**Методические рекомендации для обучающихся**

**по изучению темы «Применение производной к исследованию функции»**

Методические рекомендации содержат правила применения, примеры с подробным решением.

При изучении темы «Применение производной к исследованию функции»

рассматривается:

1. Нахождение промежутков монотонности и точек экстремума;

2. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции;

3. Применение производной к построению графиков функций.

Рассмотрим определения, правила применения, примеры с подробным решением.

1. **Нахождение промежутков монотонности и точек экстремума**

**Определение**: Точка х0 называется точкой максимума, если для любого х из окрестности точки х0 выполняется неравенство: f(x0) > f(x).

**Определение**: Точка х0 называется точкой минимума, если для любого х из окрестности точки х0 выполняется неравенство: f(x0) < f(x).   
Точки минимума и максимума функции называются **точками экстремума функции**.

Точки, в которых производная равна нулю или не существует называются **критическими точками**.

Справедлива теоремы.

**Теорема**: Если х0 – точка экстремума, то производная в этой точке равна нулю, т.е. f ’(x) = 0.

**Теорема**:

Если в окрестности критической точки f ’(x) меняет знак с «+» на «-», то эта точка является точкой максимума, если с «-» на «+», то точкой минимума.

**Правило нахождения экстремумов функции y = f(x) с помощью производной**

1. Найти производную функции f ’(x).
2. Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная равна нулю или не существует.
3. Исследовать знак производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции f(x).

Если на промежутке f ’(x) < 0, то на этом промежутке функция убывает; если на промежутке f ’(x) > 0, то на этом промежутке функция возрастает.

1. Если в окрестности критической точки f ’(x) меняет знак с «+» на «-», то эта точка является точкой максимума, если с «-» на «+», то точкой минимума.
2. Определить точки минимума и максимума и записать ответ.

С помощью приведенного алгоритма можно найти не только экстремумы функции, но и промежутки возрастания и убывания функции.

ПРИМЕР:

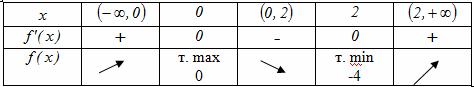
Найти промежутки возрастания и убывания; точки экстремума функции: f (x) = x3 – 3x2.   
Решение:

Найдем производную функции: f ’(x) = 3x2 – 6x.   
Найдем критические точки , решив уравнение 3x2 – 6x =0;

3x(x-2) =0

x = 0, x = 2

Исследуем поведение производной в критических точках и на промежутках между ними.



Ответ: Функция возрастает при  **http://math.semestr.ru/math/images/function-image023.gif**  
 функция убывает при  http://math.semestr.ru/math/images/function-image024.gif  
 точка минимума функции х = 2; точка максимума функции х = 0.

1. **Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке [a;b].**

Запишем алгоритм, позволяющий находить наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

1. Находим [область определения функции](http://www.cleverstudents.ru/functions_researching/function_domain.html) и проверяем, содержится ли в ней весь отрезок [a;b].
2. Находим все точки, в которых не существует первая производная и которые содержатся в отрезке [a;b]
3. Определяем все стационарные точки, попадающие в отрезок [a;b]. Для этого, [находим производную функции](http://www.cleverstudents.ru/derivative/differentiation.html), приравниваем ее к нулю, решаем полученное уравнение и выбираем подходящие корни.
4. Вычисляем значения функции в отобранных стационарных точках (если такие имеются), в точках, в которых не существует первая производная (если такие имеются), а также при x=a и x=b.
5. Из полученных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

Разберем алгоритм при решении примера на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

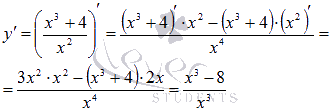
Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции формула

на отрезке [1;4];

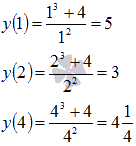
Решение.

Областью определения функции является все множество действительных чисел, за исключением нуля, то есть формула. Оба отрезка попадают в область определения.

Находим производную функции по [правилу дифференцирования дроби](http://www.cleverstudents.ru/derivative/differentiation_rules.html):  


Очевидно, производная функции существует во всех точках отрезков [1;4] и [-4;-1].

Стационарные точки определим из уравнения формула. Единственным действительным корнем является x=2. Эта стационарная точка попадает в отрезок [1;4].

Вычисляем значения функции на концах отрезка и в стационарной точке, то есть при x=1, x=2 и x=4:  


Следовательно, наибольшее значение функции  формула , а наименьшее значение  формула

# Применение производной к построению графиков функции

При исследовании свойств функции необходимо найти:

1) область ее определения;

2) производную;

3) стационарные точки;

4) промежутки возрастания и убывания;

5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

**Пример: Построить график функции**

http://www.kvadromir.com/kuznec/grafiki/zadanie1/1.3/1.gif

Решение.

1. Областью определения функции является  **все действительные числа**
2. Найдём производную функции **http://www.kvadromir.com/kuznec/grafiki/zadanie1/1.3/5.gif**
3. Найдём критические точки, в которых производная равна нулю.   http://www.kvadromir.com/kuznec/grafiki/zadanie1/1.3/6.gif   
           Это точки     х = 0, х = 2, х = 1

#### 4) Отметим эти точки на числовой оси и определим знак производной на интервалах.

#### http://www.kvadromir.com/kuznec/grafiki/zadanie1/1.3/8.png

#### Таким образом:     http://www.kvadromir.com/kuznec/grafiki/zadanie1/1.3/9.gif     - точка минимума;     http://www.kvadromir.com/kuznec/grafiki/zadanie1/1.3/10.gif     - точка максимума;     http://www.kvadromir.com/kuznec/grafiki/zadanie1/1.3/11.gif    - точка минимума.

#### http://www.kvadromir.com/kuznec/grafiki/zadanie1/1.3/12.gif.

#### 5) Строим график на основании проделанного исследования

#### http://www.kvadromir.com/kuznec/grafiki/zadanie1/1.3/13.gif

**Методические рекомендации подготовлены преподавателем математики Коротковой Н.Н.**