галера» отличается от «золотого деления» тем, что в нем нет умножения в уме многозначного числа на однозначное.

Оно заменяется несколькими умножениями однозначных чисел на однозначные и вычитаниями полученных результатов по очереди.

Этот метод родился в Индии, оттуда через арабские страны он и проник в Европу. Правда, у индийцев в результате деления никаких корабликов не получалось. Ведь в то время они не пользовались для вычислений бумагой, а писали на дощечках, которые были покрыты пылью или песком. Вместо того чтобы зачеркивать цифры, они их просто стирали.

Совсем не простые простые числа

Пифагорейцы считали основой всех математических наук арифметику. Многим было бы приятно узнать, например, что если ликвидировать геометрию, арифметика нисколько от этого не пострадает, и наоборот, геометрия без арифметики существовать не может.

Пифагорейская же арифметика приятна ещё и тем, что утруждать себя большими числами там необязательно. Главное в ней - числа от одного до девяти включительно, называемые простыми. Любое громоздкое число можно без труда свести к одному из простых чисел. Допустим, 331. Делаем так: 3+3+1=7. С числом 4529 процедура выйдет посложнее. 4+5+2+9=20. Число 20 находится вне ряда простых чисел. Поэтому загоняем его туда следующим образом: 2+0=2.

К числам пифагорейцы относились трепетно, ибо считали, что с их помощью была сотворена Вселенная. Дело дошло у них до того, что числам присвоили пол: чётным - женский, а нечётным - мужской. Разногласия в этом смысле вызывала единица, которую связывали с Единым - Богом. Некоторые считали это число мужским, другие - женским. Кое-как сошлись на том, что оно чётно и нечётно одновременно. Когда пифагорейцы, по обычаю античных времён, приносили подношения высшим силам, богам выделялось нечётное количество предметов, а богиням - чётное.

Простые числа не были для приверженцев учения Пифагора только материалом для четырёх действий арифметики. Они имели скрытый смысл.

1 - число энергии, действия, причины (потому что оно в начале), достижения цели (в собственных интересах).

2 - число противоположностей, полярностей, таких как день и ночь, добро и зло, мальчик и девочка... В зависимости от ситуации, противоположности могут конфликтовать - спорить и соперничать, или же дополнять друг друга, поддерживая состояние равновесия.

3 - представлялось как число, объединяющее прошлое, настоящее и будущее. Люди, умеющие устроить своё настоящее, предвидя будущее и используя опыт прошлого, мудры, и потому тройку пифагорейцы связывали с мудростью. Заодно это число знаний, так как музыка, математика и астрономия - "три кита" познания мира - как раз образовывали триаду. Кроме того, три - число равновесия, мира и дружбы.

4 - четыре стороны света, четыре времени года, четыре стихии - огонь, земля, вода и воздух, то есть основа всего. То, что надёжно, было, есть и будет всегда. За это пифагорейцы четвёрку весьма уважали. Но их последователи, соглашаясь с идеей устойчивости четвёрки (квадрат - наиболее устойчивая геометрическая фигура), пришли к выводу, что это число - "без полёта", так как слишком связано с земными делами. Впоследствии крест (имеющий четыре стороны) стал символом Земли и всего материального, то есть того, что можно потрогать, понюхать и попробовать на вкус.

5 - число, позволяющее оторваться от привычного хода вещей, рискнуть, пережить приключение. Пятиконечная звезда, или пентаграмма, являлась в средние века магическим знаком. Пифагорейцы тоже её любили: для них она была священным символом света, здоровья и жизненной силы.

6 - это число пифагорейцы называли "совершенством" и "гармонией". Оно связано также со здоровьем и равновесием (поскольку состоит из двух троек).

7 - с этим числом связаны семь цветов радуги, семь нот гаммы, семь планет, известных древним грекам, - то есть явления неординарные, 7 - число случая, удачи и откровения свыше.

8 - для пифагорейцев это было таинственное и священное число, связанное с Элевсинскими мистериями - древнегреческим празднеством, которое проводилось раз в пять лет в городе Элевсине в честь богини Цереры и её дочери Персефоны. Оно было не для всех. Что конкретно происходило на этом празднике, знали только те, кого туда допускали - посвящённые. (Пифагора, между прочим, допустили.) В современном варианте восьмёрка - число материального благополучия и суперстабильности (дважды четыре).

9 - число человека со всеми его недостатками, так как до совершенного числа пифагорейцев, 10, девятке не хватает единицы. Девятка была символом беспредела, так как за нею ничего нет, кроме бесконечного числа 10. Впоследствии толкователи чисел стали объяснять девятку как число успеха на том основании, что это самое большое из простых чисел.

Наука о тайном значении чисел стала потом называться нумерологией.

Люди, проникшиеся хотя бы отчасти учением Пифагора о числах, легко откроют для себя подлинный смысл школьных отметок.

Ставить единицу учителя как-то стесняются. И правильно. Это не осознаваемые самими педагогами отголоски пифагорейства. Великий философ и тот не решался включать её в ряд простых чисел, полагая, что она имеет отношение к миру божественного. Единица в журнале не огорчает, а изумляет, как некое потустороннее явление. Если уж преподаватель влепил тебе "кол", то тем самым он как бы говорит: "Я тут бог, и всё в моей власти!" Известно, что "кол" удобно исправлять на четвёрку. Это действие также поддаётся расшифровке с помощью пифагорейской философии. Арифметически для получения четвёрки из единицы к последней нужно прибавить три. А 3 - число примирения. Отвечаешь выученный параграф - и заключаешь с учителем перемирие.

Двойка неудобна тем, что её надо исправлять. Это обстоятельство делает её непопулярной. Пифагорейцы тоже не очень её любили - за, соответственно, двойственность. Эта отметка прямо указывает на полярность, противостояние, конфликт: ты по одну сторону баррикад, а наука - по другую.

Тройка занимает промежуточное положение между очевидным незнанием, которое символизирует двойка, и твёрдым знанием, которое подтверждает четвёрка. Она указывает на соглашательскую позицию педагога: "Ступай, мол, с миром, не будем ссориться". Если по некоему предмету у человека за всю четверть не набирается иных отметок, кроме двойки и четвёрки, учитель, подводя итоги, может выставить ему среднее арифметическое: примиренческую тройку. Дескать, была охота связываться...

Рисуя против твоей фамилии четвёрку, преподаватель подразумевает, что основная информация тобою усвоена. Четвёрка означает, что твой рейтинг, с его точки зрения, устойчив. В то же время, число это настолько стабильно, что его неохота менять. С одной стороны, педагогу может быть психологически трудно видеть в тебе человека, способного получать пятёрки. С другой стороны, и ты, глядя на свою четвёрку, можешь благодушно думать: "И так сойдёт". Чтобы вышла пятёрка, к четвёрке надо прибавить единицу. То есть для того, чтобы заделаться отличником, требуется дополнительная энергия.

Получая пятёрку, ты приобщаешься к кругу избранных. То есть к статусу простого смертного, существующего, как все, среди четырёх стихий и четырёх сторон света (4), ты прибавляешь привилегии небожителя (1) - особое отношение со стороны окружающих.

Подобным образом можно изучать цены в магазине, или номера машин, или телефонные номера.

Число имени

В прежние времена существовали алфавиты, где буквы одновременно являлись числами. Таким был и родной алфавит Пифагора, древнегреческий. Каждая буква имела не только цифровое выражение, но и своё особое имя и отдельный смысл. Считается, кстати, что скрытое значение буквы ипсилон первым понял Пифагор (это вторая буква его имени). Ипсилон, по форме напоминающая развилку, символизировала выбор между дорогой добродетели и путём порока. Правое ответвление буквы принято было изображать прямой чертой, направленной к небу: она-то и соответствовала добродетели. А левую - загогулиной, повёрнутой к низу: она означала порок. Ипсилон даже прозвали пифагоровой буквой, и в древнем мире довольно долго бытовало выражение: "По пифагоровой букве выбирать дорогу", то есть делать в жизни достойный выбор.

Люди, посвящённые в эти замечательные свойства греческого алфавита, могли применять его для предсказаний, а также - тайнописи. Каждое слово, составленное из греческих букв, по особой системе преобразовывалось в ряд чисел. Их складывали и получали итоговое число. Таким образом зашифровывались знания, предназначавшиеся не для всех. А само искусство шифрования называлось гематрией.

Поскольку Пифагор не оставил после себя рукописей, средние века уловили только эхо его учения. Но этого было достаточно для того, чтобы числа вновь обрели не только математический смысл, и возникла наука об их магическом значении - нумерология. Когда в XV веке в Европе вошли в обиход так называемые арабские числа (которыми мы пользуемся и поныне), связь между числами и буквами стала менее явной, а наука ещё более тайной.

Обрывки средневековой нумерологии долетели до наших дней. В современном варианте она больше напоминает игру. Можно, например, взять и высчитать число своего имени.

Хотя наш теперешний алфавит не относится к тому, где буквы и цифры обозначались одинаково (в древнерусском языке так было), для русских букв тоже существуют числовые эквиваленты. 1 2 3 4 5 6 7 8 9

А Б В Г Д Е Ё Ж З

И Й К Л М Н О П Р

С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ

Ъ Ы Ь Э Ю Я

Возьмём, например, имя Фёкла. Букве "Ф" соответствует в таблице число 4; букве "ё" - 7; "к" - 3; "л" - 4; "а" - 1. Складываем: 4+7+3+4+1=19. Эта сумма не укладывается в ряд простых чисел. Поэтому складываем ещё единицу и девятку. Получаем 10. 1+0=1. Стало быть, число имени Фёкла - единица. Согласно науке о числах, его должна носить энергичная особа с далеко идущими планами.

Подобную процедуру можно проделать с любым именем. Имя с точки зрения нумерологии - это не просто то, на что мы откликаемся. Это волшебный набор звуков, который либо помогает человеку жить (если имя соответствует характеру), либо мешает, если имя выбрано неправильно. Иногда бывает, что под собственным именем не удаётся добиться намеченной цели. Тогда выбирают псевдоним. Как правило, это делается без оглядки на Пифагора. Но если рассмотреть псевдонимы в нумерологическом ракурсе, получаются интересные вещи. Скажем, Анна Горенко с числом имени 2 могла бы просто быть человеком с неуравновешенным характером и писать стихи "в стол". Но она, начиная свой путь в поэзии, взяла себе псевдоним Ахматова. Обсчитав имя Анна Ахматова, получаем 12. 1+2=3. Тройка у пифагорейцев - число гармонии и мудрости, за которые и ценят стихи Ахматовой. Последователи великого грека считали, что это число объединяет прошлое, настоящее и будущее, - и поэтесса осталась в литературе навсегда как одна из самых талантливых представителей поэзии Серебряного века.

Полезно высчитать не только число своего полного имени, но и число того уменьшительного имени или прозвища, с которым к тебе чаще всего обращаются. Это поможет пролить свет на то, как к тебе относятся и чего от тебя ждут.

1 - число человека, который "сам себе режиссёр". Ему нужно много и желательно - сразу. Ради этого он готов действовать (а думает иногда уже потом). Поскольку единицу в нумерологии обычно "добывают" из десятки, совершенного числа пифагорейцев (1+0=1), такой человек не любит, когда ему возражают, а любит, когда его считают важной персоной. Имя или псевдоним, соответствующие единице, хорошо выбирать в тех случаях, когда надо быстро достичь намеченной цели. Окружающие, называя тебя таким именем, хотят видеть в тебе личность энергичную и на многое способную. Если у тебя совсем другой характер, вряд ли ты будешь любить этот вариант своего имени.

2- число созерцателя. Потому что, когда не можешь выбрать из двух, проще не выбирать ничего. Для того чтобы человек с соответствующим именем узрел смысл в деятельности, ему надо противопоставить что-нибудь во внешнем мире, какой-нибудь кнут или пряник. Двойка как число имени вовсе не означает, что он будет получать двойки, но если уж получит, то не станет исправлять, если не посулить ему нечто приятное, или не пригрозить, скажем, гневом директора школы.

3 - число человека, желающего "вписаться" в коллектив. Оно указывает на способность соответствовать. Тот, кто стремится к популярности, может попытаться подобрать себе псевдоним, число которого - тройка. 3 - идеально для школьника; пифагорейцы считали его числом знаний.

4 - удобно для домашнего имени или прозвища, типа "птичка", "зайчик", а также просто "заяц". Человеку с числом имени 4 милы четыре угла его родной комнаты. Четвёрка намекает на солидность натуры и нежелание рисковать.

5 - подходит человеку, который способен творчески преобразовывать окружающую действительность и даже отчасти её создавать. Когда-то знаменитый клоун Юрий Никулин (обладатель именно такого числа имени) жонглировал на арене яблоками, поочерёдно откусывая от каждого по кусочку и, в конце концов, съедая свой "реквизит". Как человек творческий, он даже в столь обычном деле, как поедание яблок, усмотрел возможность придумать остроумный цирковой номер.

Впрочем, пятёрка сгодится и для эгоиста, который считает, что весь мир - для него одного.

6 - число человека, обладающего чувством меры. Он не берётся не за своё дело. Он честно работает, не требуя взамен больше того, что ему причитается. Проникая в твою жизнь под видом числа домашнего имени или прозвища, шестёрка может служить намёком на то, что тебя призывают к бескорыстному созидательному труду. Не исключено, впрочем, что в тебе видят идеал: Пифагор считал число 6 совершенным числом. Наталья Николаевна Гончарова, чью красоту современники считали совершенной, прославилась под именем Натали, число которого - 6.

7 - подойдёт тому, кто хочет выделиться из толпы своей оригинальностью (или просто обращать на себя внимание, сам того не желая). Возможности у него большие, но и испытания могут быть не меньше. Кроме того, семёрка похожа на качели: с одной стороны тройка и с другой стороны тройка, а между ними - единица: 3+1+3=7. Опытный в обращении с качелями человек знает, что качаться на них в одиночку хорошо тогда, когда стоишь на середине, то есть соблюдаешь равновесие. Если же вспрыгнуть с краю, то для плавности движения понадобится кто-то ещё, второй. Чтобы чувствовать себя самостоятельным, человеку с числом имени 7 надо стараться избегать перекосов.

8 - к лицу тому, кто любит делать ремонт, или переставлять мебель в целях обновления жизни. Восьмёрка неплоха также для бизнесмена или для того, кто желает приобщаться к тайнам, будь то любитель детективов или поклонник астрологии. Но ему придётся постоянно помнить о "законе бумеранга": сколько хорошего или дурного посылаешь в пространство, столько же получаешь в ответ: 8=4+4. Остальным может казаться странным такой вариант своего имени, который в сумме образует восьмёрку.

9 - может относиться к тому, кто талантлив, но не развивает свой талант, ссылаясь на неблагоприятные обстоятельства, - или, наоборот, развивает его вопреки всему. Девять - это 3+3+3. Страшно даже подумать, какое количество знаний способен вобрать в себя человек, обладающий таким числом имени!

Трудно представить себе, как бы всё вышеизложенное прокомментировал Пифагор. Сам он, конечно же, умел проникать в тайный смысл имён, но делал это, видимо, иначе.

Наука о числах и философия.

Проникая в свойства чисел, объясняя их различные сочетания, Пифагор пытался создать науку всех наук. Все числа он разделил на два вида: чётные и нечётные, и с удивительной чуткостью выявил свойства чисел каждой группы. Чётные числа обладают следующими свойствами: любое число может быть разделено на две равные части, каждая из которых либо чётна, либо нечётна. Например, 14 делится на две равные части: 7+7, где обе части нечётные; 16 = 8 + 8, где обе части чётные. Пифагорейцы рассматривали чётное число, прототипом которого была дуада, неопределённым и женским. "Чётные числа, допускавшие раздвоение, казались более разумными, олицетворяли некоторое положительное явление", - писал Аристотель. Так число получало характер, теряло вечное, абстрактное начало.

Пифагорейцы рассматривали нечётное число, прототипом которого была монада, определённым и мужским, хотя по поводу единицы среди них существовали определённые разногласия. Некоторые считали его положительным, потому что если его добавить к нечётному числу, оно станет чётным и, таким образом, рассматривается как андрогенное число, совмещающее как мужские, так и женские атрибуты, значит, оно и чётно и нечётно.

Обычаем у пифагорейцев было приношение высшим богам нечётного числа предметов, в то время как богиням и подземным духам приносить чётное число.

Нечётные числа делятся на 3 общих класса: несоставные, составные и несоставные-составные.

Несоставные числа - это такие числа, которые не имеют других делителей, кроме себя самого и единицы. Это числа 3, 5, 7, 11, 13, 17 и т.д.

Составные числа - это числа, делимые не только сами на себя, но и на некоторые другие числа. Такими числами являются те из нечётных чисел, которые не входят в группу несоставных. Это числа 9, 15, 21, 25, 27, 33, 39 и т.д.

Несоставные-составные числа - это числа, не имеющие общего делителя, хотя каждое из них делимо. Если взять два числа и обнаружить, что они не имеют общего делителя, такие числа можно назвать несоставными-составными числами. Например, числа 9 и 25. 9 делимо на 3, а 25 на 5, но ни одно из них не делимо на делитель другого, они не имеют общего делителя. Несоставными-составными они называются потому, что каждое из них имеет индивидуальный делитель, а поскольку эти числа не имеют общего делителя, они называются несоставными. Таким образом, несоставные-составные числа обнаруживаются только попарно друг с другом.

Монада, или Священная Единица, называется так потому, что всегда остаётся в одном и том же состоянии, то есть отделённой от множественности. Монада означает:

1) всё - включающее Единое;

2) сумму любых комбинаций чисел, рассматриваемую как целое.

Таким образом, Вселенная рассматривается как Монада, но индивидуальные части по отношению к частям, из которых они состоят. Некоторые пифагорейцы рассматривали монаду как синоним единого. Её атрибутами они называли следующее: она - чётна и нечётна, она есть Бог, потому что является началом м концом всего, она также есть вместилище материи, потому что производит дуаду, которая существенно материальна. Монада для пифагорейцев тождественна великой силе, сосредоточенной в центре Вселенной и контролирующей движение планет вокруг себя. Она называется также зачаточным разумом, потому что является началом всех мыслей во Вселенной.

Монада сравнивается с вечностью, которая не знает ни прошлого, ни будущего. Она называется любовью, согласием и благочестием, потому что неделима. Монада есть причина истины и структура симфонии - всё потому, что она изначальна.

Дуада олицетворяет собой неравенство, нестабильность, подвижность, дерзость (потому что является первым числом, отделившим себя от божественного Единого). Дуада есть символ Великой Материи.

Пифагорейцы чтили монаду и презирали дуаду, так как считали, что она символизирует полярность и невежество. В ней существует смысл разделённости, который есть начало невежества. От дуады идут споры и соперничество, пока введением монады не восстанавливается равновесие.

Триада - это первое равновесие единиц, это первое число, которое по-настоящему нечётно. Число 3 сравнивается пифагорейцами с мудростью, потому что люди организуют настоящее, предвидят будущее и используют опыт прошлого. Триада есть число познания музыки, геометрии, астрономии и науки о небесных и земных телах. Куб этого числа имеет силу лунного цикла.

Пифагор учил, что триада - священное число, потому что она создаётся из монады (Божественного Отца) и дуады (Великой Матери) и, следовательно, является андрогенной. Она символизирует тот факт, что Бог порождает свои меры из себя, и Его творческий аспект символизируется треугольником.

Древний философ говорил также,что всё в природе разделено на три части, и, что никто не может стать воистину мудрым, пока не будет представлять каждую проблему в виде треугольной диаграммы.

Тетрарда, 4, рассматривалась как изначальное, всему предшествующее число, корень всех вещей и наиболее совершенное из чисел. Все тетрарды интеллектуальны, из них возникает порядок.Пифагор представлял себе тетрарду символом Бога, потому что она символ первых четырёх чисел, из которых состоит декада.

Душа человека, считал древний философ, состоит из тетрарды, а именно из четырёх сил: ума, науки, мнения и чувства.

Тетрарде даны следующие имена: "сила", "стремительность", "мужество", "держатель ключа к Природе", так как она связывает все вещи, числа, элементы и сцоны.

Пентада, 5, есть союз чётного и нечётного чисел (2 и 3). Она называлась равновесием, потому что разделяет совершенное число 10 на две равные части. Для пифагорейцев пентада олицетворяла собой жизненность и здоровье, символом которых была пятиконечная звезда.

Пентада есть символ Природы, потому что, будучи умножена сама на себя, она возвращает при этом своё исходное число как последнюю цифру в произведении, точно так же как зёрна пшеницы проходят через Природный процесс и воспроизводят семена пшеницы в виде окончательной формы своего собственного роста.

Гексада, 6, представляет сотворение мира. Она называлась пифагорейцами совершенством всех частей. Она является символом женитьбы, потому что образует союз двух треугольников, женского и мужского. Ключевыми словами к гексаде являются следующие: "время", поскольку она является измерителем длительности; "панацея", потому что здоровье есть равновесие, а гексада есть равновесное число.

Гептада, 7, называется пифагорейцами числом "религий", потому что у многих древних народов она является священным числом.

Пифагор придавал большую важность числу 7, которое, состоя из 3 и 4, означает соединение человека с божеством, изображение закона эволюции. Мистическая природа человека состоит из тройного духовного тела и четырёхсоставной материальной формы, которые символизированы в кубе, имеющем шесть граней и таинственную седьмую точку внутри. Шесть граней - это направления частей света или же направления шести стихий: земли, воздуха, огня, воды, духа и материи. В середине стоит 1, которая представляет фигуру стоящего человека, от центра которого в кубе расходятся шесть пирамид. Отсюда происходит великая оккультная аксиома: "Центр - отец всех направлений, измерений и расстояний".

Огдоада, 8, была священной, потому что это число первого куба, который имеет 8 вершин и является чётно-чётным числом, наиболее близким к 10. Восемь делится на две четвёрки, каждая четвёрка на двойки, каждая двойка делится на единицы, таким образом восстанавливая монаду. Слова "любовь", "совет", "расположение", "закон" и "согласие" являются ключевыми к огдоаде. Огдоада заимствует свою форму от двух переплетённых змей на Кадуцее Гермеса и частично от извилистого движения небесных тел.

Эннеада, 9, есть первый квадрат нечётного числа. Эннеада ассоциируется у пифагорейцев с ошибками и недостатками, потому что ей не достаёт до совершенного числа 10 одной единицы. Она называется числом человека из-за девяти месяцев его эмбрионного развития. Эннеада - это и безграничное, и ограниченное число. Безграничной она называется потому, что за ней ничего нет. Кроме бесконечного числа 10. Ограниченной - так как собирает все цифры внутри себя.

Декада, 10, образуемая из сложения первых четырёх чисел и заключающая в себе число 7, есть самое совершенное число, число всех вещей, архетип Вселенной. Пифагор говорил, что декада выражает все начала божества, слившихся в одном единстве. Она называлась и небом, и миром. Декада объемлет все арифметические и геометрические пропорции. Она совершенствует все числа и объемлет в своей природе чётные и нечётные, добрые и злые. Поэтому декада есть природа числа, так как все народы приходят к ней, и когда они приходят к ней, они возвращаются к монаде.

Мистика цифр оказалась живучей и дожила до наших дней. Много веков спустя после смерти Пифагора церковники изобрели "чёртову дюжину", объявили 12 знаком счастья, а 666 нарекли числом зверя.

Задание.

Биографическая миниатюра. Пифагор.

* 1. ***Делимость чисел . Основные свойства делимости чисел (1ч).***

Делимость **-** способность одного числа делиться на другое.

Пусть a и b – натуральные числа и a больше или равно b. Говорят, что a нацело делится на b, если существует натуральное число c, при умножении которого на b получается a

a \* b = с .

I. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДЕЛИМОСТИ.

1) ДЕЛИМОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

ЗАДАЧА. Делится ли произведение 369 \* 555 на 37?

Число 555 делится на 37, т.к. 37 \* 15 = 555, ТОГДА 369 \* 555 = 369 (15 \* 37) = (369 \* 15) 37, т.е. число 369 \* 555 делится на 37.

СВОЙСТВО I (признак делимости произведения).

Если одно из двух (или более чисел ) делится на некоторое число, то и произведение этих чисел делится на это число.

СВОЙСТВО II. Если первое число делится на второе, а второе делится на третье, то и первое число делится на третье.

УПРАЖНЕНИЕ.

Не выполняя вычислений, укажите произведения, значения которых делятся на 5:

28 \*25; 73 \* 50; 34 \* 12; 33 \* 25; 36 \* 7; 94 \* 18; 13 \* 45 \* 8; 5 \* 7 \* 11.

Свойство II позволяет сделать два вывода:

1) Если число a делится на число b, то число a делится на каждый делитель числа b.

2) Если число a не делится хотя бы на один делитель числа b, то число a не делится на число b.

ПРИМЕРЫ.

1) Если число 612 делится на 12, то оно делится на любой из делителей этого числа: 1; 2; 3; 4; 6; 12.

2) Если число 725 не делится на 3, то оно не будет делиться ни на одно число, кратное 3: 6; 9; 12; 15; 18; 21 и т.д.

3) Нечетное число не имеет четных делителей.

На вопрос, как разделить произведение на число, отвечает следующее правило.

ПРАВИЛО ДЕЛЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА ЧИСЛО.Чтобы разделить произведение двух или нескольких чисел на заданное число, нужно на это число разделить только один множитель, а остальные оставить без изменения и затем выполнить умножение.

НАПРИМЕР:

1) (125\*450):25 = (125:25)\*450 = 5\*450 = 2250;

2) (24\*5\*17):12 = (24:12)\*5\*17 = 2\*5\*17 = 170.

УПРАЖНЕНИЕ.

Раздели на 9 произведения:

28\*9\*35; 18\*752\*8000; 76\*512\*360; 155\*810\*34; 4500\*7\*398; 83\*63000\*98.

2) ДЕЛИМОСТЬ СУММЫ И РАЗНОСТИ.

ЗАДАЧА. Разделить число 7248 на 12.

Число 7200 делится на 12, потому что 7200 = 12\*600; 48 тоже делится на 12, потому что 48 = 12\*4. Из этого следует, что 7248 делится на 12, потому что на основании распределительного закона умножения можно записать:

7248 = 7200 + 48 = 12\*600 + 12\*4 = 12\*(600 + 4) = 12\*604.

Значит, 7248 : 12 = 7200 : 12 + 48 : 12 = 600 + 4 = 604.

ЗАДАЧА. Разделить на 7 число 1323.

Рассуждая аналогично предыдущим рассуждениям, получаем:

1323 = 1400 – 77 = 7\*200 – 7\*11 = 7\*(200 -11) = 7\* 189.

Значит, 1323 : 7 = 1400:7 – 77:7 = 200 – 11 = 189.

2) ДЕЛИМОСТЬ СУММЫ НА ЧИСЛО ( РАЗНОСТИ НА ЧИСЛО).

Приведенные решения позволяют сделать несколько выводов.

СВОЙСТВО I (признак делимости суммы). Если каждое слагаемое суммы делится на заданное число, то и вся сумма делится на это число.

СВОЙСТВО II (признак делимости разности). Если и уменьшаемое, и вычитаемое делятся на заданное число, то и разность делится на это число.

ПРАВИЛО ДЕЛЕНИЯ СУММЫ НА ЧИСЛО***.*** Чтобы сумму двух или нескольких слагаемых разделить на заданное число, можно разделить на это число каждое слагаемое и полученные результаты сложить.

ПРАВИЛО ДЕЛЕНИЯ РАЗНОСТИ НА ЧИСЛО. Чтобы разность разделить на заданное число, нужно на это число разделить и уменьшаемое, и вычитаемое и из первого произведения вычесть второе.

ЗАМЕЧАНИЕ.Если более одного слагаемого суммы не делятся на заданное число, то сумма может делиться и не делиться на это число.

УПРАЖНЕНИЕ.

Укажите выражения, которые кратны 7:

28+35; 44+12; 25+35\*2; 14+23; 7\*15+42; 12\*63+8\*19.

Для закрепления материала решить следующие задания.

1) Объясните, почему следующие произведения делятся на 12:

12\*48; 12\*120; 120\*51; 24\*17; 11\*36; 13\*48.

2) Не вычисляя произведения, установите, делится ли оно на заданное число:

а) 508\*12 на 3;

б) 85\*3719 на 5;

в) 2510\*74 на 37;

г) 45\*26\*36 на 15;

д) 210\*29 на 3 и на 29;

е)3800\*44\*18 на 11, 100 и 9?

3)Подберите три значения x так, чтобы произведение: а) 3x делилось на 5;

б) 12x делилось на 7; в) 9x делилось на 6;

г) 8x делилось на 14.

4)Представляя число в виде суммы, докажите, что:

а) 123123 делится на 123;

б)111333 делится на 111.

2.Задания для самостоятельного решения.

**Задание 1.** Используя свойства делимости и данные о делимости на число ***к***каждого слагаемого, определите, делится ли на ***к*** сумма или произведение.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **1 число** | **2 число** | **3 число** | **Сумма** | **Произведение** |
| д | д | д |  |  |
| н | д | д |  |  |
| д | н | д |  |  |
| д | д | н |  |  |
| н | н | д |  |  |
| н | д | н |  |  |
| д | н | н |  |  |
| н | н | н |  |  |

**Решение.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **1 число** | **2 число** | **3 число** | **Сумма** | **Произведение** |
| д | д | д | д | д |
| н | д | д | н | д |
| д | н | д | н | д |
| д | д | н | н | д |
| н | н | д | Может делиться,  может не делиться | д |
| н | д | н | Может делиться,  может не делиться | д |
| д | н | н | Может делиться,  может не делиться | д |
| н | н | н | Может делиться,  может не делиться | н |

**Задание 2.** Придумайте по два примера на каждое свойство делимости.

**Задание 3.** Укажите, какие из следующих утверждений ложные.

А) Если слагаемые не делятся на какое-то число, то и сумма не делится на это число.

Б) Если произведение двух чисел делится на какое-либо число, то хотя бы один из множителей делится на это число.

В) Если множители не делятся на какое-нибудь число, то и произведение не делится на это число.

Г) Если разность делится на какое-нибудь число, то и уменьшаемое, и вычитаемое делится на это число.

**Решение.**

А) Ложное. Пример: 7+3 = 10; 7 и 3 не делятся на 5, а 10 делится на 5.

Б) Ложное. Пример: 6 ⋅ 10 = 60; 60 делится на 15, а ни 6, ни 10 не делятся.

В) Ложное. Пример: 6 ⋅ 10 = 60; ни 6, ни 10 не делятся на 15, а 60 делится на 15.

Г) Ложное. Пример: 23 - 21 = 2. Разность 2 делится на 2, а 23 и 21 на 2 не делятся.

* 1. ***Простые и составные числа (7ч.)***

Должно быть, одним из первых свойств чисел, открытых человеком, было то, что некоторые из них могут быть разложены на два или более множителя, например,

6 = 2 • 3, 9 = 3 • 3, 30 = 2 • 15 = 3 • 10,

в то время как другие, например,

3, 7, 13, 37,

не могут быть разложены на множители подобным образом. Давайте вспомним, что вообще, когда число

*c = a b* (1.1)

является произведением двух чисел *a* и *b* , то мы называем *а* и *b множителями* или *делителями* числа *с* . Каждое число имеет *тривиальное разложение* на множители

с = 1 • с = с • 1. (1.2)

Соответственно мы называем числа 1 и *с тривиальными делителями* числа *с* .

Любое число *с* > 1, у которого существует нетривиальное разложение на множители, называется *составным* . Если число *с* имеет только тривиальное разложение на множители (1.2), то оно называется *простым* . Среди первых 100 чисел простыми являются следующие 25 чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Все остальные числа, кроме 1, являются составными. Мы можем сформулировать следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Любое целое число с> 1 является, либо простым, либо имеет простой множитель.*

Доказательство . Если *с* не является простым, числом, то у него есть наименьший нетривиальный множитель *р* . Тогда *р* – простое число, так как если бы *р* – было составным, то число *с* имело бы ещё меньший множитель.

Теперь мы подошли к нашей первой важной задаче в теории чисел: как определить, является ли произвольное число простым или нет, и в случае, если оно составное, то как найти какой‑либо его нетривиальный делитель?

Первое, что может прийти в голову, – это попытаться разделить данное число *с* на все числа, меньшие его. Но надо признать, что этот способ мало удовлетворителен. Согласно теореме 2.1.1 достаточно делить на все простые числа, меньшие √*с* . Но мы можем значительно упростить задачу, заметив, что при разложении на множители (1.1) оба множителя *а* и *b* не могут быть больше, чем *c* , так как в противном случае мы получили бы

ab > √*с •* √*с* ,

что невозможно. Таким образом, чтобы узнать, имеет ли число *с* делитель, достаточно проверить, делится ли число *с* на простые числа, не превосходящие – √*с.*

Пример 1. Если с = 91, то √*с* = 9….; проверив простые числа 2, 3, 5, 7, находим, что 91 =7 13.

Пример 2. Если с =1973, то находим, что √*с* = 44…. Так как ни одно из простых чисел до 43 не делит *с* , то это число является простым.

Очевидно, что для больших чисел этот метод может быть очень трудоемким. Однако здесь, как и при многих других вычислениях в теории чисел, можно использовать современные методы. Довольно просто запрограммировать на ЭВМ деление данного числа *с* на все целые числа до √*с* и печатание тех из них, которые не имеют остатка, т. е. тех, которые делят *с*.

Другим очень простым методом является применение таблиц простых чисел, т. е. использование простых чисел уже найденных другими. За последние 200 лет было составлено и издано много таблиц простых чисел. Наиболее обширной из них является таблица Д. X. Лемера, содержащая все простые числа до 10 000 000.

Система задач 3.1.

**1.**  Какие из следующих чисел являются простыми: а) год вашего рождения; б) текущий год; в) номер вашего дома.

**2.**  Найдите простое число, следующее за простым числом 1973.

**3.**  Заметим, что числа от 90 до 96 включительно являются семью последовательными составными числами; найдите девять последовательных составных чисел.

4. Биографическая миниатюра. Д. X. Лемер.

### Простые числа Мерсенна.

В течение нескольких столетий шла погоня за простыми числами. Многие математики боролись за честь стать открывателем самого большого из известных простых чисел. Разумеется, можно было бы выбрать несколько очень больших чисел, не имеющих таких очевидных делителей, как 2, 3, 5, 7, и проверить, являются ли они простыми числами. Этот способ, как мы вскоре убедимся, не очень эффективен. Теперь эта погоня утихла, она идет только в одном направлении, оказавшемся удачным.

Простые числа Мерсенна являются простыми числами специального вида

*Мр* = 2p‑ 1, (2.1)

где *р* – другое простое число. Эти числа вошли в математику давно, они появляются еще в евклидовых размышлениях о совершенных числах, которые мы рассмотрим позже. Свое название они получили в честь французского монаха Мерена Мерсенна (1588–1648), который много занимался проблемой совершенных чисел.

Если начать вычислять числа (2.1) для различных простых чисел *р* , то видно, что не все они оказываются простыми. Например,

*М* 2 = 22 – 1 = 3 = простое,

*М* 3 = 23 – 1 = 7 = простое,

*М* 5 = 25 – 1 = 31 = простое,

*М* 7 = 27 – 1 = 127 = простое,

*М* 11 = 211 – 1 = 2047 = 23 89.

Общий способ нахождения больших простых чисел Мерсенна состоит в проверке всех чисел *Мp* для различных простых чисел *р* .

Эти числа очень быстро увеличиваются и столь же быстро увеличиваются затраты труда на их нахождение. То, что с этой работой все‑таки можно справиться уже для довольно больших чисел, объясняется существованием эффективных способов выяснения простоты для чисел такого вида.

В исследовании чисел Мерсенна можно выделить раннюю стадию, достигшую своей кульминации в 1750 году, когда Леонард Эйлер[[1]](#footnote-1) установил, что число *М* 31 является простым. К этому времени было найдено восемь простых чисел Мерсенна, соответствующих значениям

*р* = 2, *р* = 3, *р* = 5, *р* = 7, *р* = 13, *р* = 17, *p* = 19, *р* = 31.

Эйлерово число *M* 31 оставалось самым большим из известных простых чисел более ста лет. В 1876 году французский математик Лукас установил, что огромное число

*М* 127 = 170141183460469231731687303715884105727

является простым числом. Ну и число! С 39 цифрами. Простые числа Мерсенна, меньшие этого числа, задаются значениями *р* , указанными выше, а также значениями

*р* = 61, *р* = 89, *р* = 107.

Эти 12 простых чисел Мерсенна были вычислены с помощью только карандаша и бумаги, а для вычисления следующих уже использовались механические настольные счетные машины. Появление вычислительных машин с электрическим приводом позволило продолжить поиски, доведя их до *р* = 257. Однако результаты были неутешительными, среди них не оказалось новых простых чисел Мерсенна.

Затем задача была переложена на плечи ЭВМ. Создание все более высокопроизводительных ЭВМ дало возможность продолжить поиск новых простых чисел Мерсенна. Д. X. Лемер установил, что значения

*р* = 521, *р* = 607, *р* = 1279, *р* = 2203, *р* = 2281

дают простые числа Мерсенна. Дальнейшие поиски также увенчались успехом. Ризель (1958) показал, что

*р* = 3217,

дает простое число Мерсенна, а Гурвиц (1962) нашёл еще два таких значения:

*р* = 4253, *р* = 4423.

Огромного успеха добился Гиллельс (1964), который нашел простые числа Мерсенна, соответствующие значениям

*р* = 9689, *р* = 9941, *р* = 11213.

Итак, общий урожай составил 23 простых числа Мерсенна, и, так как мощности ЭВМ продолжают увеличиваться, мы надеемся на дальнейший успех. Простое число Лукаса *М* 127, как мы уже упоминали, имеет 39 цифр. Даже вычисление самого большого из известных простых чисел, числа *M* 11213, является довольно сложной задачей и, по‑видимому, нет смысла воспроизводить здесь это число. Если же мы захотим узнать, сколько цифр содержит это число, то мы можем сделать это, не вычисляя самого числа.

Вместо нахождения количества цифр числа *Мр* = 2*p* – 1 рассмотрим эту задачу для числа *Мр* + 1 = 2р.

Эти два числа имеют одинаковое количество цифр, так как если бы число *Мр* + 1 имело на одну цифру больше, то оно должно было бы оканчиваться на 0. Но это невозможно ни для какой степени числа 2, что видно из ряда

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 266….

в котором последняя цифра в каждом числе может быть только одним из чисел

2, 4, 8, 6.

Чтобы найти количество цифр числа 2*p* , вспомним, что Ig 2*p* = *p* lg 2. Из таблиц находим, что Ig 2 приближенно равняется 0,30103, откуда

lg 2*p* = *p* lg 2 = р • 0,30103.

Для *р* = 11213 получаем

lg 211213= 3375,449…,

и так как характеристика этого числа равна 3375, то мы приходим к выводу, что число 2p имеет 3376 цифр.

Итак, мы можем сказать следующее.

Самое большое известное в настоящее время простое число имеет 3376 цифр. (Здесь слова «в настоящее время» имеют существенное значение.) Это число было найдено на ЭВМ Иллинойского университета (США). Математический факультет этого университета был так горд своим достижением, что изобразил это число на своем почтовом штемпеле, таким образом воспроизводя его на каждом отсылаемом письме, для всеобщего восхищения.

1. Биографическая миниатюра. Мерен Мерсенн, Леонард Эйлер, Лукас, Гиллельс, Ризель.

### Простые числа Ферма.

Существует также еще один тип простых чисел с большой и интересной историей. Они были впервые введены французским юристом Пьером Ферма (1601–1665), который прославился своими выдающимися математическими работами. Первыми пятью простыми числами Ферма являются

*F* 0 = 22° + 1 = 3,

*F* 1 = 22¹+ 1 = 5,

*F* 2 = 22² + 1 = 17,

*F* 3 = 22³ + 1 = 257,

*F* 4 = 22ˆ*4* + 1 = 65 537.

В соответствии с этой последовательностью общая формула для простых чисел Ферма должна иметь вид

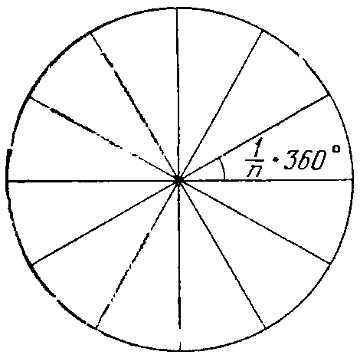
*Fn* = 22ⁿ+1. (3.1)

Ферма был абсолютно уверен, что все числа этого вида являются простыми, хотя он не проводил вычислений других чисел, кроме указанных пяти. Однако это предположение было сдано в архив неоправдавшихся математических гипотез после того, как Леонард Эйлер сделал еще один шаг и показал, что следующее число Ферма

*F* 5 = 4 294 967 297 = 641 6 700 417

не является простым, что и показывает приведенная запись. Возможно, что этим история чисел Ферма была бы закончена, если бы числа Ферма не появились в совсем другой задаче, задаче построения правильных многоугольников при помощи циркуля и линейки.

*Правильным многоугольником* называется многоугольник, вершины которого лежат на некоторой окружности на одинаковых расстояниях друг от друга (рис. 1). Если у правильного многоугольника *n* вершин, то мы называем его *правильным n‑угольником* .



*Рис 1.*

Если мы проведем *n* радиусов, соединяющих центр окружности с вершинами, то получим *n* центральных углов величиной

1/*n*   360°

каждый. Если можно построить угол, имеющий эту величину, то можно построить и этот *n* ‑угольник.

Древние греки очень хотели найти методы построения правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки. Разумеется, они умели строить простейшие из них – равносторонний треугольник и квадрат. С помощью повторного деления пополам центрального угла они могли также построить правильные многоугольники с

4, 8, 16, 32…,

3, 6, 12, 24…

вершинами. Кроме того, они умели строить правильный пятиугольник, и следовательно, также правильные многоугольники с

5, 10, 20, 40…

вершинами. Был также получен еще один тип правильного многоугольника. Центральный угол в правильном 15‑угольнике равен

1/15 360° = 24°,

и он может быть получен с помощью утла в 72°, соответствующего правильному пятиугольнику, и угла в 120°, соответствующего правильному треугольнику, если удвоить первый угол и вычесть из него второй. Следовательно, мы можем построить правильные многоугольники с 15, 30, 60, 120… сторонами.

В таком состоянии проблема оставалась до 1801 года, когда вышла работа по теории чисел молодого немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777–1855) «Арифметические исследования». Она открыла новую эпоху в математике. Гаусс превзошел греческих геометров не только в том, что указал метод построения циркулем и линейкой правильного 17‑угольника, но и пошел гораздо дальше. Для всех чисел *n* он определил, какие *n* ‑угольники могут быть построены таким образом, а какие нет. Сейчас мы опишем результаты, полученные Гауссом.

Выше мы отмечали, что из правильного *n* ‑угольника можно получить правильный 2*n* ‑угольник, деля каждый центральный угол пополам. С другой стороны, из 2*n* ‑угольника можно получить *n* ‑угольник, используя лишь каждую вторую вершину. Это показывает, что достаточно провести поиск правильных многоугольников, которые могут быть построены с помощью циркуля и линейки, только среди многоугольников с нечетным числом вершин. Гаусс доказал, что *правильный n‑угольник с нечетным числом вершин может быть построен с помощью циркуля и линейки тогда, и только тогда, если число n является простым числом Ферма или произведением нескольких различных простых чисел Ферма.*

Что это нам дает для небольших значений *n* ? Очевидно, что 3‑угольник и 5‑угольник могут быть построены, в то время как 7‑угольник не может, так как 7 не является простым числом Ферма. Не может быть построен и 9‑угольник, так как 9 = 3 • 3 является произведением двух равных простых чисел Ферма.

Открытие Гаусса, естественно, возродило интерес к числам Ферма (2.3.1). За последнее столетие были предприняты поистине героические поиски, вручную, без помощи машин, новых простых чисел Ферма. В настоящее время эти вычисления продолжаются со все возрастающей скоростью с помощью ЭВМ. Однако до сих пор результаты были отрицательными. Ни одного нового простого числа Ферма не было найдено и сейчас многие математики склонны считать, что их больше нет.

Система задач 3.3.

**1.**  Найдите все нечетные числа *n* < 100, для которых можно построить правильный *n* ‑угольник.

**2.**  Как построить правильный 51‑угольник, имея правильный 17‑угольник?

**3.**  Если не существует простых чисел Ферма, кроме выше указанных пяти, то сколько существует правильных *n* ‑угольников (*n* нечетно), которые могут быть построены циркулем и линейкой? Каково то наибольшее нечетное *n* , для которого может быть построен правильный *n* ‑угольник?

4. Биографическая миниатюра. П. Ферма, К. Ф. Гаусс.

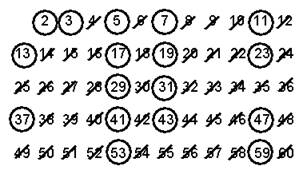
### Решето Эратосфена.

Как мы уже говорили, существуют таблицы простых чисел, простирающиеся до очень больших чисел. Как можно было бы подступиться к составлению такой таблицы? Эта задача была, в известном смысле, решена (около 200 г. до н. э.) Эратосфеном, математиком из Александрии. Его схема состоит в следующем: напишем последовательность всех целых чисел от 1 до числа, которым мы хотим закончить таблицу:

~~468910121415~~

2   2   2  3  2     2      2  3

Начнем с простого числа 2. Будем выбрасывать каждое второе число, начиная с 2 (кроме самого числа 2), т. е. чётные числа 4, 6, 8, 10 и т. д., подчеркивая каждое из них. После этой операции первым неподчёркнутым числом будет число 3. Оно простое, так как не делится на 2. Оставив число 3 неподчёркнутым, будем подчеркивать каждое третье число после него, т. е. числа 6, 9, 12, 15…; некоторые из них уже были подчеркнуты, поскольку они являются чётными. На следующем шаге первым неподчёркнутым числом окажется число 5; оно простое, так как не делится ни на 2, ни на 3. Оставим число 5 неподчёркнутым, но подчеркнем каждое пятое число после него, т. е. числа 10, 15, 20, 25…; как и раньше, часть из них уже оказалась подчёркнутой. Теперь – наименьшим неподчёркнутым числом окажется число 7. Оно простое, так как не делится ни на одно из меньших его простых чисел 2, 3, 5. Повторяя этот процесс, мы в конце концов получим последовательность неподчёркнутых чисел; все они (кроме числа 1) являются простыми.



Этот метод отсеивания чисел известен как «решето Эратосфена». Любая таблица простых чисел создается по этому принципу решета. В действительности, можно продвинуться гораздо дальше по ряду простых чисел, если использовать для их хранения память ЭВМ. Подобным образом, в Научно‑исследовательской лаборатории Лос‑Аламоса были получены все простые числа до 100 000 000.

Небольшое изменение метода решета позволит нам получить б**о**льшую информацию. Предположим, что всякий раз, впервые подчеркивая числа, мы будем подписывать под ним простое число, с помощью которого оно отсеивается. Тогда 15 и 35 были бы записаны как

3   5

и т. д., как это показано на последовательности, выписанной выше. Таким образом, мы не только указали простые числа, но и для каждого составного числа привели наименьшее простое число, являющееся его делителем. Такой список чисел называется **таблицей делителей**. Таблица делителей является более сложной, чем таблица простых чисел. Чтобы немного упростить ее, обычно из нее исключают те составные числа, у которых простые делители малы, например, 2, 3, 5, 7. Самая большая такая таблица была вычислена на ЭВМ Д. X. Лемером и содержит все числа, вплоть до 10 000 000.

Как мы видели, решето Эратосфена может быть использовано для построения таблиц простых чисел и таблиц делителей. Однако оно может быть использовано и для теоретических исследований. Многие важные результаты в современной теории чисел были получены методом решета. Приведем результат, известный еще Евклиду:

*Существует бесконечное число простых чисел.*

Доказательство. Предположим, что существует только *k* простых чисел:

2, 3, 5…, *рk* .

Тогда в решете не оказалось бы неподчёркнутых чисел, больших, чем *рk* . Но это невозможно, так как произведение этих простых чисел

р = 2 • 3 • 5 • … • *рk*

будет отсеиваться *k* раз, по разу для каждого простого числа, поэтому следующее число *р* + 1 не может быть подчеркнуто ни для одного из них.

Система задач 3.4.

**1.**  Составьте таблицы простых чисел для каждой из сотен: 1–100, 101–200, … 901–1000.

**2.**  Попытайтесь определить количество простых чисел в диапазоне 10001–10100.

3. Биографическая миниатюра. Эратосфен, Евклид.

3.1.Задания для самостоятельного решения.

* 1. Являются ли простыми числа а) 11; б) 91; в) 713; г) 2011?

Ответ. a),г): да; б), в): нет(91 = 7·13, 713 = 23·31).

* 1. Найдите все простые числа, которые отличаются друг от друга на 17.

Решение: Заметим, что эти два числа разной четности, т.е. одно из них четное. Но 2 — единственное четное простое число. Тогда второе число — это 2 + 17 = 19.

* 1. Число умножили на его сумму цифр и получили 2008. Найдите все такие числа.

Решение: Разложим число 2008 на простые множители: 2008 = 2³·251. Т.к. число, у которого считали сумму, меньше 2008, то его сумма цифр не больше 9·3 + 1 = 28. Значит, сумма цифр это 1,2,4 или 8. Подходит только вариант с суммой 8: 251·(2 + 5 + 1) = 251·8 = 2008.

* 1. Выпишите все простые числа, не превосходящие 100.

Ответ: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 —всего 25 чисел.

* 1. Во всех подъездах дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше 1. Сколько в доме этажей, если в нём 105 квартир?

Решение: Пусть в доме p подъездов, e этажей и на каждом этаже k квартир. Тогда p·e·k = 105 = 3·5·7. Поскольку e > k > p > 1, e = 7.

* 1. Имеется много одинаковых прямоугольных картонок размером a×b см, где a и b — целые числа, причём a меньше b. Известно, что из таких картонок можно сложить и прямоугольник 49×51 см, и прямоугольник 99×101 см. Можно ли по этим данным однозначно определить a и b?

Решение: Если из картонок a×b можно сложить прямоугольник c×d, то cd делится на ab. Значит, 49·51 = 3·7²·17 делится на ab и 99·101 = 3²·11·101 делится на ab. Поэтому ab = 1 или ab = 3. Воспользуемся условием a < b, откуда первый вариант не подходит, а во втором получаем a=1, b=3. То, что из прямоугольников 1×3 можно сложить прямоугольник, у которого одна из сторон делится на 3, очевидно.

* 1. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 — простое число или единица.

Решение: Предположим, что получился составной остаток. Тогда у него есть делитель равный произведению двух простых (не обязательно различных). (Случай нулевого остатка очевидно невозможен.) Если остаток будеть иметь общий простой делитель p < 30 с числом 30, то и исходное число будет делится на p. Это означает, что исходное число либо и есть p, либо делится (но не равно) на 2,3 или 5, откуда следует, что оно не может быть простым. Значит, оба простых делителя больше 5, тогда остаток хотя бы 7·7 = 49 > 30, чего также не может быть, значит, наше предположение неверно, и остаток — простое число, либо единица.

* 1. Существует ли самое большое простое число?

Решение: Предположим, что простых чисел конечное число. Пусть p1, ..., pn — все простые числа. Тогда рассмотрим число P = p1p2...pn + 1. Число P не делится ни на одно из чисел p1, ..., pn. Значит, в разложении его на простые числа будет новое простое число. Т.е. наше предположение неверно, и простых чисел бесконечно много.

### Основная теорема о разложении на множители.

Любое составное число *с* может быть записано в виде произведения с = ab, причем ни один из делителей не равен 1 и каждый из них меньше, чем *с* ; например,

72 = 8 • 9, 150 = 10 • 15.

При разложении числа *с* на множители один из них, и даже оба (*а* и *b* ) могут оказаться составными. Если а – составное, то разложение на множители можно продолжить:

*а* = *a* 1 • *a* 2, *с* = *a* 1 • *a* 2 • *b* .

Примерами этого могут служить рассмотренные выше числа

72 = 2 • 4 • 9, 150 = 2 • 5 • 15.

Этот процесс разложения на множители можно продолжить до тех пор, пока он не закончится; это должно произойти, так как делители становятся все меньше и меньше, но не могут стать единицей. Когда ни один из делителей нельзя уже будет разложить на множители, то все делители будут простыми числами.

Таким, образом, мы показали, что

*Каждое целое число, большее 1, является простым числом или произведением простых чисел.*

Последовательное разложение числа на множители может быть выполнено многими способами. При этом можно использовать таблицу делителей. Сначала найдем наименьшее простое число *р1* , делящее число *с* , так что *с = р* 1*с* 1. Если *с* 1 – составное число, то по таблице делителей найдем наименьшее простое число *р* 2, делящее *с* 1, так что

*c* 1 = *р* 2 • *с* 2,   *c* = *p* 1 • *p* 2 • *с* 2.

Затем найдем наименьший простой делитель числа *с* 2 и т. д.

Главное здесь то, что независимо от способа разложения числа на простые множители, результат всегда будет одним и тем же, различаясь лишь порядком их записи, т. е. любые два разложения числа на простые множители содержат одни и те же простые числа; при этом каждое простое число содержится одинаковое число раз в обоих разложениях.

Этот результат мы можем кратко выразить следующим образом:

*разложение числа на простые множители единственно.*

Возможно, что вы так часто слышали об этой так называемой «***основной теореме арифметики***» и пользовались ею, что она представляется вам очевидной, но это совсем не так. Эта теорема может быть доказана несколькими различными способами, однако ни один из них не тривиален. Здесь мы приведём доказательство, используя способ «от противного», который часто называют его латинским названием *reductio ad absurdum* (приведением к абсурду). Этот способ заключается в следующем: предположив ложность теоремы, которую нужно доказать, показывают, что это предположение приводит к противоречию.

***Доказательство***  . Предположим, что наша теорема о единственности разложения на множители неверна. Тогда должны существовать числа, имеющие по крайней мере два различных разложения на простые множители. Выберем из них наименьшее и обозначим его через *с* 0. Для небольших чисел, скажем, меньших 10, истинность теоремы можно установить прямой проверкой. Число *с* 0 имеет наименьший простой множитель *р* 0, и мы можем записать:

*c* 0 = *p* 0*d* 0.

Так как *d* 0 < *c* 0, то число *d* 0 единственным образом раскладывается на простые множители. Отсюда следует, что разложение числа *c* 0 на простые множители, содержащее число *р* 0, единственно.

А так как, по предположению, имеется по крайней мере два разложения числа *c* 0 на простые множители, то должно быть разложение, не содержащее число *р* 0. Наименьшее простое число в этом разложении мы обозначим через *р* 1и запишем

*c* 0 = *p* 1 *d* 1. (1.1)

Так как *p* 1 > *p* 0, то *d* 1 < *d* 0 и, следовательно, *p* 0 *d* 1 < *c* 0. Рассмотрим число

*c* 0' = *c* 0 – *p* 0 *d* 1 = (*p* 1‑ *p* 0) • *d* 1. (1.2)

Так как оно меньше, чем число *c* 0, то оно должно раскладываться на простые множители единственным способом; при этом простые множители числа *c* 0 состоят из простых множителей чисел *p* 1‑ *p* 0 и *d* 1. Так как число *c* 0 делится на *p* 0, то из выражения (3.1.2) следует, что число *c* 0' также делится на *p* 0. Следовательно, *p* 0 должно быть делителем либо числа *d* 1, либо *p* 1‑ *p* 0. Но любой простой делитель числа *d* 1больше, чем *p* 0, так как *p* 1 – наименьшее простое число в разложении (1.1). Таким образом, остается единственная возможность: *p* 0 должно быть делителем числа *p* 1‑ *p* 0 и, следовательно, оно делит *p* 1. Итак, мы пришли к противоречию, потому что *p* 1 является простым числом и не может делиться на другое простое число *p* 0.

Выше мы отмечали, что единственность разложения числа на простые множители совсем не очевидна. В действительности, существуют «арифметики», в которых аналогичная теорема не выполняется. Простейшим примером такой арифметики может служить арифметика четных чисел

2, 4, 6, 8, 10, 12…

Некоторые из них могут быть разложены на два четных множителя, а другие – нет; последние мы называем *чётно‑простыми числами* . Это числа, которые делятся на 2, но не делятся на 4:

2, 6, 10, 14, 18….

Очевидно, что каждое четное число либо является четно‑простым, либо записывается в виде произведения чётно‑простых чисел. Но такое разложение на чётно‑простые числа не всегда будет единственным. Например, число 420 может быть разложено на четно‑простые числа различными способами:

420 = 6 • 70 = 10 • 42 = 14 • 30.

Система задач 3.5.

**1.**  Найдите разложение на простые множители каждого из чисел 120, 365, 1970.

**2**. Запишите все разложения числа 360 на чётно‑простые числа.

3.  В каких случаях четные числа обладают единственным разложением на четно‑простые множители?

### Делители.

Разложим на множители какое‑нибудь число, скажем, 3600. Это разложение

3600 = 2 • 2 • 2 • 2 • 3 • 3 • 5 • 5

может быть записано как

3600 = 24 • 32 • 52.

Вообще при разложении числа *n* на множители аналогично можно собирать одинаковые простые множители в виде степеней и записывать

*n* = *p* 1*α*1 • *p* 2*α*2 • …. • *рrαr* , (2.1)

где *p* 1, *p* 2…. *рr* – различные простые множители числа *n* , причем число *p* 1 входит *α* 1 раз, *p* 2 входит *α* 2 раз и т. д.

Если мы знаем вид (2.1) для числа, то мы сможем тотчас же ответить на некоторые вопросы об этом числе.

Например, если мы захотим, то можем узнать, какие числа делят число *n* . Возьмем для примера рассмотренное выше число 3600. Предположим, что число *d* является одним из его делителей, т. е.

3600 = *d* • *d* 1.

Приведенное разложение на простые множители показывает, что единственными числами среди множителей числа *d* будут лишь 2, 3, 5. Кроме того, число 2 может содержаться не более 4 раз, а числа 3 и 5 не более, чем по 2 раза каждое. Итак, мы видим, что возможными делителями числа 3600 будут числа вида

*d* = 2δ1 • 3δ2 • 5δ3,

при этом показатели степени могут принимать значения:

δ1 = 0, 1, 2, 3, 4;

δ2 = 0, 1, 2;

δ3 = 0, 1, 2.

Так как эти значения могут сочетаться всеми возможными способами, то число делителей равно

(4 + 1)•(2 + 1)•(2 + 1) = 5 • 3 • 3 = 45.

Для любого числа *n* , разложение которого на простые множители дается формулой (2.1), положение точно такое же. Если число *d* является делителем числа *n* , т. е.

*n = d* • *d* 1

то единственными простыми числами, на которые может делиться число *d* , будут только те, которые делят число *n* , а именно: *p* 1…, *рr* . Таким образом, мы можем записать разложение числа *d* на простые множители в виде

*d* = *p* 1δ1 • *p* 2*δ*2 • …. • *рrαr* , (2.2)

Простое число *p* 1 может содержаться не более *α* 1 раз, как и в самом числе *n* ; аналогично – для *p* 2 и других простых чисел. Это значение для числа δ1 мы можем выбрать *α* 1 + 1 способом:

δ1 = 0, 1…, *α* 1;

аналогично и для других простых чисел. Так как каждое из *α* 1 + 1 значений, которые может принимать число δ1, может сочетаться с любым из *α* 2 + 1 возможных значений числа δ2 и т. д., то мы видим, что общее число делителей числа *n* задается формулой

τ(*n* ) = (*α* 1 + 1) (*α* 2 + 1)… (*α* *r* + 1). (2.3)

Система задач 3.6.

**1.**  Сколько делителей имеет простое число? Сколько делителей имеет степень простого числа *рα* ?

**2.**  Найдите количество делителей у следующих чисел: 60, 366, 1970, вашего почтового индекса.

**3.**  Какое натуральное число (или числа), не превосходящее 100, имеет наибольшее количество делителей

### Несколько задач о делителях.

Существует единственное число *n* = 1, которое имеет только один делитель. Числами с ровно двумя делителями являются простые числа *n* = *р* : они делятся на 1 и на *р* . Наименьшим числом, имеющим два делителя, является, таким образом, *р* = 2.

Исследуем числа, имеющие ровно 3 делителя. В соответствии с (3.2.3) имеем

3 = (*α* 1 + 1) (*α* 2 + 1)… (*α* *r* + 1).

Так как 3 – простое число, то справа может существовать лишь один множитель, не равный 1. Отсюда *r* = 1, a *α* 1 = 2. Таким образом,

*n*  = *p* 12.

Наименьшим числом с 3 делителями является *n* = 22 = 4. Это соображение, примененное к общему случаю, когда число делителей *q* является простым числом, позволяет получить, что

*q* = *α* 1 + 1, т. е. *α* 1 = *q* – 1 и *n* = р1*q* ‑1;

наименьшим из таких чисел является

*n* = 2*q* ‑1.

Рассмотрим следующий случай, когда существует ровно 4 делителя. Тогда соотношение

4 = (*α* 1 + 1) (*α* 2 + 1),

возможно только тогда, когда

*α* 1 = 3, *α* 2 = 0 или *α* 1 = *α* 2 = 1.

Это приводит к двум возможностям:

*n* = *p* 13, *n* = *p* 1  *p* 2;

наименьшее число с 4 делителями – это *n* = 6.

В том случае, когда имеется 6 делителей, должно выполняться соотношение

6 = (*α* 1 + 1) (*α* 2 + 1),

что возможно лишь тогда, когда

*α* 1 = 5, *α* 2 = 0 или *α* 1 = 2, *α* 2 = 1.

Это дает две возможности:

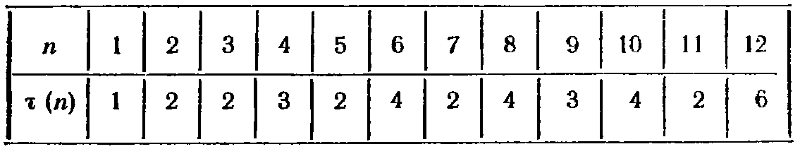
*n* = *p* 15, *n* = *p* 12 *p* 2;

при этом наименьшее значение имеет место в последнем случае, когда

*p* 1 = 2, *p* 2 = 3, *n* =12.

Этот метод можно использовать для вычисления наименьших натуральных чисел, имеющих любое заданное количество делителей.

Существуют таблицы, указывающие количество делителей для различных чисел. Они начинаются следующим образом:



Вы легко можете ее самостоятельно продолжить.

Будем говорить, что натуральное число *n* является *сверхсоставным* , если количество делителей у каждого числа, меньшего *n* , меньше, чем количество делителей у числа *n* . Глядя на нашу небольшую таблицу, мы видим, что

1, 2, 4, 6, 12

являются первыми пятью сверхсоставными числами. О свойствах этих чисел известно еще очень мало.

***Система задач 3.7.***

**1.**  Взвод из 12 солдат может маршировать 6‑ю различными способами: 12 × 1, 6 × 2, 4 × 3, 3 × 4, 2 × 6, 1 × 12. Какую наименьшую численность должны иметь группы людей, которые могут маршировать 8, 10, 12 и 72 способами?

**2.**  Найдите наименьшие натуральные числа, имеющие: а) 14 делителей, б) 18 делителей ив) 100 делителей.

**3.**  Найдите два первых сверхсоставных числа, следующих за числом 12.

**4.**  Охарактеризуйте все натуральные числа, количество делителей которых является произведением двух простых чисел.

### Совершенные числа.

Нумерология (или гематрия, как ее иногда еще называют) была распространенным увлечением у древних греков. Естественным объяснением этому является то, что числа в Древней Греции изображались буквами греческого алфавита, и поэтому каждому написанному слову, каждому имени соответствовало некоторое число. Люди могли сравнивать свойства чисел, соответствующих их именам.

Делители или *аликвотные части* [[2]](#footnote-2) чисел играли важную роль в нумерологии. В этом смысле идеальными, или, как их называют, *совершенными* числами являлись такие числа, которые составлялись из своих аликвотиых частей, т. е. равнялись сумме своих делителей. Здесь следует отметить, что древние греки не включали само число в состав его делителей.

Наименьшим совершенным числом является 6:

6 = 1 + 2 + 3.

За ним следует число 28:

28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,

далее число 496:

496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248.

Часто математик, увлеченный решением какой‑либо проблемы и имеющий одно или несколько частных решений этой задачи, пытается найти закономерности, которые смогли бы дать ключ к нахождению общего решения. Указанные нами совершенные числа могут быть записаны в виде

6 = 2  3 = 2(22 – 1),

28 = 22  7 = 22(23 – 1),

496 = 24  31 = 24(25 – 1).

Это наталкивает нас на гипотезу:

*Число является совершенным, если оно представляется в виде*

*Р* = 2*p* ‑1(2*p* – 1) = 2*рq* , (4.1)

*где*

*q* = 2*p* – 1

*является простым числом Мерсенна.*

Этот результат, известный еще грекам, несложно доказать. Делителями числа *Р* , включая само число *Р* , очевидно, являются следующие числа:

1, 2, 22…, 2р‑1,

*q* , 2*q* , 22*q* …, 2р‑1*q* .

Запишем сумму этих делителей

1 + 2 +… + 2*р* ‑1 + *q* (1 + 2 +… + 2*р* ‑1),

которая равна

(1 + 2 +… + 2*р* ‑1)(*q* + 1) = (1 + 2 +… + 2*р* ‑1) 2*р*

Если вы не помните формулы для суммы членов геометрической прогрессии,

*S* = 1 + 2 +… + 2*р* ‑1,

то умножьте эту сумму на 2:

2*S* = 2 + 22 +… +2*р* ‑1 + 2*р* ,

а затем, вычтя *S* , получите

*S* = 2*p* – 1 = *q* .

Таким образом, сумма всех делителей числа *Р* есть

2*p**q =* 2 • 2*p* ‑1*q,*

а сумма всех делителей, кроме самого числа *Р* = 2*p* ‑1*q* , равна

2 2*p* ‑1*q* – 2*p* ‑1*q* = 2*p* ‑1*q*  = Р.

Итак, наше число является совершенным.

Из этого результата следует, что каждое простое число Мерсенна порождает совершенное число. Известно всего 23 простых числа Мерсенна, следовательно, мы знаем также и 23 совершенных числа. Существуют ли другие виды совершенных чисел? Все совершенные числа вида (4.1) являются четными, можно доказать, что любое четное совершенное число имеет вид (4.1). Остается вопрос: существуют ли нечетные совершенные числа? В настоящее время мы не знаем ни одного такого числа, и вопрос о существовании нечетных совершенных чисел является одной из самых знаменитых проблем теории чисел. Если бы удалось обнаружить такое число, то это было бы крупным достижением. Вы можете поддаться соблазну найти такое число, перебирая различные нечетные числа. Но мы не советуем этого делать, так как по последним сообщениям Брайена Такхермана из IBM[[3]](#footnote-3) (1968), нечетное совершенное число должно иметь по крайней мере 36 знаков.

Система задач 3.8.

**1.**  Используя список простых чисел Мерсенна, найдите четвертое и пятое совершенные числа.

3.2.Задания для самостоятельного решения.

Найдите три совершенных числа.

Решение. Например,

если р = 7, 2*р*- 1 = 2*7*- 1 = 127, 2*p*–1(2*p* – 1) = 2*7*–1(2*7*– 1) =64∙127 =8128.

8128 = 1 + 2 + 4 +8 + 16 + 32+ 64 + 127 + 254 + 508 +1016 + 2032 + 4064.

Ответ: 8128.

***4. Деление с остатком.***

Мы уже знаем, что для любого натурального числа ***n*** существует представление его в виде  ***n*=*km* + *r*, где 0≤ *r* <*m*, *k*, *r*** целые числа.

***k*** называется неполным частным от деления ***n*** на ***m***, а ***r* –** остатком.

**Задание 15.** Запишите:

а) формулу четного числа;

б) формулу нечетного числа;

в) формулу числа, кратного числу *b*;

г) Формулу числа, которое делится на 17 с остатком 11.

**Решение.** а) *n* = *2m;*

б) *n* = *2m+1;*

в) *n* = *km;*

г) *n* = *17m+11.*

**Задание 16**. При делении натуральных чисел на 4, образуются подмножества натуральных чисел, делящихся на 4 с разными остатками. Изобразите схематично, как множество натуральных чисел и эти подмножества связаны между собой. Приведите примеры чисел из каждого подмножества.

Существуют ли натуральные числа, не входящие ни в одно из этих подмножеств.

**Ответ.**

Множество натуральных чисел разбивается на четыре непересекающихся подмножества.

*n* = *4m+1*

*n* = *4m*

*n* = *4m+3*

*n* = *4m+2*

Натуральных чисел, не входящих ни в одно из этих подмножеств, нет.

**Основные свойства остатков:**

Пусть остаток от деления целого числа *n*1 на *m* равен *r*1, а остаток от деления *n*2 на *m* равен *r*2. Тогда:

1. Остаток от деления *n*1+*n*2 на *m* равен остатку от деления *r*1+*r*2 на *m*;
2. Остаток от деления *n*1–*n*2 на *m* равен остатку от деления *r*1–*r*2 на *m*;
3. Остаток от деления *n*1×*n*2 на *m* равен остатку от деления *r*1×*r*2 на *m*.

**Задание 17.** Не производя вычислений, докажите, что сумма 84 + 85 + 86 + 87 + 88 + 89 + 90 делится на 7 и на 87.

**Решение.** Если рассмотрим попарно первое и седьмое, второе и шестое, третье и пятое слагаемые, то очевидно, что их сумма (пара чисел) будет делиться на 87 (и равна 2⋅87). Тогда вся сумма равна 7⋅87.

**Задание 18.** Не используя калькулятор и вычисления в столбик, найдите остаток от деления на 25 значения выражения 53⋅55 + 27⋅24 - 101⋅29.

**Решение.** Остаток от деления на 25 числа 53 равен 3, числа 55 равен 5, числа 27 - 2, числа 24 – 24, числа 101 - 1, числа 29 – 4.

Используя основные свойства остатков, получаем:

1. Остаток от деления на 25 произведения 53⋅55 равен 15 (3⋅5 =15, 15 : 25 =0(ост.15)).
2. Остаток от деления на 25 произведения 27⋅24 равен 23 (2⋅24 =48, 48 : 25 = 1(ост.23)).
3. Остаток от деления на 25 произведения101⋅29 равен 4 (1⋅4=4, 4 : 25 = 0(ост.4)).

Тогда остаток от деления на 25 значения выражения 53⋅59 + 101⋅29 - 27⋅24 равен

остатку от деления на 25 числа 34 (23 + 15 – 4), то есть 9.

**Ответ: 9.**

**Задача 19** (Кенгуру-2010). Каков остаток от деления 1997-значного числа 100…00 на 15?

**Решение.** Попробуем начать делить число 100…00 на 15.

1000000…00

15

666…

90

100

90

100

Очевидно, что в результате деления остаток будет равен 10.

**Ответ.** 10.

4.Задания для самостоятельного решения.

1. Найдите все числа, при делении которых на 7 в частном получится то же число, что и в остатке.

Подсказка

Заметьте, при делении числа на 7 возможны только 7 разных остатков.

Решение

Остаток при делении на 7 не может превышать 6, таким образом, интересующие нас числа можно представить в виде 7a + a = 8a, где a = 1, 2,..., 6. Итак, вот эти числа: 8, 16, 24, 32, 40, 48.

Ответ 8, 16, 24, 32, 40, 48.

2. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m.

Подсказка

Как определить, на сколько остаток от деления на 15 больше, чем остаток от деления на 13, если известно, чему равно частное?

Решение

Число 13 на 2 меньше 15. Значит, при одном и том же частном n остаток от деления на 15 на 2n больше, чем остаток от деления на 13, т.е. 2n = 8. Отсюда делимое m равно 154 = 134 + 8 = 60.

Ответ 60.

3.Изменятся ли частное и остаток, если делимое и делитель увеличить в три раза?

Подсказка

Попробуйте рассмотреть два случая: а) остаток равен нулю; б) остаток не равен нулю.

Решение

Если остаток был равен нулю, никаких изменений не произойдёт. Действительно, пусть наш пример был AB : A = B. Тогда новый пример будет 3AB : 3A = B. Если же остаток не был равен нулю, то при увеличении и делимого и делителя в 3 раза частное не изменится, а остаток увеличится втрое. Действительно, пусть первоначальный пример был такой — (AB + a) : A = B (остаток a < A); тогда новый пример будет (3AB + 3a) : 3A = B (остаток 3a).

Ответ Если остаток не равен 0 — да, в противном случае — нет.

4. Докажите, что n3 + 2n делится на 3 для любого натурального n.

Подсказка

Рассмотрите все остатки, которые может давать n при делении на 3.

Решение

Число n может давать при делении на 3 один из трех остатков: 0, 1, 2. Рассмотрим три случая.

Если n дает остаток 0, то и n3 и 2n делятся на 3 и поэтому n3 + 2n также делится на 3.

Если n дает остаток 1, то n3 дает остаток 1, 2n - остаток 2, а 1 + 2 делится на 3.

Если n дает остаток 2, то n2 дает остаток 1, n3 дает остаток 2, 2n - остаток 1, а 2 + 1 делится на 3.

Требуемое доказано.

5.На столе лежало 100 яблок, 99 апельсинов и груши. К столу подходили ребята. Первый взял яблоко, второй– грушу, третий– апельсин, следующий опять яблоко, следующий за ним– грушу, за ним– апельсин. Далее ребята разбирали фрукты в таком же порядке до тех пор, пока стол не опустел. Сколько могло быть груш? Объясните свой ответ.

Решение

Поскольку на каждом круге апельсины берут в последнюю очередь, прошло 99 полных кругов "яблоко– груша– апельсин" (то есть фруктов каждого вида было как минимум 99 ). Но на следующем круге апельсинов уже не было, а яблоко ещё оставалась. После этого круга стол опустел, значит груш было или 99 (если последним взяли яблоко) или 100 (если последней взяли грушу).

Ответ Могло быть 99 или 100 груш.

6. Найдите остатки от деления

а) 1989 × 1990 × 1991 + 19922 на 7;

б) 9100на 8.

Решение

Произведение (сумма) двух целых чисел дает такой же остаток при делении на n, как и произведение (сумма) их остатков при делении на n.

а) Данное выражение дает при делении на 7 такой же остаток, как и 2 × 3 × 4 + 52 = 49. Значит, искомый остаток равен 0.

б) Данное выражение дает при делении на 8 такой же остаток, как и 1100 = 1.

Ответ а) 0; б) 1.

7.Вершины тысячеугольника занумерованы от 1 до 1000. Начиная с первой, отмечается каждая пятнадцатая вершина (1,16,31 и т.д.). Вершины отмечаются до тех пор, пока не окажется, что все отмечаемые вершины уже найдены. Сколько вершин останутся неотмеченными?

Решение

Отметка точек прекращается, когда одна из вершин будет отмечена во второй раз. Легко видеть, что это будет первая вершина. Номера отмечаемых вершин – это члены арифметической прогрессии с разностью 15, т. е. числа вида 1+15k . Если после нескольких полных оборотов (например, m оборотов) снова будет отмечена первая вершина, то можем записать: 1=1+15k-1000m , где k – число отмеченных вершин. Это уравнение перепишем в виде 3k=200m . Отсюда видно, что k=200, m=3 , т. е. после трёх оборотов первая вершина будет отмечена во второй раз. Следовательно, всего будет отмечено 200 вершин, а остальные останутся неотмеченными.

Ответ 800 вершин.

8.Если от некоторого трехзначного числа отнять 6, то оно разделится на 7, если отнять 7, то оно разделится на 8, а если отнять 8, то оно разделится на 9. Определите это число.

Подсказка

Что будет, если к искомому числу прибавить единицу?

Решение

Если к искомому числу прибавить 1, то оно будет делиться на 7, 8 и 9, следовательно, оно будет делиться на 7\*8\*9=504. Так как число трехзначное, то имеется единственная возможность - оно равно 503 = 7\*8\*9 - 1.

Ответ 503.00

***5.НОД, НОК чисел.***

Общим делителем нескольких чисел называется число, на которое все данные числа делятся без остатка. Например, числа 1, 2, 3, 4, 6, 12 являются общими делителями для чисел 36 и 24, а числа 14 и 15 имеют только один общий делитель – 1.

Для двух и более чисел среди всех их общих делителей существует наибольший, называемый наибольшим общим делителем (НОД). Например, НОД (48, 36, 24)=12.

Если наибольший общий делитель двух чисел равен единице, то числа называются взаимно простыми. Например, НОД (16, 27) =1, значит, 16 и 27 – взаимно простые числа.

Задание**.** Приведите 2-3 примера взаимно простых чисел и чисел, имеющих несколько общих делителей, найдите для них НОД.

Общим кратным данных чисел называется любое натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел (без остатка). Например, числа 18, 12, 6, 120, 60 являются общими кратными для чисел 2 и 3.

Наименьшим общим кратным нескольких чисел называется наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел. Например, 6 – наименьшее общее кратное для 2 и 3.

Обратим внимание, что



Обычно НОД и НОК нескольких чисел находят, используя разложения чисел на простые множители. НОД равен произведению множителей, входящих в каждое разложение; НОК – произведению всех множителей, входящих хотя бы в одно разложение.

Рассмотрим множество делителей числа 20 и множество делителей числа 30:

Д(20) = {1, 2, 4, 5, 10, 20}, Д(30) = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}.

Найдем пересечение этих множеств.

Д(20) ∪ Д(30) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 30}, а Д(20) ∩ Д(30) = {1, 2, 5, 10}.

НОД (20,30) = 10, то есть НОД нескольких чисел – это наибольший элемент из пересечения множеств делителей этих чисел.

Задание**.** Найдите НОД и НОК для чисел:

А) 18, 63;

Б) 18, 84;

В) 63, 84;

Г) 18, 63, 84.

Ответ.

А) НОД = 9; НОК = 126.

Б) НОД = 6; НОК =252.

В) НОД = 21; НОК =252.

Г) НОД = 3; НОК = 252.

Существует способ для вычисления НОД двух чисел – *алгоритм Евклида*, который особенно удобен, если числа большие.

Он основан на следующих свойствах делимости:

1. Любой общий делитель чисел ***а*** и ***в (а*** > ***в)*** является делителем числа ***(а -*** ***в).***
2. Любой общий делитель чисел ***в*** и ***(а -*** ***в)*** является делителем числа ***а.***

Тогда НОД (***а***, ***в)***= НОД (***в, а -*** ***в ).***

Например, НОД (451, 287) = НОД (451-287, 287) = НОД (164, 287) = НОД (164, 123) = НОД (41, 123) = НОД (41, 82) = НОД (41, 41) = 41.

Несмотря на свою простоту, алгоритм Евклида является важным элементом математического образования.

Рассмотрим несколько задач.

Задание: Вася рвет газету на 8 частей, одну из получившихся частей - еще на 8, и так далее. Сможет ли он разорвать газету на 2011 частей?

Решение. Так как Вася все время рвет на 8 частей, то в первый раз у него получится 8 частей, во второй раз - 15 разных частей (1∙7+8), в третий раз 22 части (2⋅7+8) и т.д., то есть каждый раз у него увеличивается на 7 частей, общее количество частей всегда имеет вид *К*⋅7+8. Посмотрим на число 2011, его нельзя представить в виде *К*⋅7+8. (2011 – 8 =2003, а 2003 не делится на 7). Значит, Вася не сможет разорвать газету на 2011 частей.

Ответ: нет.

Задание**:** Докажите, что *k3 - k* делится на 6 при любом целом *k*.

Решение*. k3 – k = k*(*k2-*1) = *k*(*k-*1)(*k+*1)*.* Получили произведение трех последовательных чисел, из них одно всегда будет делиться на 3, и хотя бы одно будет делиться на 2, значит, произведение будет делиться на 6.

Задание. Докажите, что если р – простое нечетное число, то *р*2 – 1 делится на 4.

Решение. *р*2 – 1 = (*р -* 1*)(р* +1). Получили произведение двух чисел, одно из них больше на 1 нечетного числа, другое - меньше на 1, значит, оба четные. Произведение двух четных чисел делится на 4.

Произведение двух последовательных четных чисел всегда будет делиться на 8. Первое четное 2*n,* второе *(*2*n + 2)* , их произведение 2*n(*2*n + 2)* =2*n∙2(n + 1)* =4*n∙(n + 1)*делится на 4 и хотя бы одно из чисел *n* или *(n + 1)* будет делиться на 2, значит, произведение будет делиться на 8.

Задание. На какую цифру оканчивается число 32010?

Решение. Попробуем найти закономерность: 31=3, 32=9; 33=27; 34=81; 35=243; 36=729, 37=2187 и т.д. Очевидно, что последние цифры степени числа 3 начинают повторяться в определенном порядке: 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1… и т. д. Обратим внимание, что повторяются всего 4 цифры (3, 9, 7, 1), то есть, число равное 3n, где *n* кратно четырем, всегда оканчивается на 1. Разделим степень числа 3 на 4: 2010=4∙500 +10 = 4∙500 +8 + 2, отсюда, 32008 оканчивается на 1, а 32010 оканчивается на 9.

Ответ: 9.

Задание**.** Найдите знаменатель дроби, полученной после сокращения .

Решение. 10100 = 2100∙5100. Следовательно, в числителе нас интересуют только множители, кратные 2 и 5.

100! = 1 ∙ 2∙ 3 ∙ 4 ∙ …..∙ 98 ∙ 99 ∙ 100 – произведение 100 первых натуральных чисел. Среди них половина четные, это дает 50 множителей равных 2. Ровно 25 чисел делятся на 4, это дает еще дополнительно 25 множителей, равных 2. На 8 делятся 12 чисел, еще 12 множителей, равных 2. На 16 делятся 6 чисел, на 32 - 3 числа, на 64 - 1. Итого 97 множителей равных 2. Значит, в каноническом разложении числителя присутствует 297. Аналогично рассуждая, находим 24 множителя равных 5. Значит, в каноническом разложении присутствует 524. После сокращения в знаменателе останется 23 ∙576.

Ответ: 23 ∙576.

Задание (Кенгуру-2004): Каков наибольший делитель числа 32004 + 6, отличный от этого числа?

Решение**.** Число 32004 + 6 не делится на 2, так как 6 делится на 2, а 32004 – не делится. Но 32004 + 6 делится на 3. Поэтому наименьший делитель этого числа равен 3. Чтобы получить наибольший делитель, отличный от самого числа, надо это число разделить на наименьший делитель. Поэтому наибольший делитель равен (32004 + 6) : 3 = 32003 + 2.

Ответ: 32003 + 2.

5.Задания для самостоятельного решения.

1.Докажите, что для любых натуральных чисел a и b верно равенство НОД(a, b)НОК(a, b) = ab.

Решение

Из определения НОДа следует, что

a = a'НОД(a, b),

b = b'НОД(a, b),

где НОД(a', b') = 1.

Из определения НОКа следует, что

НОК(a, b) = a'b'НОД(a, b).

Тогда

НОД(a, b)НОК(a, b) = a'b'НОД(a, b)НОД(a, b),

ab = a'НОД(a, b)b'НОД(a, b).

Равенство доказано.

2. Натуральные числа m и n таковы, что

НОК(m,n)+НОД(m,n)=m+n

Докажите, что одно из чисел m или n делится на другое.

Решение

Первое решение Положим m=kd , n=ld , где d=НОД(m,n) . Тогда НОК(m,n)=kld и, значит, kld+d=kd+ld . Отсюда получаем, что (k-1)(l-1)=0 , т.е. k=1 или l=1 . Это означает, что либо m , либо n равно НОД(m,n) . Следовательно, либо n делится на m , либо m делится на n .

Второе решение Заметим, что НОК(a,b)НОД(a,b)=ab для произвольных натуральных a , b . Поэтому из теоремы Виета следует, что пары (m,n) и (НОД(m,n),НОК(m,n)) являются парами решений квадратного уравнения x2-(m+n)x+mn=0 , т.е. совпадают. Утверждение задачи теперь следует из того, что НОК(m,n) кратно НОД(m,n)

3. а)(2) Докажите, что если НОК(a,a+5)=HOK(b,b+5) (a,b - натуральные), то a=b.

б)(3) Может ли НОК(a,b)=НОК(а+с,b+с) (a,b,c - натуральные)?

Решение

Ответ в пункте б) отрицательный. Понятно, что а) является его частным случаем.

Предположим, что НОК (a, b) = НОК (a + с, b + с). Докажем, что тогда НОД (a, b) = НОД (a + с, b + с). Пусть d = НОД (a + c, b + c). Тогда числа a – b и НОК (a, b) делятся на d. Разложим число d в произведение степеней различных простых чисел. Если pk — один из сомножителей, то НОК (a, b) делится на pk, значит, на него делится одно из чисел a или b. Поскольку их разность a – b тоже делится на pk, то это же верно для них обоих, а также для их наибольшего общего делителя. Поэтому НОД (a, b) делится на НОД (a + c, b + c). Аналогично доказывается обратная делимость НОД (a + c, b + c) на НОД (a, b) (действительно, мы нигде не пользовались положительностью числа c). Поэтому НОД(a, b) = НОД(а + c, b + c). Использовав известную формулу НОК (m, n) · НОД (m, n) = mn, получаем ab = (a + c)(b + c), что невозможно при натуральных a, b и c.

### *6.Определение сравнения.*

Теория чисел имеет свою алгебру, известную, как *теория сравнений* . Обычная алгебра первоначально развивалась как стенография для операций арифметики. Аналогично, сравнения представляют собой символический язык для делимости, основного понятия теории чисел. Понятие сравнения впервые ввел Гаусс.

Прежде чем мы обратимся к понятию сравнения, сделаем одно замечание о числах, которые будем изучать в этой главе. Мы начали эту книгу, заявив, что будем рассматривать целые положительные числа 1, 2, 3…, и в предыдущих главах мы ограничивались только этими числами и дополнительным числом 0. Но теперь мы достигли стадии, на которой целесообразно расширить наши границы, рассматривая все целые числа:

0, ±1, ±2, ±3….

Это никоим образом не повлияет на наши предыдущие понятия; далее, когда мы будем говорить о простых числах, делителях, наибольших общих делителях и тому подобном, мы будем считать их целыми положительными числами.

Теперь вернемся к языку сравнений. Если *а* и *b* – два целых числа и их разность *а – b* делится на число *m* , мы выражаем это записью

*a*  ≡ *b* (mod *m* ) (7.1.1)

которая читается так:

*а* сравнимо с *b* по модулю *m* .

Делитель *m* мы предполагаем положительным; он называется *модулем сравнения* . Наше высказывание (7.1.1) означает, что

*a – b* = *mk* , где *k* – целое число. (7.1.2)

Примеры.

1) 23 ≡ 8 (mod 5), так как 23 – 8 = 15 = 5 3;

2) 47 ≡ 11 (mod 9), так как 47–11 = 36 = 9  4;

3) –11 ≡ 5 (mod 8), так как – 11 – 5 = –16 = 8  (‑2);

4) 81 ≡ 0 (mod 27), так как 81 – 0 = 81 = 27 3.

Последний пример показывает, что вообще, вместо того, чтобы говорить: число *а* делится на число *m* , мы можем записать

*a* ≡ 0 (mod *m* ),

так как это означает, что

*а* – 0 = *а* = *mk* ,

где *k* – некоторое целое число. Например, вместо того, чтобы сказать, что *а* – четное число, мы можем записать

*a*  ≡ 0 (mod 2).

Таким же образом видно, что нечетное число является числом, удовлетворяющим сравнению

*а*  ≡ 1 (mod 2).

Эта несколько странная терминология является довольно обычной для математических работ.

Сравнения часто встречаются в повседневной жизни. Например, часовая стрелка указывает время по модулю 12; автомобильный счётчик отмечает пройденные расстояния по модулю 100 000 (миль или километров).

Прежде чем перейти к более детальному рассмотрению сравнений и их свойств, проверьте самостоятельно, что следующие утверждения в точности эквивалентны:

1. *а* сравнимо с *b* по модулю *d*.
2. *а* = *b* + *nd*, где *п* – целое.
3. *а – b* делится на *d*.

Введённые Гауссом обозначения для сравнений подчёркивают то обстоятельство, что сравнения обладают многими свойствами обычных равенств. Напомним эти свойства:

1. Всегда *а* = *а* (рефлективность).
2. Если *а* = *b*, то *b* = *а (*симметричность).
3. Если *а* = *b* и *b* = *с*, то *а* = *с* (транзитивность).

Кроме того, если *а* = *а′* и *b* = *b′*, то

1. *a* + *b* = *a′* + *b′*.
2. *a* – *b* = *a′* – *b′*.
3. *ab* = *a′* *b′*.

Эти же свойства сохраняются, если соотношение равенства *а* = *b* заменяется соотношением сравнения *a* ≡  *b* (mod *d*). А именно:

1’) Всегда *a* ≡ *а* (mod *d*).

2’) Если *a* ≡ *b* (mod *d*), то *b* ≡ *а* (mod *d*).

3’) Если *a* ≡ *b* (mod *d*) и *b* ≡ *с* (mod *d*), то *a* ≡ *с* (mod *d*).

(Проверьте! – это нетрудно).

Точно так же, если *a* ≡ *а′* (mod *d*) и *b* ≡ *b′* (mod *d*), то

4’) *a* + *b* ≡ *a′* + *b′* (mod *d*).

5’) *a* – *b* ≡ *a′* – *b′* (mod *d*).

6’) *ab* ≡ *a′* *b′* (mod *d*).

Таким образом, сравнения по одному и тому же модулю можно складывать, вычитать и умножать. В самом деле, из *а* = *а′* + *rd, b* = *b′* + *sd* вытекают:

*a* + *b* = *a′* + *b′* + (*r + s*)*d*,

*a* – *b* = *a′* – *b′* + (*r* – *s*)*d*,

*ab* = *a′* *b′* + (*a′s + b′r + rsd*)*d*,

что и приводит к нужным заключениям.

Все сравнения по какому-то модулю составляют множество сравнений по данному модулю. Мы получили, что множество сравнений по какому-то модулю замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения.

Сравнения допускают великолепное геометрическое представление. Если хотят дать геометрическое представление целых чисел, то обыкновенно выбирают прямолинейный отрезок единичной длины и затем откладывают кратные отрезки в обе стороны. Таким образом, для каждого целого числа получается соответствующая ему точка на прямой – числовой оси. Но если приходится иметь дело с числами по данному модулю *d*, два сравнимых числа – поскольку речь идёт о делимости на *d* – рассматриваются как нечто неразличимое, так как дают одни и те же остатки. Чтобы изобразить всё это геометрически, возьмём окружность, разделённую на *d* равных частей. Всякое целое даёт в качестве остатка одно из чисел 0, 1, 2, … , *d* −1: эти числа мы и расставим по окружности на равных расстояниях.

…-1, 5, 11…

…0, 6, 12…

…-5, 1, 7…

…-4, 2, 8…

…-3, 3, 9…

-2, 4, 10…

Каждое число сравнимо с одним из этих чисел по модулю *d* и, следовательно, представляется соответствующей точкой. Рисунок сделан для случая *d* = 6. Циферблат часов может также служить моделью.

В качестве примера применения мультипликативного свойства сравнений 6’) *ab* ≡ *a′* *b′* (mod *d*), определим остатки, получающиеся при делении на одно и то же число последовательных степеней числа 10. Так как 10 = −1 + 11, то 10 ≡ − 1 (mod 11).

Умножая многократно это сравнение само на себя, получаем дальше

102 ≡ (− 1)(− 1)= 1 (mod 11),

103 ≡ (− 1) (mod 11),

104 ≡ 1 (mod 11) и т.д.

Отсюда можно заключить, что всякое целое число, запись по десятичной системе которого имеет вид *z* = *a*0 + *a*1 ⋅ 10 + *a*2 ⋅ 102 + … + *aп* ⋅ 10*п*, даёт тот же остаток при делении на 11, что и сумма его цифр, взятая с чередующимися знаками *t* = *a*0 − *a*1 + *a*2 − …

В самом деле, мы имеем: 

Так как все выражения 102 – 1, 103 + 1, … сравнимы с нулём по модулю 11, то *z* – *t* также сравнимо с нулём, и потому *z* при делении на 11 даёт тот же остаток, что и *t*. В частности, число делится на 11, т.е. даёт остаток 0 при делении в том и только в том случае, если знакочередующаяся сумма его цифр делится на 11. Например, число *z* = 3 162 819 делится на 11, так как 3 – 1 + 6 – 2 + 8 – 1 + 9 = 22 делится на 11. Найти таким же образом правило делимости на 3 или на 9 ещё проще, так как 10 ≡ 1 (mod 3 и 9), и потому  (mod 3 и 9) при любом *п*. Отсюда следует, что число *z* делится на 3 и 9 в том и только в том случае, если сумма его цифр  делится соответственно на 3 и на 9.

Если в качестве модуля возьмём 7, то получим 10 ≡ 3, 102 ≡ 2, 103 ≡ −1, 104 ≡ −3, 105 ≡ −2, 106 ≡ 1. Далее остатки повторяются. Таким образом, *z* делится на 7 в том и только в том случае, если выражение  делится на 7.

Складывая и умножая сравнения по определённому модулю, скажем, *d* = 5, можно всегда обеспечить то, чтобы входящие числа не становились слишком большими, заменяя всякий раз встречающееся число одним из чисел 0, 1, 2, 3, 4, а именно тем, с которым оно сравнимо. Так, вычисляя суммы и произведения различных чисел по модулю 5, нужно только пользоваться следующими таблицами сложения и умножения:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *a + b* | | | | | |
|  | *b* ≡ 0 | *b* ≡ 1 | *b* ≡ 2 | *b* ≡ 3 | *b* ≡ 4 |
| *a* ≡ 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| *a* ≡ 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| *a* ≡ 2 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| *a* ≡ 3 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| *a* ≡ 4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *ab* | | | | | |
|  | *b* ≡ 0 | *b* ≡ 1 | *b* ≡ 2 | *b* ≡ 3 | *b* ≡ 4 |
| *a* ≡ 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| *a* ≡ 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 1 |
| *a* ≡ 2 | 0 | 2 | 4 | 1 | 2 |
| *a* ≡ 3 | 0 | 3 | 1 | 4 | 3 |
| *a* ≡ 4 | 0 | 4 | 3 | 2 | 4 |

Из второй таблицы видно, что произведение *ab* сравнимо с нулём по модулю 5 только в том случае, если *а* или *b* ≡ 0 (mod 5). Это наводит на мысль о существовании следующего общего закона:

*ab* ≡ 0 (mod *d*) только в том случае, если *a* ≡ 0 или *b* ≡ 0 (mod *d*), что является распространением хорошо известного свойства обыкновенного умножения: *ab* = 0 только в том случае, если *а* = 0 или *b* = 0.

Но закон действителен только при том условии, что модуль d есть простое число. Действительно, сравнение ab ≡ 0 (mod d) означает, что ab делится на d, а мы уже видели, что произведение *ab* делится на простое *d* в том и только в том случае, если один из множителей *а* или *b* делится на *d*, т.е. если *a* ≡ 0 (mod *d*) или *b* ≡ 0 (mod *d*).

С другой стороны, закон теряет силу при *d* составном: можно тогда написать *d* = *r* ⋅ *s*, где оба множителя *r* и *s* меньше, чем *d*, так что



и, однако *rs* = *d* ≡ 0 (mod *d*).

Например, , но 2 ⋅ 3 = 6 ≡ 0 (mod 6).



Одним из важных моментов при решении задач на делимость является знание свойств делимости. Вспомним несколько определений и формулировок этих свойств для натуральных чисел.

Определение 1.Говорят, что число а делится на число *b*, если существует такое целое число *q*, что *a* = *b⋅ q*.

Если *а* делится на *b* нацело, то пишут *a b.*

Иногда говорят «*а* кратно *b*». Обратным к отношению *a b* является отношение «*b* делит *а*».

Теорема 1.Если каждое слагаемое суммы делится на число *b*, то и вся сумма делится на это число.

Теорема 2. Если каждое из чисел *а* и *b* делится на *с*  и *а* ≥ *b*, то разность *а* − *b* делится на *с*.

Теорема 3.Если хотя бы один из множителей произведения делится на число *b*, то и всё произведение делится на это число.

Теорема 4.Если в произведении *ab* множитель *а* делится на число *m*, а множитель *b* делится на число *п*, то произведение *ab* делится на произведение *mn*.

Теорема.5.Если в сумме одно слагаемое не делится на число *b*, а все остальные слагаемые делятся на это число, то и вся сумма на число *b* не делится.

Тема сравнения по модулю имеет непосредственное отношение *к теореме Ферма.*

В XVII столетии Ферма, основатель современной теории чисел, открыл чрезвычайно важную теорему. Если р – простое число, не делящее целого числа а, то  (mod *p*). Другими словами, (*р* – 1)–я степень *а* при делении на *р* даёт остаток 1.

Некоторые из ранее произведённых нами вычислений подтверждают эту теорему: так, мы видим, что 106 ≡ 1 (mod 7), 102 ≡ 1 (mod 3) и 1010 ≡ 1 (mod 11). Таким же образом легко проверить, что 212 ≡ 1 (mod 13) и 510 ≡ 1 (mod 11). Для этой цели нет необходимости на самом деле вычислять столь высокие степени данных чисел; достаточно использовать мультипликативное свойство сравнений:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 24 = 16 ≡ 3 (mod 13), | |  | 52 ≡ 3 (mod 11), |  |
|  | 28 ≡ 9 ≡ − 4 (mod 13), | |  | 54 ≡ 9 ≡ − 2 (mod 11), |  |
|  | 212 ≡ − 4 ⋅ 3 = − 12 ≡ 1 (mod 13), | | | 58 ≡ 4 (mod 11), |  |
|  |  |  |  | 510 ≡ 3 ⋅ 4 = 12 ≡ 1 (mod 11). | |

Обращаясь к доказательству теоремы Ферма, рассмотрим числа, кратные *а*: . Никакие два из этих чисел не могут быть между собой сравнимы по модулю *р.* В противном случае *р* должно было бы делить разность , где *r, s* была бы пара целых чисел, подчинённых ограничению . Но из закона 7) следует, что этого не может случиться: так как *s – r* меньше, чем *р*, то *р* не делит *s – r* ; с другой стороны, по предположению, *р* не делит и *а*. Таким же образом мы убеждаемся, что ни одно из чисел *т* не сравнимо с нулём. Отсюда следует, что числа  соответственно сравнимы с числами 1, 2, …, *р* – 1, взятыми в некоторой их перестановке. Дальше заключаем:  (mod *p*),

или же полагая для краткости *K* = 1⋅2⋅3…(*p* – 1), *K*(*a p −*  1 – 1) ≡ 0 (mod *p*).

Число *K* не делится на *р*, так как ни один из входящих в него множителей не делится на *р*; значит, согласно закону 7) (*a p −*  1 – 1) должно делиться на *р*, т.е. *a p −*  1 – 1 ≡ 0 (mod *p*). Это и есть теорема Ферма.

Проверим эту теорему ещё раз. Возьмём *р* = 23 и *а* = 5; тогда получаем по модулю 23 52 ≡ 2, 54 ≡ 4, 58 ≡ 16 = – 7, 516 ≡ 49 ≡ 3, 520 ≡ 12, 522 ≡ 24 ≡ 1. Если возьмём *а* = 4 вместо 5, то будем иметь, опять- таки по модулю 23, 42 ≡– 7, 43 ≡ –28 ≡ –5, 44 ≡ – 20 =3, 48 ≡ 9, 411 ≡ –45 ≡ 1, 422 ≡ 1. В примере, где было взято *а* = 4, *р* = 23 (как и во многих иных), можно заметить, что не только (*р* – 1)–я степень, но и более низкая степень *а* уже оказывается сравнимой с единицей.

Наименьшая такая степень – в нашем примере степень 11 – непременноесть делитель числа (*р* – 1).

А теперь разберём несколько задач на делимость, связанных с понятием «сравнение по модулю».

Задание 1. Доказать или опровергнуть утверждения: а) сумма двух простых чисел – чётное число; б) если *а* делится на 6 и *b* делится на 10, то *ab* делится на 15; в) если сумма чётных чисел делится на 3, то она делится на 6.

Решение*.* Утверждение а) неверно: например, 2 + 3 = 5;

б) Пусть *а* делится на 6, *b* делится на 10. Тогда *а* = 6*k*, *b* = 10*n*, где *k* и *п* – целые числа. Поэтому *ab* = 60*kn* = 15(4*kn*), т.е. *ab* делится на 15. Следовательно, утверждение б) верно.

Утверждение в) верно: если чётное число *а* = 2*п* делится на 3, то *п* делится на 3, так что *а* делится на 6; сумма двух чётных чисел чётна и поэтому также делится на 6.

Задание 2*.* Доказать, что: а) 22011 – 41003 делится на 31; б) 18686 + 16353 делится на 17.

Решение*.* а) 22011 – 41003 = 22006 (25 – 1) = 22006 ⋅ 31;

б) По модулю 17 18686 ≡ 1686 ≡ 1, 16353 ≡ (– 1) 353 ≡ – 1, 18686 + 16353 ≡ 1 + (– 1) = 0, т.е. утверждение б) верно.

Задание 3*.* Найти остаток от деления: а) 4*п* + 3 на 2 (*п* – целое); б) 4*п* + 3 на *п* (*п* – натуральное, большее 1); в) 32011 на 8.

Решение.Обозначим искомый остаток буквой *r*. а) 4*п* + 3 ≡ 1 (mod 2), так что *r* = 1;

б) Если *n* > 3, то *r* = 3, так что осталось рассмотреть случаи *п* = 2 и *п* = 3. Составим таблицу.

*Рекомендуйте чаще использовать таблицу, т.к. это более наглядный способ, позволяющий не потерять варианты решения.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *п* | 2 | 3 | *n* > 3 |
| 4*п* + 3 | 11 | 15 |  |
| *r* | 1 | 0 | 3 |

в) По модулю 8 имеем 32011 = 32*k* + 1 = 9*k* ⋅ 3 ≡ 1 ⋅ 3 = 3, так что *r* = 3.

Задание 4.В какую из прогрессий: 5, 9, 13, … ; 7, 11, 15, … ; 2, 6, 10, … входит число 2 ⋅ 930 + 3 ⋅ 720?

Решение.Общие члены данных прогрессий: *ап* = 4*п* + 1, *ап* = 4*п* + 3, *ап* = 4*п* – 2, т.е. при делении на 4 дают остатки соответственно 1, 3 и 2. Так как по модулю 4  и данная сумма больше 1, то она входит в первую прогрессию.

Задание 5*.* Может ли число 1 + 2 + 3 + … + *п* при каком-нибудь натуральном *п* оканчиваться цифрой 4 или 7?

Решение*.* Сумма первых *п* натуральных чисел находится по формуле . Запишем в таблицу последние цифры произведения соседних однозначных чисел.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *п* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| *п* + 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| *п* (*п* + 1) | 2 | 6 | 2 | 0 | 0 | 2 | 6 | 2 | 0 |

Если число  оканчивается цифрой 4 или 7, то *п* (*п* + 1) оканчивается соответственно цифрами 8 или 4. А это, как мы только что показали, невозможно.

Понятие делимости часто используется и в решении текстовых задач.

Задание 6*.* Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

Решение*.* Обозначив первоначальное число рядов за *п*, получим неравенство . Отсюда можно вывести, что возможные значения *п* – это целые числа от 1 до 7. Заметим, что по условию число 24*п* – полный квадрат. Отсюда следует, что *п* = 6. Тогда число солдат равно 144.

Тема «делимость чисел» – одна из излюбленных тем в конкурсе «Кенгуру».

Задание 7 (Кенгуру- 1997). Для скольких целых чисел *n* число  целое?

(А) 0 (В) 1 (С) 2 (D) 6 (Е) таких чисел бесконечно много

Решение. Выделим целую часть. = 1 + . Если 4 делится на (*n+7)* нацело*,* то исходная дробь – целое число. Делители 4 – это числа ± 1,± 2, ± 4. Значит, *n+7* может равняться любому из этих чисел.

Ответ: (D) 6 .

Задание 8 (К- 2000). Назовем число удивительным, если оно равно произведению всех своих делителей (кроме самого числа). Например, 6 – первое удивительное число. Найдите пятнадцатое удивительное число.

(А) 51 (В) 55 (С) 39 (D) 44 (Е) 46.

Решение. Для того, чтобы натуральное число А было удивительным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид *р∙q* или *р3*, где *р* и *q* – простые числа. Докажем это, рассуждая от противного. Пусть р – составное, тогда оно равно произведению каких-то чисел *m n*, и тогда А имеет еще и делители *m,n, mq, nq*, что не соответствует условию. Значит, второе число 23 = 8, третье 2∙5=10, затем 2∙7 =14, далее 15, 21, 22, 26, 27, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 51, 55…

Ответ: (Е) 46.

Задание 9 (К- 2000). Сколько можно найти различных целых чисел, у которых самый большой делитель (не считая самого числа) равен 91?

Решение. Чтобы найти наибольший делитель отличный от самого числа, надо в каноническом разложении числа убрать один самый маленький делитель,

91 = 7∙13. Чтобы 7∙13 оставалось наибольшим делителем, надо перед ним добавить меньший множитель - это могут быть только простые числа 2,3,5,7. Значит, искомых чисел всего четыре: 2∙7∙13, 3∙7∙13, 5∙7∙13, 7∙7∙13. Но для чисел им противоположным и для числа -91 число 91 также будет наибольшим делителем, значит, еще 5 чисел.

Ответ: 9 чисел.

Задание 10 (К - 2002). Любитель арифметики перемножил первые 2002 простых числа. На сколько нулей оканчивается произведение?

(A) 0 (B) 1 (C) 10 (D) 20 (E) 100

Решение. Никакие простые множители, кроме 2 и 5 не дадут в произведении 10, т.е. не добавят 0 к произведению простых чисел. Значит, произведение оканчивается на 1 нуль.

Ответ: (B) 1.

Задание 11 (К - 2002). Число 15=3∙5 в 5 раз больше своего наименьшего делителя, отличного от 1. Сколько всего натуральных чисел обладают таким свойством?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) бесконечно много

Решение. Пусть наименьший делитель *а*. Тогда надо искать числа вида 5*а*, причем *а* простое и *а* ≤ 5. Значит, а равно 2,3 или 5. Искомые натуральные числа 10, 15 и 25.

Ответ: (C) 3.

Задание 12 (К - 2002). Сколько пар натуральных чисел (a,b) , где a ≤ b, удовлетворяют

равенству НОК(a,b) = НОД (a,b) + 10?

(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 5 (E) другой ответ

Решение. Известно, что НОК(a,b) делится на НОД (a,b). По условию НОК(a,b) - НОД (a,b) = 10. По теореме 2 (Если каждое из чиселделится на *с*, то их разность делится на *с*) 10 делится на НОД (a,b). Значит, НОД (a,b) может равняться числу 1, 2, 5 или 10. Разберем каждый случай.

Пусть НОД (a,b) = 1, тогда НОК (a,b) = 11, a∙b = 1∙11 =11.Это возможно при a =1,b =11.

Пусть НОД (a,b) = 2, тогда НОК (a,b) = 12, a∙b = 2∙12 =24. Это возможно при a =2,b =12 и при a =4, b = 6.

Пусть НОД (a,b) = 5, тогда НОК (a,b) = 15, a∙b = 5∙15 =75.Это возможно при a =5,b =15.

Пусть НОД (a,b) = 10, тогда НОК (a,b) = 20, a∙b = 10∙20 =200.Это возможно при a =10,b =20.

Ответ: (D) 5 .

Задание 13 (К - 2003). Сколькими способами можно записать число 2003 в виде суммы а + *b*, где а и *b* - простые числа и а < *b*?

(А) 0 (В) 1 (С) 2 (D) 3 (Е) более 3

Решение. Если а + *b =*2003,то а и *b* должны быть числами разной четности. Значит, одно из них 2 - единственное простое четное число. Тогда другое 2001. Проверим по признаку делимости на 3, что число 2001 – составное (2001 = 3∙23∙29). Значит, 2003 не представимо в виде суммы двух простых чисел.

Ответ: (А) 0.

Задание 14 (К - 2003). Будем называть старшим делителем числа *n* самый большой из его делителей, отличных от самого числа *n*. Аналогично, младший делитель числа *n* — это самый маленький его натуральный делитель, отличный от 1. Сколько существует таких натуральных чисел *n*, для которых старший делитель в 18 раз больше младшего?

(А) 0 (В) 1 (С) 2 (D) бесконечно много (Е) другой ответ

Решение. Пусть *а* – младший делитель, тогда старший делитель – 18*а*. Делитель 18*а* – четный, значит, и само число *n* четное. Следовательно, наименьший его делитель 2, и тогда старший 36, соответственно само число *n =* 72.

Ответ: (В) 1 .

Задание 15 (К - 2003). Сколько существует таких натуральных *n*, что остаток от деления 2003 на *n* равен 23?

(А) 22 (В) 19 (С) 13 (D) 12 (E) 87

7

Решение. Любое число представимо в виде *N* = *km* + *r*. Тогда 2003 =*km* + *23*, т.е. *km* = 1980. Значит, надо искать *m –* делитель числа 1980, причем *m >*23*.* Запишем каноническое разложение числа: 1980 =22∙ 32∙ 5∙ 11. Значит, делителями числа 1980 будут любые комбинации простых множителей 2 и 3 с показателями от 0 до 2, а также 5 и 11 с показателями от 0 до 1. Всего будет 3∙3∙2∙2= 36 делителей : от наименьшего 20∙ 30∙ 50∙ 110 =1 до наибольшего 22∙ 32∙ 5∙ 11=1980.

Начнем их выписывать по возрастанию: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, 18, 20, 22, 30 и далее. К счастью, нас не просят перечислить все *m >*23. Поэтому достаточно сказать, что если меньших, чем 23 делителей 14,то больших 22 (36 – 14).

Ответ: (А) 22.

6.Задания для самостоятельного решения.

1.Найдите остатки от деления:

а) 1910 на 66; б) 1914 на 70; в) 179 на 48; г) 141414 на 100.

Решение

а) Обозначим остаток от деления 1910 на 66 через r. Из сравнений 19 1(mod 2),

19 1(mod 3), 19 - 2(mod 11), следует, что r 1(mod 2), r 1(mod 3), r (- 2)10(mod 11). По малой теореме Ферма, (- 2)10 1(mod 11). Отсюда r = 1.

б) 11; в) 17; г) 36.

2. Докажите, что для составного числа 561 справедлив аналог малой теоремы Ферма: если (a, 561) = 1, то выполняется сравнение a560 = 1(mod 561).

Числа, обладающие этим свойством, называются числами Кармайкла.

Решени

Так как 561 = 3 . 11 . 17, то достаточно доказать справедливость сравнений a560 = 1(mod p), где p принимает значения p = 3, 11, 17. Каждое такое сравнение выполняется по малой теореме Ферма.

***7. Признаки делимости.***

*Старинная восточная притча:*

Давным-давно жил-был старик, который, умирая, оставил своим трем сыновьям 19 верблюдов. Он завещал старшему сыну половину, среднему – четвертую часть, а младшему – пятую. Не сумев найти решения самостоятельно (ведь задача в «целых верблюдах» решения не имеет), братья обратились к мудрецу.

- О, мудрец!- сказал старший брат. - Отец оставил нам 19 верблюдов и велел разделить между собой: старшему – половину, среднему – четверть, младшему – пятую часть. Но 19 не делится ни на 2, ни на 4, ни на 5. Можешь ли ты, о, достопочтенный, помочь нашему горю, ибо мы хотим выполнить волю отца?

- Нет ничего проще, - ответил им мудрец. – Возьмите моего верблюда и идите домой.

Братья дома легко разделили 20 верблюдов пополам, на 4 и на 5.Старший брат получил 10, средний – 5, а младший – 4 верблюда. При этом один верблюд остался (10+5+4=19). Раздосадованные, братья вернулись к мудрецу и пожаловались:

- О, мудрец, опять мы не выполнили волю отца! Вот этот верблюд – лишний.

- Это не лишний, - сказал мудрец,- это мой верблюд. Верните его и идите домой.

Математика – царица всех наук. Её возлюбленный – истина, её наряд – простота и ясность. Дворец этой владычицы окружён тернистыми зарослями, и, чтобы достичь его, каждому приходится продираться сквозь чащу. Случайный путник не обнаружит во дворце ничего привлекательного, красота его открывается лишь разуму, влюблённому в истину, закалённому в борьбе с трудностями

Изучая математику очень важно уметь логически мыслить и рассуждать, проводить доказательства, осуществлять цепочки логических выводов, владеть базовыми эвристиками. Достигнуть этого можно путём систематизированного использования обычных арифметических упражнений, а также упражнений на распознавание объектов, принадлежащих и не принадлежащих понятию. В этом плане хорошие возможности представляет материал, связанный с делимостью чисел.

Для выяснения делимости числа а на число b имеется довольно много

разнообразных способов. Один из них состоит в непосредственном делении числа а на число b. Однако такое деление часто оказывается слишком долгим и утомительным занятием, и естественно появляется желание установить

истинность интересующей нас делимости, не производя фактического деления.

Можно надеяться, что более прямые способы выяснения делимости, чем

≪грубое≫ деление, будут экономнее и позволят установить факт делимости более коротким путём. Эти методы в действительности оправдываются, и такие способы выяснения делимости существуют. Они называются признаками делимости.

Сущность всякого признака делимости на данное число b состоит в том,

что при его помощи вопрос о делимости любого числа, а на b сводится к вопросу о делимости на b некоторого числа, меньшего, чем а. Таким образом, признак делимости является математическим объектом весьма распространенной, хотя и не бросающей в глаза природы. Это не формула, не теорема, не определение, а некоторый процесс, совершенно такого же типа, что и процесс умножения чисел столбиком, или, скажем процесс вынесение одного за другим членом арифметической прогрессии.

Признак Паскаля: Натуральное число а разделится на другое натуральное число b только в том случае, если сумма произведений цифр числа а на соответствующие остатки, получаемые при делении разрядных единиц на число b, делится на это число.

2814 делится на 7, т.к. 2·6 + 8 ·2 + 1 ·3 +4 = 35,

35:7=5 (где 6 – остаток от деления 1000 на 7;

2 - остаток от деления 100 на 7,

3 - остаток от деления 10 на 7)

Откроем завесу тайны над тем, как же доказываются признаки делимости, известные каждому с детства.

Например, запись 2459 означает, что 2 - цифра тысяч, 4 - цифра сотен, 5 - цифра десятков, 9 - цифра единиц, т. е. 2459=2Ч 1000 + 4Ч 100 + 5Ч 10 + 9.

Вообще если а - цифра тысяч, b - цифра сотен, c - цифра десятков, d - цифра единиц, то имеем aЧ 1000+ +bЧ 100 + cЧ 10 + d. Используется также сокращенная запись . Аналогично запись  означает число aЧ 10 000 + bЧ 1000 + cЧ 100 + dЧ 10 + e, причем a № 0.

Задание.

Придумайте признаки делимости натуральных чисел на а)2; б)5; в)3; г)4; д)25.

Подсказка

В случаях а) и б) натуральное число надо представить в виде суммы десятков и единиц; в случаях г) и д) числа надо представлять в виде суммы сотен и двузначного числа, составленного из десятков и единиц; в случае в) заметьте, что любое число вида 1000000 можно представить как сумму 1 и 999999.

Решение

Будем использовать такое обозначение числа {abcde}=a\*10000+b\*1000+c\*100+d\*10+e. Для случаев а) и б) напишем равенство {abcde}= {abcd}\*10+e, после чего замечаем, что первое слагаемое делится на 5 и на 2. Следовательно, число будет делится на 2, если последняя цифра числа четная, и число будет делится на 5, если последняя цифра числа будет 5 или 0. Для случаев г) и д) напишем равенство {abcde}={abc}\*100+{de}. Первое слагемое делится и на 4, и на 25, следовательно первоначальное число будет делится на указанные числа, если на них делится число {de}. В случае в) запишем равенство {abcde}=a\*10000 + b\*1000 +c\*100+d\*10+e=(a\*9999+b\*999+c\*99+d\*9)+(a+b+c+d+e). Замечаем, что первое слагаемое делится на 3 и, следовательно, данное число будет делится на 3, если последнее слагаемое, а именно сумма всех цифр числа делится на 3. Заметьте, что из последнего равенства следует, что число делится и на 9, если сумма его цифр делится на 9.

Очень важно заметить, что обратные утверждения тоже справедливы. Правильно сформулировать признаки можно следующим образом:

Число делится на 3 (9) тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (9).

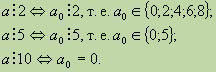
Число делится на 25 (4) тогда и только тогда, когда число, составленное из двух последних цифр данного числа, делится на 25 (4).

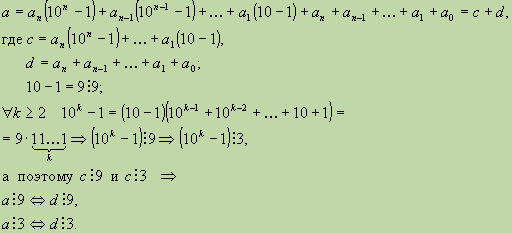
Или

пусть дано натуральное число ,

где 

Пусть 



ПустьПредставим число a в таком виде

Итак,

Теорема 3 (признак делимости на 2).

Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2.

Теорема 4 (признак делимости на 3).

Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

Теорема 5 (признак делимости на 4).

Натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда делится на 4 двузначное число, образованное последними двумя цифрами данного числа.

Теорема 6 (признак делимости на 5).

Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5.

Теорема 7 (признак делимости на 9).

Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

Теорема 8 (признак делимости на 10).

Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0.

Задание.

1.Докажите, что n3 + 2n делится на 3 при любом натуральном n.

Решение

Имеем равенство: n3 + 2n = n(n2 + 2) а) Если n=3k, то первый множитель делится на 3; б) если n не делится на 3, то изучим второй множитель. Он равен (3k + 1)2+2 = 9k + 6k +3 или (3k - 1)2+2 = 9k - 6k +3 , в любом случае он делится на 3.

2.Двое пишут а) 30-значное; б) 20-значное число, употребляя только цифры 1, 2, 3, 4, 5. Первую цифру пишет первый, вторую — второй, третью — первый и т. д. Может ли второй добиться того, чтобы полученное число разделилось на 9, если первый стремится ему помешать?

Решение

а) Стратегия второго: писать цифру так, чтобы сумма предыдущей цифры и его равнялась

б) Стратегия первого: сначала нужно написать 1, а потом писать цифру так, чтобы сумма предыдущей цифры и его равнялась 6. В этом случае перед последним ходом второго игрока сумма цифр будет равна 55, и он не сможет добиться своей цели.

Есть более сложные признаки делимости, но иногда полезно знать и о них.

1.Признаки делимости на 6

Чтобы проверить делимость числа на 6, надо: число сотен умножить на 2, полученный результат вычесть из числа стоящего после числа сотен. Если полученный результат делится на 6, то и все число делится на 6.

Например:

* 1. – число сотен 1\*2=2, 38-2=36, 36:6, значит, 138 делится на 6.

2.Признак делимости чисел на 6

На 6 делятся те натуральные числа, которые делятся на 2 и на 3 одновременно (все четные числа, которые делятся на 3).

Например: 126 (б — четное, 1 + 2 + 6 = 9, 9 : 3 = 3).

Аналогичны признаки делимости на 12, 15. 18 и т.д.

1. На 12 делятся те и только те числа, которые делятся и на 3 и на 4 (но не 2 и на 6, так как 2 и 6 имеют общий множитель). Например, 75348 делится на 12, так как делится и на 3 и на 4.
2. На 15 делятся те и только те числа, которые делятся и на 3 и на 5. Например, 23520 делится на 15, так как делится и на 3 и на 5.
3. На 18 делятся те и только те числа, которые делятся и на 2 и на 9. Например, 13518 делится на 18, так как делится и на 2 и на 9, и т.д.

Задание:

1.Придумайте и сформулируйте новые признаки делимости и примеры (например, на 21=3⋅7, 45 =5⋅9 и т.п.)

2.Доказать, что число n5 – 5n3 + 4n делится на 120 при любом натуральном n.

Решение

Разложив на множители n5 – 5n3 + 4n = n(n2 - 1)(n2 - 4) = (n - 2)(n - 1)(n + 1)(n + 2), получим пять последовательных чисел, одно из которых делится на 5, по крайней мере, одно число делится на 3, и по крайней мере два числа являются соседними четными числами, одно из которых делится на 2, а другое на 4. Окончательно данное выражение делится на 2×4×3×5=120.

3.Найдите все такие трехзначные числа, которые в 12 раз больше суммы своих цифр.

Решение

Число получается из суммы своих цифр умножением на 12, значит, оно кратно 3. Согласно признаку делимости на 3, сумма цифр также делится на 3. Поэтому само число должно делится на 9. Кроме того оно делится на 4. Следовательно нужно искать среди чисел, которые делятся на 36. Поскольку сумма цифр трехзначного числа не превосходит 27, то само число может быть не больше 27 . 12 = 324. Перебор можно еще сократить, если заметить, что сумма цифр может быть не больше 18 (она делится на 9 и меньше 27). Поэтому само число не больше 18 . 12 = 216. Осталось перебрать числа 108, 144, 180, 216.

Ответ 108.00

4. Биографическая миниатюра. Блез Паскаль.

1.Признаки делимости на 7

Чтобы узнать делится ли число на 7, надо: число, стоящее до десятков умножить на два, к результату прибавить оставшееся число. Проверить делится ли полученный результат на 7, или нет.

Например:

4690 - 46·2=92, 92+90=182, 182:7=26, значит, 4690 делится на 7.

2.Признак делимости на 7

Число делится на 7 или **на 13** (1. признак), еслина эти числа делится разность числа тысяч и числа, выражаемого последними тремя цифрами; эта операция уменьшает число знаков в числе, и последовательное её применение приводит к трёхзначному числу. Например, 825 678 делится на 7, т.к. 825678 = 147 делится на 7.

3.Признак делимости на 7

Число делится на 7 тогда и только тогда, когда результат вычитания удвоенной последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7 (например, 364 делится на 7, так как 36 - (2 • 4) = 28 делится на 7).

4.Признак делимости на 7

Ещё один признак — берём первую цифру, умножаем на 3, прибавляем следующую (здесь можно взять остаток от деления на 7 от получившегося числа). И далее — сначала: умножаем на 3, прибавляем следующую… Для 364: 3 \* 3 + 6 = 15. Остаток — 1. Далее 1 \* 3 + 4 = 7.

Задание :

1.Припишите к числу 1 000 000 три цифры справа так, чтобы число делилось на 7.

Решение. Чтобы искомое число делилось на 8, число, составленное из приписанных цифр должно делиться на 8; чтобы делилось на 9 – сумма цифр искомого числа должна делиться на 9. Получить такое число (делится на 8 и 9) самым простым способом можно приписав 008. Получится число 1000 000 008. Проверим делимость его на 7.

По признаку делимости на 7: 1000000 – 8 = 999992;

999 -992 = 7; 7 делится на 7.

Или просто делим, 1 000 000 008: 7= 142 857 144. Мы получили искомое число.

Ответ: 1000 000 008.

2.Дано трехзначное число, у которого первая и последняя цифра одинаковые. Доказать, что число делится на 7 тогда и только тогда, когда делится на 7 сумма второй и третьей цифр.

Решение

Обозначим первую цифру нашего числа буквой a, вторую буквой b. По условию последняя цифра тоже равна a. Тогда наше число равно 100a + 10b + a = (98a + 7b) + 3(a + b). Первое слагаемое делится на 7 при любых a и b. Если второе слагаемое делится на 7, то и само число делится на 7. Обратно, если число делится на 7, то второе слагаемое 3(a + b) делится на 7, следовательно, a + b делится на 7.

1.Признак делимости на 8

Число делится на 8 тогда и только тогда, когда число из трех последних цифр делится

на 8.

Например:

6709112 – 112 делится на 8, значит, 6709112 кратно 8.

2.Признак делимости на 8

Чтобы узнать, делится ли трёхзначное число на 8, можно половину единиц прибавить к десяткам. У получившегося числа также половину единиц прибавить к десяткам. Если итоговая сумма делится на 2, значит, число делится на 8. Например, 952: 95 + 1 = 96, далее 9 + 3 = 12. Значит, 952 делится на 8.

Аналогичны признаки делимости на 25, 125.

Признак делимости на 25.

Число делится на 25 тогда и только тогда, когда число образованное его последними двумя цифрами делится на 25.

652 475 делится на 25, т.к. 75 делится на 25

Признак делимости на 125.

Число делится на 125 тогда и только тогда, когда число образованное его последними тремя цифрами делится на 125

354 250 делится на 125, т.к. 250 : 125 = 2

**Признак делимости на 11.**

Простым и очень полезным является признак делимости на 11. Любопытное применение нашел этот способ при исследовании числа "счастливых" билетов. Некоторое время назад в трамваях, троллейбусах кондукторы продавали билеты. Затем эта процедура была переведена на обслуживание: пассажиры сами бросали деньги в кассу и отрывали билеты. Каждый билет имел шестизначный номер, например, 286358. Этот билет в Москве считался "счастливым" в силу того, что сумма его первых трех цифр - 16- равняется сумме оставшихся трех цифр. Тут же возникла задача: насколько часто встречаются "счастливые" билеты, точнее, сколько "счастливых" чисел среди чисел от 000000 до 999999?

В то же время в Санкт-Петербурге (тогда еще Ленинграде) "счастливыми" считались билеты, у которых сумма цифр, стоящих на четных местах, равнялась сумме цифр, стоящих на нечетных местах. Если немного подумать, то нетрудно понять, что "счастливых" билетов "по-московски" столько же, сколько и "по-ленинградски". Но билет, счастливый "по-ленинградски", делится на 11, в то же время не всякое шестизначное число, делящееся на 11, будет номером билета, "счастливого по-ленинградски", например, число 405000.

Значит, билетов, "счастливых по-ленинградски", как и билетов, "счастливых по-московски", меньше, чем чисел, делящихся на 11. Чисел до миллиона, делящихся на 11, как нетрудно подсчитать, 90910, значит, "счастливых" билетов меньше. На самом деле их 55252, т.е. "счастливым" оказывался в среднем каждый 18-й билет.

**1.**Число 10а + b делится на 11, если на 11 делится число b - а

Например, 9416

6-941 = -935

935 → 5-93=-88: 11

Это следует из теоремы 2.

**2.**

Трёхзначное число кратно 11, если средняя цифра равна сумме крайних

цифр.

Пусть, например, таким числом будет 385. Убедиться, что это число

делится на 11, можно либо непосредственным делением, либо разложением числа

на простые множители, либо представлением числа в десятичной системе

исчисления. Представим число 385 в виде: 3\*100+8\*10+5. Вспомним об условии

задачи и используем его: 3\*100+(3+5)\*10+5 = (3\*100+3\*10)+(5\*10+5) = 30 (10

+1)+5(10+1) = 30\*11+5\*11 = 11\*35, т.е. 385:11. Частный случай обнажил способ

решения задачи в общем виде. При b=a+c для трёхзначного числа abc,

записанного в общем виде, аналогично имеем: 100a+10(a+c)+c=11(10a+c). Другой

способ (с использованием теоремы 2 при m=1) ведёт к рассуждениям сразу в

общем виде: c-(10a+a+c) = -11a:11=> abc:11. Третий способ: разность между

цифрой, стоящей на чётном месте, и суммой остальных цифр равна 0,0:11, значит,

и трёхзначное число, обладающее указанным свойством, делится на 11.

**3.**

Пятизначное число кратно 11, если сумма крайних и средней цифры равна

сумме остальных цифр.

Например, 36245 делится на 11, так как 3+5+2=4+6

Доказательство:

Пусть дано пятизначное число abcde, причём a+c+e=b+d. Докажем, что это

число делится 11. Воспользуемся теоремой 2, (m=1).

е - (1000а+100b+10c+d) = b + d - a- c - (1000a -100b-10c-d) = -1001a -11c-

99b = -11(91a +c) - 11\*9b = -11(91a+c+9b) делится на11.

**4.**

Число делится на 11, если разность между числом, выраженным тремя

последними цифрами, и числом, выраженным остальными цифрами, делится на

11.

Например, 93753 → 753-93=660:11

**5.**

Пусть многозначное число N имеет цифру единиц а, цифру десятков b,

цифру сотен с, цифру тысяч d и т. д., т. е.

9

N = a + 10 b + 100с + 1000 d +... = а + 10 (b + 10с + 100 d +...),

где многоточие означает сумму дальнейших разрядов. Вычтем из N число 11 (b

+ 10с + 100 d + ...), кратное одиннадцати. Тогда полученная разность, равная, как

легко видеть,

a - b - 1 0 (c + 10d+...),

будет иметь тот же остаток от деления на 11, что и число N. Прибавив к этой

разности число 11 (с + 10 d +...), кратное одиннадцати, мы получим число

a - b + c + 10с +...),

также имеющее тот же остаток от деления на 11, что и число N. Вычтем из него

число 11 (d +...), кратное одиннадцати, и т. д. В результате мы получим число

а - b + с - d +... = (а + с +...) - (b + d + …),

имеющее тот же остаток от деления на 11, что и исходное число N.

Отсюда вытекает следующий признак делимости на 11: надо из суммы

всех цифр, стоящих на нечетных местах, вычесть сумму всех цифр, занимающих

четные места; если в разности получится 0 либо число (положительное или

отрицательное), кратное 11, то и испытуемое число кратно 11; в противном случае

наше число не делится без остатка на 11.

Испытаем, например, число 87 635 064:

8 + 6 + 5 + 6 = 25,

7 + 3 + 0 + 4 = 14,

25-14 = 11.

Значит, данное число делится на 11.

**6.**

Существует и другой признак делимости на 11, удобный для не очень

длинных чисел. Он состоит в том, что испытуемое число разбивают справа налево

на грани по две цифры в каждой и складывают эти грани. Если полученная сумма

делится без остатка на 11, то и испытуемое число кратно 11, в противном случае

— нет. Например, пусть требуется, испытать число 528. Разбиваем число на грани

(5/28) и складываем обе грани:

5 + 28 = 33.

Так как 33 делится без остатка на 11, то и число 528 кратно 11:

528:11 = 48.

Докажем этот признак делимости. Разобьем многозначное число N на

грани. Тогда мы получим двузначные (или однозначные) числа, которые

обозначим (справа налево) через а, b , с и т. д., так что число N можно будет

записать в виде:

N=a+100b + 1000с +... = а + 100 (b + 100с +...).

Вычтем из N число 99 (b + 100с +...), кратное одиннадцати. Полученное

число

а + (b + 100с +...) = а + b + 100 (с +...)

будет иметь тот же остаток от деления на 11, что и число N. Из этого

числа вычтем число 99 (с + ...), кратное одиннадцати, и т. д. В результате мы

найдем, что число N имеет тот же остаток от деления на 11, что и число

а + Ь + с + ...

ПРИМЕРЫ.

Выясните, делится ли данное число на 11.

1) 829382686.

Найдем сумму цифр, стоящих на нечетных местах, (считаем номера цифр слева или справа безразлично) 8 + 9 + 8 + 6 + 6 = 37.

Найдем сумму цифр, стоящих на четных местах. 2 + 3 + 2 + 8 = 15.

Находим разность полученных сумм. 37 – 15 = 22. 22 делится на 11, значит, и данное число 829383686 делится на 11.

2) 6538520890.

6 + 3 + 5 + 0 + 9 = 23;

5 + 8 + 2 + 8 + 0 = 23.

* + 1. – 23 = 0, значит, данное число 6538520890 делится на 11.

3).С6. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящихся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

Решение. Да, найдутся, например, 1234568709, 123458907 и 1234598607.

Таких решений, которые указаны выше можно придумать достаточно много. Стоит только переставить цифры, например, 1 и 3 в числе 1234568709 мы получим новое число 3214568709, которое также будет делиться на 11. Поступая так несколько раз с другими цифрами можно получить новые тройки чисел, удовлетворяющих условию задачи.

Все дело в том, что признак делимости натурального числа на 11 говорит: "Если разность сумм цифр стоящих на нечетных местах и на четных местах делятся на 11, то и само число делится на 11".

Учитывая этот признак делимости числа на 11.

Сумма всех цифр искомого числа равна 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45. Разобью все цифры от 0 до 9 на две группы так, чтобы разность сумм чисел этих групп делилась на 11. Например, так: 28 - 17 =( 9 + 7 + 6 + 4 + 2) - (1 + 3 + 5 + 8 + 0).

Далее будем брать по одной цифре из каждой группы и записывать их друг за другом. При этом важно только чтобы первая цифра была, например, из первой группы, а вторая - из второй.

4).Докажи, что если к любому трехзначному числу приписать трехзначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится число, делящееся на 11.

Если к трёхзначному числу abc приписать его цифры в обратном порядке, получится шестизначное число abccba, которое равно 100000a+10000b+1000c+100с+10b+a = 100001a+10010b+1100c = 11(9091a+910b+100c).

Знакопеременная сумма его цифр равна a-b+c-с+b-a = 0; 0 на 11 делится, значит и само число делится.

2.Признак делимости на 13

Число делится на 13 тогда и только тогда, когда сумма числа, полученного отбрасыванием последней цифры и учетверённой последней цифры, делится на 13. Например 845 : 13 , так как 84+(4\*5)=104:13 10+(4\*4)= 26:13.

Выясните, делится ли данное число на 13.

1) 3432.

Составляем сумму числа 343 и учетверенной последней цифры, получаем:

343 + 4\*2 = 351 = 390 – 39. Т.к. и уменьшаемое и вычитаемое делятся на 13, то и сумма 351 делится на 13.

2) 2528.

252 + 4\*8 = 252 + 32 = 284 = 260 + 24.

260 делится на 13, 24 не делится на 13, значит, сумма 284 не делится на 13. Получаем, что данное число 2528 не делится на 13.

Признак делимости на 17

Число делится на 17 тогда и только тогда, когда число его десятков, сложенное с увеличенным в 12 раз числом единиц, кратно 17 (например, 29053 > 2905+36 = 2941 > 294+12 = 306 > 30+72 = 102 > 10+24=34. Поскольку 34 делится на 17, то и 29053 делится на 17). Признак не всегда удобен, но имеет определенное значение в математике. Есть способ немного проще — число делится на 17 тогда и только тогда, когда разность между числом его десятков и упятерённым числом единиц кратна 17 (например, 32952 > 3295-10 = 3285 > 328-25 = 303 > 30-15 = 15; поскольку 15 не делится на 17, то и 32952 не делится на 17).

Признак делимости на 19

Число делится на 19 тогда и только тогда, когда число его десятков, сложенное с удвоенным числом единиц, кратно 19 (например, 646 делится на 19, так как 64 + (6 ? 2) = 76 делится на 19).

Задание.

Найти натуральное наименьшее целое число n такое, что n делится на 19, а n+2 делится на 82.

Решение

Число 19k + 2 может делится на 82 только при четном k = 2m. Тогда 19m + 1 = 41q или 19m = 38q + (3q-1). Выражение справа делится на 19, если будет делиться на 19 второе слагаемое, т.е. 3q - 1 = 19p или 3q = 18p + (p+1). Наименьшее p, при котором второе слагаемое делится на 3, равно 2. Тогда q = 13, m = 28; k = 56; n = 19×56=1064.

Признак делимости на 20

Число делится на 20 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 0 и его предпоследняя цифра делится на 2.

Признак делимости на 23

Число делится на 23 тогда и только тогда, когда число его сотен, сложенное с утроенным числом десятков и единиц, кратно 23 (например, 28842 делится на 23, так как 288 + (3 \* 42) = 414; продолжаем: 4 + (3 \* 14) = 46 — очевидно, делится на 23).

Признак делимости на 99

Разобьём число на группы по 2 цифры справа налево (в самой левой группе может быть одна цифра) и найдём сумму этих групп, считая их двузначными числами. Эта сумма делится на 99 тогда и только тогда, когда само число делится на 99.

Признак делимости на 101

Разобьём число на группы по 2 цифры справа налево (в самой левой группе может быть одна цифра) и найдём алгебраическую сумму этих групп с переменными знаками, считая их двузначными числами. Эта сумма делится на 101 тогда и только тогда, когда само число делится на 101. Например, 590547 делится на 101, так как 59-05+47=101 делится на 101.

Признак делимости на 2n

Число делится на n-ю степень двойки тогда и только тогда, когда число, образованное его последними n цифрами, делится на ту же степень. (n>0)

Признак делимости на 5n

Число делится на n-ю степень пятёрки тогда и только тогда, когда число, образованное его последними n цифрами, делится на ту же степень. (n>0)

Признак делимости на 10n-1

Разобьем число на группы по n цифр справа налево (в самой левой группе может быть от 1 до n цифр) и найдем сумму этих групп, считая их n-значными числами. Эта сумма делится на 10n-1тогда и только тогда, когда само число делится на10n-1

. Признак делимости на 10n

Число делится на n-ю степень десятки тогда и только тогда, когда n его последних цифр — нули.

Признак делимости на 10n+1

Разобьем число на группы по n цифр справа налево (в самой левой группе может быть от 1 до n цифр) и найдем сумму этих групп с переменными знаками, считая их n-значными числами. Эта сумма делится на 10n+1 тогда и только тогда, когда само число делится на 10n+1.

И ещё.

1.1. Признаки делимости на19, 29, 39, …

Делимость данного числа на какое-либо из чисел, оканчивающихся

цифрами 1, 3, 7, 9. сведем к делимости на это число некоторой суммы, задаваемой

определенным образом. Продемонстрируем это на примерах.

Так, при выяснении вопроса о делимости конкретного целого числа на 19

надо рассмотреть сумму из двух слагаемых, первое из которых будет

представлять произведение постоянного множителя 2 на цифру единиц данного

числа, а второе - число его десятков. Замечаем: если полученная при этом сумма

будет делиться на 19, то и испытываемое число будет делиться на 19; если же по-

лученная при этом сумма не будет делиться на 19, то и испытываемое число не

будет делиться на 19. Например, числу 247 соответствует построенная указанным

способом сумма 2\*7 + 24 = 38, 38 делится на 19, следовательно, на 19 делится и

247. Условимся это записывать так:

247→ 2\*7+ 24 = 38 => 247:19.

Приведем еще несколько примеров.

19 → 2-9 +1 = 19 => 19:19,

38→2\*8 + 3 = 19=>38:19,

171 →2\*1 + 17 = 19 =>171:19,

418→2\*8 + 41=57→2\*7 + 5 = 19=>418:19

39→2\*9 + 3 = 21=>39 не:19.

Таким образом, есть гипотеза:

*ab:19↔(2b + а):19.*

В случае выяснения вопроса о делимости на 29 также будем представлять

их в виде аналогичной суммы, как и при делимости на 19, но с другим

постоянным множителем*:* теперь он будет равен 3.

Например:

29→3\*9 + 2 = 29=>29:29,

87→3\*7 + 8 = 29=> 87:29,

319→ 3\*9 + 31 = 58→ 3\*8 +5 = 29 => 319:29.

Возникает вторая гипотеза:

*ab:29↔(3b + а):29*

Таким образом, можно рассмотреть примеры делимости чисел на 39, 49, 59,

... с постоянными множителями соответственно 4, 5, 6, ...

Проведем в общем виде рассуждения о делимости на числа,

оканчивающиеся на 9, т. е. вида 10 m **−**1, где m € N. Сформулируем признак

делимости в виде теоремы (при этом будем использовать тот факт, что любое

целое число можно представить в виде (10а+b**).**

Теорема 1.

Число 10а+b делится на 10 m −1, тогда и только тогда, когда на это число

делится сумма mb + a.

Д о к а з а, т е л ь с т в о:

Рассмотрим тождество 10a+b = 10 (mb + a) – b (10m- 1). Так как b(10m - 1)

делится на 10m – 1, то 10a +b и 10(mb+a) одновременно либо делятся, либо не

делятся на 10m – 1.

Теорема доказана.

Например, пусть m = 6, т. е. проверим делимость некоторых чисел на 59:

59→ 6\*9 + 5 = 59=>59:59,

118→6\*8 + 11 = 59=>118:59,

177 → 6\*7+ 17 = 59 => 177:59,

178→б\*8+17 = 65=>178не:59.

В этом случае

ab:59*↔(6b+a):59*

1.2 Признаки делимости на 11, 21, 31, …

Сформулируем теперь признак делимости на числа, оканчивающиеся на

цифру 1, т. е. на числа вида 10 m +1, где m € N0 (N0 - множество, состоящее из

всех натуральных чисел и нуля).

Теорема 2.

Число 10a +b делится на 10m + 1 тогда и только тогда, когда на 10m + 1

делится mb **–** a .

Доказательство теоремы следует из тождества:

10а+ b= b (10m **+** 1) - 1 0 (mb - а).

Действительно, так как b (10m + 1) делится на 10m +1, то 10a+b и 1 0 (mb- a) одновременно либо делятся, либо не делятся на 10m - 1.

Теорема доказана.

Например, пусть *т* = 7, т. е. рассмотрим признак делимости на 71:

71 →7\*7=0=> 71:71,

355→7\*5-35 = 0=>355:71,

852→7\*2-85 =-71 => 852:71,

242 →7 \* 2 - 24 = -10 => 242 не:71.

В этом случае

ab:71*↔(7b - a):71.*

1.3 Признаки делимости на 13,23,33, …

Теорема 3.

Число 10a + b делится на 10k + З. тогда и только тогда, когда (Зk+1)b +a

делится на 10k+3, где k € N0.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Так как 10a + b = 10 ((Зk+ 1)b + а) - 3b(10k + 3), то 10а + b и (Зk +1)b + а

одновременно или делятся, или не делятся на 10k+ 3 , что и требовалось доказать.

Обратим внимание, что здесь постоянный множитель m = Зk+1 ≠ k .

Из теоремы 3 можно получить многочисленные следствия. В частности,

удобно пользоваться на практике следующим признаком делимости на 13.

Следствие:

Число 10a+b делится на 13 тогда и только тогда, когда 4b +а делится на 13.

Действительно, при k**=**1 получаем:

((10a+b):13) *↔* ((4b+а):13).

Другое доказательство этого следствия основывается на представлении 10a

+ b в виде:

1За +13b **-** За – 12b = 13(а + b) **-** 3(а + 4b).

1.4 Признаки делимости на 7, 17, 27, …

Теорема 4.

Число 10a+b делится на 10k-3 тогда и только тогда, когда (Зk - 1)b - а

делится на 10k-3, где k € N.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

Поскольку 10a + b = 3b (10k - 3) - 10((Зk - 1)b - a), то 10a + b и (Зk - 1)b-a

одновременно или делятся, или не делятся на 10k -3, т. е. утверждение доказано.

Заметим, что и здесь постоянный множитель m = Зk -1 ≠ k .

Из теоремы 4 можем получить практические следствия. Так, очень удобно

пользоваться следующим признаком делимости на 7.

Следствие:

Число 10a + b делится на 7 тогда и только тогда, когда 2 b - а делится на 7.

Действительно, при k **=** 1 получаем:

((10a + b):7) *↔* ((2b - а):7).

Другой способ доказательства этого следствия можно получить так.

Запишем данное число по-другому:

10a + b = 7a **+ 7** b + 3a **-** 6b = 7(a + b) **-** 3(2b - a).

Первое из двух полученных слагаемых делится на 7. Сумма будет делиться

на 7 тогда и только тогда, когда и второе слагаемое будет делиться на 7. А это

возможно только тогда, когда 2b - а делится на 7.

Например, 91→ 2\*1-9 = -7**=>**91:7

119**→**2\*9-11 = 7=>119:7,

42**→**2\*2-4 = 0=>42:7,

163 **→**2 \*3-16 = -10=>163 не:7.

В этом случае

ab:7*↔(2b - a):7.*

Использование признаков делимости на числа, оканчивающиеся на цифру

1, 3, 7, 9, позволяет последовательно переходить к числам, имеющим на один

разряд меньше. К ним следует применять тот же признак делимости (например,

на 7) до тех пор. пока не доберемся до числа, делимость которого (на 7)

проверяется элементарно. Таким образом, получен вполне определенный

алгоритм.

Рассмотрим применение перечисленных признаков при решении задач.

1.Какие из данных чисел 384123, 108675, 138963, 903150, , делятся на 3, на 4, на 5, на 9, на 25?

2.Какие из данных чисел делятся на 11: 55176, 78364, 94118, 232694, 397221, 474155?

3.Из данных чисел 67086, 34115, 41195, 45892, 205721, 270711 выберите те, которые а) делятся на 9; б) делятся на 11; в) делятся на 9 и на 11; г) делятся на 9 или на 11.

4.Выписали подряд все цифры от 1 до 9 включительно, а затем от 9 до 1. Будет ли полученное число делиться на 9?

5.Найдите все числа, кратные 9, удовлетворяющие двойному неравенству 5⋅34 < *x* <2⋅35.

Решение: 405 < x < 486, данному условию удовлетворяет число 414, другие числа можно получить, прибавляя 9.

6*.*Докажите, что если в двузначном числе переставить цифры и полученное число вычесть из первоначального, то разность будет кратна 9.

*Решение*: = 10а + b – (10b + a) = 9a – 9b = 9(a – b) 9

7.В двузначном числе переставить цифры и полученное число сложили с исходным. Получили квадрат натурального числа. Какого?

*Решение*: = 10а + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b), т.е a + b = 11, 112 = 121

8..Вместо звездочек поставьте некоторые цифры так, чтобы число 5\*4\* делилось на 9 и на 4. Найдите все возможные решения. (*Ответ*: 5040, 5544, 5148)

9.Натуральное число *а* оканчивается цифрой 4 и на 4 не делится. Докажите, что разность (*а* – 14) делится на 20.

*Указание*: Выясним, какой может быть цифра десятков. Это 1, 3, 5, 7, 9. Проверим числа 14, 34, 54, 74, 94.

10.Какие из данных чисел 7194, 18456, 36735, 17214, 781120 делятся

а) на 6; [7194, 18456, 17214] *- чтобы число делилось на 6, необходимо, чтобы оно одновременно делилось на 2 и на 3.*

б) на 15; [36735] *- чтобы число делилось на 15, необходимо, чтобы оно одновременно делилось на 5 и на 3.*

в) на 12 [18456] *- чтобы число делилось на 12, необходимо, чтобы оно одновременно делилось на 3 и на 4.*

11.На сколько равных частей можно разделить пачку бумаги, содержащую 5025 листов? [Ответ: 3, 5, 25, 15, 75, 125, 375]

12.Найдите, если возможно, такую цифру, приписав которую слева и справа к числу 1832, получим шестизначное число: а) кратное 75 [это цифра 5]; б) кратное 12 [это цифра 8].

13.Докажите, что при любом натуральном n является целым числом значение выражения а) [сумма цифр этого числа делится на 9: 8 + 1 + 1 + 7 + 1 = 18] б) [(10n – 1) + 3n+1⋅2n+1 делится на 9, т.к. каждое слагаемое делится на 9].

14.Докажите, что на прямой 124х + 216у = 515 нет ни одной точки с целочисленными координатами.

*Доказательство:* Допустим, что график проходит через точку М(а; b), a, b . Тогда верно равенство 124а + 216b = 515. В левой части записана сумма, которая делится на 2 и на 4, т.к. каждое слагаемое делится на 2 и на 4. Но число 515 на 2 и на 4 не делится. Получили противоречие, следовательно, наше предположение не верно, и на прямой нет точки с целочисленными координатами.

15.Имеет ли целые корни уравнение: а) 75х2 + 125х3 + 5х = 128 [*нет*] б) 128х4 – 72х3 + 56х2 + 4х – 115 = 0 [*нет*]

16.Докажите, что система уравнений имеет бесконечно много решений. Есть ли среди решений системы хотя бы одна пара, составленная из целых чисел?

*Доказательство:* упростим второе уравнение системы: , т.о. получили, что система имеет бесконечно много решений. Целочисленных решений нет, потому что в левой части уравнения сумма, которая делится на 9, т.к. каждое слагаемое делится на 9, а правая часть – число, которое на 9 не делится.

17.Укажите наименьшее и наибольшее трехзначное число, кратное 11. [*Ответ*:121 и 990]

***8. Применение признаков делимости.***

Задача1.*Номер автомашины*

Прогуливаясь по городу, трое студентов-математиков заметили, что

водитель автомашины грубо нарушил правила уличного движения. Номер

машины (четырехзначный) ни один из студентов не запомнил, но, так как они

были математиками, каждый из них приметил некоторую особенность этого

четырехзначного числа. Один из студентов вспомнил, что две первые цифры

числа были одинаковы. Второй вспомнил, что две последние цифры также

совпадали между собой. Наконец, третий утверждал, что все это четырехзначное

число является точным квадратом. Можно ли по этим данным узнать номер

машины?

*Решение:*

Обозначим первую (и вторую) цифру искомого числа через *а,* а третью (и

четвертую) — через b. Тогда все число будет равно:

1000а + 100а + 106 + b = 1100а + 116= 11(100а + b).

Число это делится на 11, а потому (будучи точным квадратом) оно делится

и на 112 . Иначе говоря, число 100а+ b делится на 11. Применяя любой из двух

вышеприведенных признаков делимости на 11, найдем, что на 11 делится число

а+ b. Но это значит, что

а + b = 11,

так как каждая из цифр *а,* b меньше десяти.

Последняя цифра b числа, являющегося точным квадратом, может

принимать только следующие значения:

0, 1,4,5,6,9.

Поэтому для цифры а, которая равна 11-b, находим такие возможные

значения:

*11, 10, 7, 6, 5, 2.*

Первые два значения непригодны, и остаются следующие возможности*:*

*b = 4, а* = 7;

*b = 5, а = 6;*

*b = 6, а = 5;*

*b = 9, а = 2;*

Мы видим, что номер автомашины нужно искать среди дующих четырех

чисел:

7744,6655, 5566, 2299.

Но последние три из этих чисел не являются точными квадратами: число

6655 делится на 5, но не делится на 25; число 55 делится на 2, но не делится на 41;2

число 2299 = 121 \* 19 также не является квадратом. Остается только одно число

7744 = 882 оно и дает решение задачи.

Задача 2.

Кузнечик прыгает по прямой, причем в первый раз он прыгнул на 1 см в

какую-то сторону, во второй - на 2 см, в третий - на 3 см и т. д. Докажите, что

после 125 прыжков он не сможет оказаться в том месте, откуда начинал прыгать в

первый раз.

*Решение:*

По прямой можно двигаться в двух противоположных направлениях. Ясно,

что ответ должен годиться для любого варианта последовательности прыжков.

Заметим, что кузнечику за 125 прыжков предстоит преодолеть расстояние 1 + 2 +

3 + ... + 124+ 125 = (1 + 1251-125/2 = 7875 см. Но, на сколько бы ни отдалился

кузнечик от начальной точки, возвращаясь, ему придётся преодолеть это

расстояние. Значит, сумма ≪пропрыганных≫ расстояний туда и обратно должна

вы четным числом, а число 7875 - нечетное кузнечик не сможет после 125

прыжков в ту же точку, из которой он начинал прыгать.

Задача 3.

Билет на транспорте считается ≪счастливым≫, если сумма первых трех

цифр его шестизначного номера совпадает с суммой последних трех цифр.

Докажите, что сумма номеров всех ≪счастливых≫ билетов делится на 13.

*Решение*:

а) Пусть p, q - трехзначные грани ≪счастливого≫ номера. Если р = q , то

номер pq: 13 (разность трехзначных граней p-q должна делиться на 13). Если p≠q,

то номер рq сложим с номером qp:pq + qp = pp + qq, их сумма делится на 13.

Задача 4: Когда жил Ян Гус?

Ян Гус был профессором и ректором Парижского университета. Он прославился не только как ученый-богослов, но и как проповедник. Страстно обличал злоупотребление и моральный упадок католического духовенства, засилье немцев, выступал за чешскую национальную и культурную независимость. Папа Римский вызвал Яна Гуса на церковный собор. Гус приехал. От него потребовали отречься от своих взглядов. Но проповедник отказался против своей совести. Тогда собор приговорил его к сожжению.

Год рождения Яна Гуса – это число 137\*. Оно кратно трем т наименьшее из возможных. Год казни – 14\*\*. Это число кратно пяти, но не кратно десяти и является наименьшим из возможных, если принять, что проповедник был человеком зрелого возраста, т.е. прожил не менее 40 лет.

Ответ 1371 – 1415

Задача 5: Кто и когда подписал Великую хартию вольностей?

Имя этого английского короля зашифровано:

(10)(16)(1)(15)(15) Безземельный.

Цифры в скобках обозначают номера букв русского алфавита, если считать от А до Я без пропусков. Свое прозвище этот человек получил, видимо, потому, что не имел собственной земли, т.е. королевства, а правил вместо своего старшего брата Ричарда Львиное Сердце, который ушел в Крестовый поход.

Великая хартия вольностей защищала интересы крупных феодалов и купечества и положила начало конституционным ограничениям власти короля. Год ее подписания выражается числом 1\*15, которое кратно 9.

Ответ Иоанн Безземельный, 1215

Задача 6: Сколько принадлежало городов и деревень архиепископу Парижскому, если число городов 1\* было кратно двум и семи, а число деревень 9\*\* было кратно ста.

Ответ:14 и 900

Задача 7:Билет на транспорте считается «счастливым», если сумма первых трех цифр его шестизначного номера совпадает с суммой последних трех цифр. Докажите, что сумма номеров всех «счастливых» билетов делится на 13.

Ответ: пусть р и q – трехзначные грани «счастливого» номера. Если р=q, то номер рq делится на 13(разность трехзначных граней р-q должна делится на 13). Если р≠q, то номер рq сложим с номером qр: рq+qр=рр+qq, их сумма делится на 13.

Задача 8: Докажите, что 432008-1 делится на 77

Ответ: а2к-1 делится на а2-1, поэтому 432008-1 делится

432-1=(43-1)(43+1)=42\*44=77\*24

Задача 9. Найти наименьшее число, которое при делении на 2 дает остаток 1, при делении на 3 - 2, на 4 - 3, на 5 - 4, на 6 - 5, на 7 - 6, на 8 - 7, на 9 - 8, на 10 - 9.

Решение: Если прибавить к искомому числу единицу, тогда полученное число будет делиться на 2, на 3, на 4, на 5, на 6, на 7, на 8, на 9, на 10. Таким наименьшим число является 10 \* 9 \* 4 \* 7 = 2520, а искомое число на 1 меньше, т.е. 2519.

Ответ: 2519

Задача10. При делении данного числа на 225 в остатке получилось 150. Разделится ли данное число нацело на 75 и почему?

Решение: Да, так как 225 делится на 75 и 150 делится на 75, следовательно, остаток равен нулю. Данное число можно записать так: 225x+150, где x - частное. На основании делимости суммы ясно, что данное число делится на 75.

Задача 11. Найти все числа, большие 25000, но меньшие 30000, которые как при делении на 393, так и при делении на 655 дают в остатке 210.

Решение: НОК (131,1965)=1965

Задача 12. На складе имеются ножи и вилки. Общее число тех и других больше 300, но меньше 400. Если ножи и вилки вместе считать десятками или дюжинами, то в обоих случаях получается целое число десятков и целое число дюжин. Сколько было ножей и вилок на складе, если ножей было на 160 меньше, чем вилок?

Решение: Так как число ножей и вилок (вместе) кратно 10 и 12, значит, оно делится на НОК (10 и12) = 60. .Между числами 300 и 400 только 360 делится на 60.

Ответ: Ножей 100, вилок 260.

Задача 13. Изменяется ли при делении с остатком частное и остаток, если делимое и делитель увеличить в 3 раза (ответ подтвердить примером) ?

Ответ: Частное не изменится, а остаток увеличится в 3 раза.

Задача 14. Даны три последовательных натуральных числа, из которых первое - четное. Докажите что произведение их кратно 24.

Доказательство: Из трех последовательных натуральных чисел обязательно одно кратно 3, а из двух последовательных четных одно кратно 4. Следовательно, произведение этих трех чисел делится и на 3, и на 2, и, кроме того, на 4, т.е. на 3 \* 2 \* 4 = 24.

Задача 15. Отец и сын решили перемерить шагами расстояние между двумя деревьями, для чего отошли одновременно от одного и того же дерева. Длина шага отца - 70см, сына - 56 см. Найти расстояние между этими деревьями, если известно, что следы их совпали 10 раз.

Решение: 70 = 2 \* 5 \* 7, 56 = 2 \* 7 \* 4.

1) НОК(70, 56) = 70 \* 4 = 280. Через каждые 280 см следы отца и сына совпадают.

2) 280 \* 10 = 2800 (см), 2800 см = 28 м - расстояние между деревьями.

Задача 16. Для устройства елки купили орехов, конфет и пряников - всего 760 штук. Орехов взяли на 80 штук больше, чем конфет, а пряников на 120 штук меньше, чем орехов. Какое наибольшее число одинаковых подарков для детей можно сделать из этого запаса?

Решение: Из рисунка видно, что пряников было 200 штук, орехов 320, а конфет 240. НОД (200, 240, 320) = 40. Наибольшее количество подарков - 40.

пряников |------------------------------|

конфет

Всего - 760 |------------------------------|-----------|

орехов 120

|------------------------------|-----------------------------------------|

Задача 17. Если сложить несократимую дробь с единицей, то вновь полученная дробь будет также несократима. Почему?

Решение: НОД числителя и знаменателя несократимой дроби равен 1, значит, НОД суммы числителя со знаменателем равен 1, т.е. и вновь полученная дробь несократима.

Задача 18. Доказать, что произведение НОД и НОК двух данных чисел равно произведению этих чисел.

Доказательство: Так как НОК это произведение первого числа на недостающие множители из второго числа, то во втором числе невзятыми оказались множители, которые уже есть в первом числе (т.е. их НОД). Значит, произведение НОК на НОД равно произведению данных чисел.

Задача 19. Витя сказал своему другу Коле: “ Я придумал пример на деление, в котором делимое, делитель, частное и остаток оканчиваются соответственно на 1, 3, 5, 7 “. Подумав, Коля ответил: “Ты путаешь что – то”. Прав ли Коля?

Решение: Пусть делимое - a, делитель - b, частное – q ,остаток - r. Тогда а = b \* q + r. Т. к. b и q оканчиваются на 3 и 5, то они нечетные и их произведение нечетно. Так как r оканчивается на 7, оно нечетно, следовательно, b \* q + r - четно, но a оканчивается на 1 и нечетно. Поэтому Коля прав.

Задача 20. Какую цифру надо поставить вместо буквы А в запись числа А37, чтобы оно делилось: а) на 6 , б) на 9?

Ответ: а) Какую бы цифру мы не поставили вместо А, число А37 на 6 делиться не будет, так как оно не делится на 2. б) Чтобы число А37 делилось на 9, надо чтобы сумма его цифр делилась на 9, т.е. А + 3 + 9 должно делиться на 9, а А + 10 делится на 9 только если А = 8.

Задача 21. По периметру звезды в кружки впишите все числа от 1 до 10 так, чтобы суммы чисел в любых двух соседних кружках не делились ни на 3, ни на 5, ни на 7.

Ответ: 1, 10, 7, 4, 9, 2, 6, 5, 8, 3 (по часовой стрелке, начиная с любого кружка).

Задача 22. Четыре числа попарно сложили и получили шесть сумм. Известно четыре наименьшие из этих сумм 1, 5, 8 и 9. Найдите две остальные суммы и сами исходные числа.

Ответ: Две остальные суммы равны 12 и 16, а сами числа равны либо (-1), 2, 6, 10, либо (-3 / 2), 5/2, 13/2, 19/2.

Задача 23. Шарик умножил первые 10 простых чисел и получил число 6469693250. - Ты не прав, - сказал Матроскин. Почему

Ответ: Например, потому, что получившееся у Шарика число не делится на 3 или поскольку делится на 25. Ни того, ни другого быть не может.

Задача 24. Напишите наибольшее пятизначное число, кратное 9, такое, чтобы его первой цифрой была 3, а все остальные цифры были бы различны.

Решение: Наибольшее пятизначное число, первая цифра которого 3, а остальные цифры различные, это 39876. Оно не делится на 9, но делится на 3, так как сумма его цифр равна 33. Из 9 идущих подряд чисел одно обязательно делится на 9. Если из числа 39876 вычесть 6, то получим 39870. Это число и является искомым, так как 39873 на 9 не делится.

Задача 25. НОК двух чисел, не делящихся друг на друга, равно 630, а НОД их равен 18. Найти эти числа.

Решение: 630 : 18 = 35 (5 \* 7 - произведение различных множителей данных чисел). Так как одно число не делится на другое, то эти числа могут быть только 5 \* 18 = 90 и 7 \* 18 = 126.

Задача 26. Доказать, что если сумма двух чисел есть число нечетное, то произведение этих чисел всегда будет числом четным.

Решение: Сумма двух чисел - число нечетное, следовательно, одно слагаемое - четное, а другое - нечетное. Произведение четного числа на любое целое число есть число четное.

Задача 27. Даны дроби 8 / 15 и 18 / 35. Найти наибольшее из всех чисел, при делении на которое каждой из данных дробей получаются целые числа.

Решение: НОК (15 и 35) = 105. НОД (8 и 18) = 2, значит, 2 / 105 - наибольшее число, при делении на которое 8 / 15 и 18 / 35 дают в частных целые числа. Действительно, (8/15):(2/105) = 28 (целое), (18/35):(2/105) = 27 (целое).

Задача 28. Произведение четырех последовательных чисел равно 1680. Найдите эти числа.

Ответ: 1680 = 2 \* 2 \* 2 \* 2 \* 3 \* 5 \* 7 = 5 \* 6 \* 7 \* 8.

Задача 29. В египетской пирамиде на гробнице начертано число 2520. Почему именно этому числу выпала “такая честь”? Одна из версий :данное число делится на все без исключения натуральные числа от1 до 10.Проверьте это.

Ответ: 2520 = 2 \* 2 \* 2 \* 3 \* 5 \* 7, т.е. данное число делится на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Задача 30. Записав шесть различных чисел, среди которых нет 1, в порядке возрастания и перемножив, Оля получила в результате 135135. Запишите числа, которые перемножила Оля.

Ответ: 135135 =1001 \* 135, 135 = 3 \* 5 \* 9, 1001 = 7 \* 11 \* 13, значит, 135135 = =3\*5\*7\*9\*11\*13. 2520 = 2 \* 2 \* 2 \* 3 \* 5 \* 7, т.е. данное число делится на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Задача 31. Доказать, что если сумма двух чисел есть число нечетное, то произведение этих чисел всегда будет числом четным.

Доказательство: Сумма двух чисел - число нечетное, следовательно, одно слагаемое - четное, а другое - нечетное. Произведение четного числа на любое целое число есть число четное

Задача 32. Делится ли число 101996 + 8 на 9? Ответ обоснуйте.

Решение: Заметим, что 101996 + 8 = 100...008 (всего 1995 нулей). Сумма цифр этого числа делится на 9, следовательно, и само число делится на 9.

Признаки делимости применяются в различных числовых фокусах:

1) Признак делимости на 7, 11, 13 используется при следующем числовом фокусе. Предложить друзьям загадать трехзначное число и приписать к нему его же еще раз. Попросить их разделить полученное шестизначное число на 7. Это число нацело разделится на 7. Затем предложит полученное число разделить на 11, а результат – на 13. К удивлению друзей, они получат в результате загаданное им число.

2) Можно так же использовать признак делимости на 73 и 137. Предложить друзьям загадать пятизначное число и приписать к нему его же еще раз. Попросить их разделить полученное десятизначное число на 137. Затем предложить полученное число разделить на 73. К удивлению друзей, получится в результате загаданное им число.

3) Задуманное трехзначное число, если умножить на 1001 получится шестизначное число 7\*11\*13=1001

Найти целое число, которое, будучи умножено на 99, дает 62\*\*427. К сожалению, кто-то замазал две цифры, обозначенные звездочками. Как же все-таки найти ответ задачи? (62873)

Задания для самостоятельного решения.

1. Доказать, что при всяком целом 

*  делится на 3;
*  делится на 5.

1. Доказать, что при всяком целом 
   * делится на 35 ().
2. Дано, что делится без остатка на . Доказать, что тоже делится без остатка на .
3. Докажите, что 13+13 делится нацело на 7.
4. х и у – целые числа такие, что 3х + 7у делится на 19. Докажите, что 43х + 75у тоже делится на 19.
5. Докажите, что из трех любых натуральных чисел всегда можно выбрать такие 2, сумма которых делится на 2.
6. Докажите, что слово ХАХАХА делится на 7, если в нем буквами Х и А обозначены любые цифры. (одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры).
7. Найдите наименьшее шестизначное число, делящееся на 3, 7 и 13 без остатка.
8. Докажите, что если к любому пятизначному числу приписать справа (или слева) это же число, то полученное десятизначное число делится на 11.
9. Найдите наибольшее и наименьшее трехзначные числа, каждое из которых делится на 6 и имеет в своей записи цифру 7.
10. Если сумма первой и второй цифры трехзначного числа, у которого одинаковые цифры сотен и единиц, делится на 7, то и число делится на 7. Докажите.
11. Сколько всего натуральных чисел, меньших 100, которые: а) делятся на 2, но не делятся на 3; б) делятся на 2 или на 3; в) не делятся ни на 2, ни на 3?
12. Найдите цифры  и  в числе , если известно, что это число делится на 72.
13. Найдите цифры сотен и единиц числа 72\*3\*, если это число делится без остатка на 45.
14. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 72, в записи которого встречаются все натуральные цифры от 1 до 9.
15. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 36, в записи которого встречаются все 10 цифр по одному разу.
16. Когда из чисел от 1 до 333 Оля исключила все числа, делящиеся на 3, но не делящиеся на 7, и все числа, делящиеся на 7, но не делящиеся на, то получила 215 чисел. Верно ли она решила задачу?

***Это интересно! Любопытные свойства натуральных чисел.***

**13+23+33= … \* …**

У натуральных чисел есть много любопытных свойств, которые обнаруживаются при выполнении над ними арифметических действий. Но заметить эти свойства все же бывает легче, чем доказать их. Приведем несколько таких свойств.

1. Возьмем наугад какое-нибудь натуральное число, например 6, и запишем все его делители: 1, 2, 3, 6. Для каждого из этих чисел запишем, сколько у него делителей. Так как у 1 только один делитель (само это число), у 2 и 3 по два делителя, а у б имеем 4 делителя, то получаем числа 1, 2, 2, 4. У них есть замечательная особенность: если возвести эти числа в куб и сложить ответы, получится в точности такая же сумма, кото­рую мы получили бы, сначала сложив эти числа, а потом воз­ведя сумму в квадрат. Иными словами,

13+23+23+43= (1+2+2+4)2.

И в самом деле, оба выражения равны 81.

Может быть, все дело в том, что мы взяли число 6? Попробуем другое число, например 12. Здесь уже больше делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Записывая число делителей для каждого из этих чисел, получаем: 1, 2, 2, 3, 4, 6. Проверим, выполняется ли равенство

13+23+23+33+43+63=(1+2+2+3+4+6)2.

Подсчеты показывают, что и слева, и справа ответ один и тот же, а именно 324.

Какое бы число мы ни взяли, подмеченное нами свойство будет выполняться. Вот только доказать это довольно сложно.

2. Возьмем любое четырехзначное число, например 2519, и расставим его цифры сначала в порядке убывания, а потом в порядке возрастания: 9521и125 9. Из большего числа вычтем меньшее: 9521 - 1259=8262. С полученным числом проделаем то же самое: 8622 — 2268=6354. И еще один такой же шаг: 6543 — 3456=3087. Далее, 8730 — 0378=8352, 8532 — — 2358=6174. Вам не надоело вычитать? Сделаем все же еще один шаг: 7641 — 1467=6174. Снова получилось 6174.

Вот теперь мы, как говорят программисты, "зациклились": сколько бы раз мы теперь ни вычитали, ничего, кроме 6174, не получим. Может быть, дело в том, что так было подобрано исходное число 2519? Оказывается, оно здесь не при чем: какое бы четырехзначное число мы ни взяли, после не более чем семи шагов обязательно получится это же число 6174.

3. Нарисуем несколько окружностей с общим центром и на внутренней окружности запишем любые четыре натуральных числа. Для каждой пары соседних чисел вычтем из большего меньшее и результат запишем на следующей окружности. Оказывается, если повторить это достаточно много раз, на одной из окружностей все числа окажутся равными нулю, а поэтому и дальше ничего, кроме нулей, получаться не будет.

4. Возьмем любое число, записанное в десятичной системе счисления. Возведем все его цифры в квадрат и сложим. С суммой проделаем то же самое. Оказывается, после нескольких шагов мы получим либо число 1, после чего иных чисел не будет, либо 4, после чего имеем числа 4, 16, 37 58, 89, 145, 42, 20 и снова получим 4. Значит, цикла не избежать и здесь.

5. Составим такую бесконечную таблицу. В первом столбце напишем числа 4, 7, 10, 13, 16,... (каждое следующее на 3 больше предыдущего). От числа 4 проведем вправо строку, увеличивая на каждом шагу числа на 3. От числа 7 поведем строку, увеличивая числа на 5, от числа 10— на 7 и т. д.

Получается такая таблица:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **4** | **7** | **10** | **13** | **16** | **19** | **. . .** |
| **7** | **12** | **17** | **22** | **27** | **32** | **. . .** |
| **10** | **17** | **24** | **31** | **38** | **45** | **. . .** |
| **13** | **22** | **31** | **40** | **49** | **58** | **. . .** |
| **16** | **27** | **38** | **49** | **60** | **71** | **. . .** |
| **19** | **32** | **45** | **58** | **71** | **84** | **. . .** |
| **. .** | **. .** | **. .** | **. .** | **. .** | **. .** | **. . .** |

Если взять любое число из этой таблицы, умножить его на 2 и к произведению прибавить 1, то всегда получится составное число. Если проделать то же самое с числом, не входящим в эту таблицу, то получаем простое число. Например, возьмем из таблицы число 45. Число 2\*45+1=91 составное, оно равно 7\*13. А числа 14 в таблице нет, и число 2\*14+1=29 простое.

Этот замечательный способ отличать простые числа от составных придумал в 1934 году индийский студент Сундарам. Наблюдения за числами позволяют открывать и другие замечательные утверждения. Свойства мира чисел поистине неисчерпаемы.

Список литературы.

1. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом.; М. «Наука», 1977г.

2. За страницами учебника математика. И.Я. Депман, Н.Я. Виленкин; М. «Просвещение»,1989г.

3. В мире чисел. А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Гусак; Минск, 1987г.

4.Занимательная алгебра. Я. И. Перельман, М. «Наука», 1975г.

5. Факультативный курс по математике 7-9.И. Л. Никольская; М. «Просвещение»,1991г.

6. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике. В. Н. Березин, Л.Ю. Березина, И. Л. Никольская. М. «Просвещение»,1985г.

7. Олимпиадные задачи по математике и методы их решения. А. В. Фарков, М. 2003г.

8. Задачи по математике для любознательных. Д. В. Клименченко. М. «Просвещение»,1992г.

9.Берман Г.Н. Число и наука о нём.- М.: Наука, 1976

10.М. Б. Гельфанд, В.С. Павлович «Внеклассная работа по математике в 8-летней школе» М. Просвещение. 1965 г.

11.Журнал «Математика в школе» №5 за 1999 г.

12.Д. В. Клименченко Задачи по математике для любознательных. М. «Просвещение»,1992г.

13.А. В. Фарков, Олимпиадные задачи по математике и методы их решения. М. 2003г.

1. Леонард Эйлер (1707–1783) – выдающийся математик, родившийся в Швейцарии, большую часть жизни провел в России, являясь членом Петербургской Академии наук. (*Прим. перев.* ) [↑](#footnote-ref-1)
2. *Аликвотные дроби* – дроби вида 1/*n;* в древности было принято всякую дробь представлять в виде суммы аликвотных дробей. Например, 5/12 = 1/12 + 1/3. (*Прим. перев* .) [↑](#footnote-ref-2)
3. Американская фирма, выпускающая вычислительное оборудование. (*Прим. перев.* ) [↑](#footnote-ref-3)