***Олимпиада по математике***

***11 класс***

1. Найдите остаток от деления многочлена (3х+8)2012 на х+3. (3 балла)

Решение.

По теореме Безу остаток от деления многочлена на двучлен (х–а) равен значению многочлена при х=а.

Обозначим Р(х)= (3х+8)2012. Тогда Р(–3)=1.

Ответ: 1.

1. Последовательность из двух различных чисел продолжили двумя способами: так, чтобы получилась геометрическая прогрессия, и так, чтобы получилась арифметическая прогрессия. При этом третий член геометрической прогрессии совпал с десятым членом арифметической прогрессии. А с каким членом арифметической прогрессии совпал четвёртый член геометрической прогрессии? (4 балла)

Решение.

Пусть *a* – первое из двух чисел исходной последовательности, *d* – разность арифметической прогрессии, а *q* — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда по условию задачи *a* + *d* = *aq*, *a* + 9*d* = *aq*2. Следовательно, *a*(*q* – 1) = *d* и *a*(*q* – 1)(*q* + 1) = *a*(*q*2 – 1) = 9*d* = 9*a*(*q* – 1). Поскольку *q*≠1, отсюда получаем *q* = 8 и *aq*3 = *a* + *a*(*q*3 – 1) = *a* + *a*(*q* – 1)(*q*2 + *q* + 1) = *a* + 73*d*. Таким образом, четвёртый член геометрической прогрессии совпал с 74-м членом арифметической прогрессии.

Ответ: с 74-м членом арифметической прогрессии.

1. Найти все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению 19*m*+84*n*=1984. (4 балла)

Решение.

Так как *m*=(1984-84*n*):19=100-4(*n*-1)-8(*n*-1):19, *n*-1 делится на 19, то *n*=19*k*+1, где *k ≥*–1. Тогда *m*=100-84*k*. Так как *m* и *n* натуральные числа, то *k*=0 и *k*=1. При *k*=0 имеем *m*=100 и *n*=1; при *k*=1 имеем *m*=16 и *n*=20.

Ответ: *m*=100, *n*=1; *m*=16, *n*=20.

1. На новом сайте зарегистрировалось 2000 человек. Каждый пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека объявляются друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться? (5 баллов)

Решение.

*Оценка*. Всего было отправлено 2000000 приглашений, а пар на сайте  1000·1999 = 1999000.  Приглашений на 1000 больше, чем пар, поэтому внутри хотя бы 1000 пар было отправлено два приглашения. Значит, образовалось хотя бы 1000 пар.

*Пример*: расставим всех в вершинах правильного 2000-угольника, и пусть каждый пригласит 1000 следующих за ним по часовой стрелке. Тогда друзьями окажутся только те, кто расположен в противоположных вершинах.

Ответ: 1000 пар.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

1. Решить систему уравнений

http://www.problems.ru/show_document.php?id=1590496(5 баллов)

### Решение.

Сложив почленно данные уравнения, после приведения подобных членов и сокращения обеих частей на два получим (х2+у2) √(х2+у2) =125.

Извлекая кубический корень из обеих частей этого уравнения (решаем во множестве действительных чисел), имеем: √(х2+у2)=5 или (х2+у2) =125.

Подставив в первое уравнение, получим *xy=12* . Итак, наша система уравнений эквивалентна системе http://www.problems.ru/show_document.php?id=1590498

Умножим второе уравнение почленно на 2, а затем вычтем почленно из первого уравнения. После извлечения квадратного корня будем иметь: x+y=±7; x-y=±1, что эквивалентно следующим четырём системам уравнений:

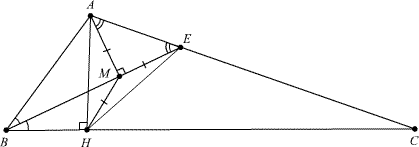
http://www.problems.ru/show_document.php?id=1590500http://www.problems.ru/show_document.php?id=1590501http://www.problems.ru/show_document.php?id=1590502http://www.problems.ru/show_document.php?id=1590503

Решая их, получаем четыре решения: (4;3), (3;4), (–3;–4), (–4;–3).

1. В треугольнике *ABC* проведены высота *AH* и биссектриса *BE*. Известно, что угол *BEA* равен 45°. Докажите, что угол *EHC* равен 45°. (6 баллов)

Решение.

Опустим из вершины *A* перпендикуляр *AM* на *BE*. Треугольник *AME* равнобедренный прямоугольный.



Точки *M* и *H* лежат на окружности с диаметром *AB*, значит,  *MH* = *MA* = *ME*  (на дуги *AE* и *MH* опираются равные углы). Следовательно, *M* – центр описанной окружности треугольника *AHE*, поэтому  ∠*AHE* = 1/2 ∠*AME* = 45°,  а  ∠*EHC* = 90° – ∠*AHE*.