**10 класс**

**Задача 1.** Решить уравнение

|x+4|+|x|+|x-4|=8-x².

**Решение.** Минимум левой части совпадает с максимумом правой, и достигаются они в одной точке x=0, что проще всего увидеть, построив графики правой и левой части.

**Ответ.** x=0.

**Задача2.** Найти все числа x, принадлежащие отрезку [0;1], и удовлетворяющие уравнению

sin⁴(cos⁴3x)+cos⁴(cos⁴3x)=1.

**Решение.** Сравнивая данное уравнение с основным тригонометрическим тождеством, заключаем, что оно может иметь решения лишь при условии cos⁴3x=pn/2, где nЄN, но, учитывая область значений функции cos(x), получаем, что n=0.

**Ответ.** x=p/6.

**Задача 3.** На плоскости заданы шесть точек, являющихся вершинами выпуклого шестиугольника. Доказать, что отношение наибольшего расстояния между двумя из заданных точек к наименьшему не менее 3½.

**Решение.** Один из углов шестиугольника не менее 120°. Рассмотрим вершину этого угла и две соседние с ней. В полученном треугольнике наибольшая сторона превосходит наименьшую не менее, чем в 3½ раз, что следует непосредственно из теоремы косинусов, записанной для выделенного треугольника.

**Задача 4.** На доске записаны два числа a и b (a>b). Их стирают и заменяют числами (a+b)/2 и (a-b)/2. С вновь записанными числами поступают аналогичным образом. Верно ли, что после нескольких стираний разность между записанными на доске числами станет меньше 1/2001?

**Решение.** Записанные на доске числа будут иметь вид: a/(), b/(, (a-b)/(), (a+b)/(), где числа k₁, k₂- неограниченно возрастают и, следовательно, сами записанные числа стремятся к нулю, то есть разность между ними может быть сделана как угодно малой.

**Ответ.** Да, верно.

**Задача 5.** В пространстве задан параллелограмм с острым углом a. Через вершины данного параллелограмма проведено 4 луча, не лежащие в плоскости параллелограмма и имеющие общую точку. Существует ли плоскость, пересекающая эти лучи в вершинах параллелограмма с другим острым углом?

**Решение.** Противолежащие стороны параллелограмма параллельны линии пересечения плоскостей, которым они принадлежат (эти плоскости образованы парами лучей, проходящих через смежные вершины параллелограмма). Поскольку таких плоскостей две пары, то острый угол параллелограмма равен острому углу между линиями пересечения данных плоскостей.

**Ответ.** Получить параллелограмм с другим острым углом нельзя.

**11 класс**

**Задача 1.** Решите уравнение

(sin x - (sin x + cos x)½)½= cos x.

**Решение.** Заметим, что cos x > 0 и sin x >(sin x + cos x)½, но учитывая, что sin x <(sin x)½, а значит и sin x <(sin x + cos x)½ получим, sin x =(sin x + cos x)½, откуда cos x = 0 и sin x = 1, следовательно x=(p/2)+2pn, nЄZ.

**Ответ.** x=(p/2)+2pn, nЄZ.

**Задача 2.** На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана произвольная точка M и из нее опущены перпендикуляры MK и MP на катеты этого треугольника. При каком положении точки M длина отрезка PK будет наименьшей?

**Решение.** Учитывая равенство диагоналей MC и PK, получаем, что длина отрезка PK будет наименьшей при условии, что CM - высота треугольника ABC. При выборе любой другой точки M₁ на гипотенузе AB, получим прямоугольный треугольник CMM₁, в котором CM - катет, а CM₁ - гипотенуза.

**Ответ.** M - основание высоты CM.

**Задача 3.** Найдите наименьшее расстояние между точками прямой y=x-1 и параболы y=x².

**Решение.** Искомое расстояние - это расстояние от прямой y=x-1 до касательной к параболе, параллельной этой прямой. Уравнение касательной: y=x-(1/4). Искомое расстояние - расстояние между данными прямыми - равно высоте в прямоугольном равнобедренном треугольнике со стороной 3/4, то есть 3/(4\*2½).

**Ответ.** 3/(4\*2½).

**Задача 4.** Можно ли разбить куб на шесть равных тетраэдров?

**Решение.** Разобьём куб ABCDA₁B₁C₁D₁ на три равных четырёхугольных пирамиды AA₁BCD, A₁CDD₁C₁ и A₁BCC₁B₁, каждую из которых затем разобьём на две равные треугольные пирамиды диагональю боковой грани.

**Ответ.** Да.

**Задача 5.** Может ли сумма 1000 последовательных нечётных чисел быть седьмой степенью натурального числа?

**Решение.** Пусть (n-999), (n-997), ..., (n-1), (n+1), ..., (n+999) - тысяча последовательных нечётных чисел. Тогда их сумма S=(n-999)+(n-997)+...+(n-1)+(n+1)+...+(n+999)=1000n. Если n=10⁴, то S=1000n=10⁷, то есть седьмой степени натурального числа.

**Ответ.** Да.

**Задача 6.** Из произвольной точки круглого бильярдного стола пущен шар. Докажите, что внутри стола найдётся такая окружность, что траектория шара её ни разу не пересечёт.

**Решение.** Заметим, что при отражении от "круглой стенки" угол падения шара (то есть угол между звеном и перпендикуляром к касательной к окружности бильярда в точке падения шара) равен углу отражения (то есть угол между следующим звеном и тем же перпендикуляром). Заметим, что расстояние от центра круга до звена ломаной из траектории не меняется.

Если это расстояние R>0, то годится любая окружность с центром в центре бильярдного стола и радиусом r<R, например r=R/2.

Если R=0, то траекторией шара является один из диаметров стола, всё остальное пространство свободно и там можно разместить какую-нибудь окружность.