**Олимпиадные задания по математике (10 класс)**

**Каждое задание оценивается в 5 баллв**

1. Графики функций у = х2+ ах + b и у = х2 + сх + d пересекаются в точке с координатами (1; 1). Сравните a5 + d6 и c6- b5.

Решение:

a5 + d6 = c6 – b5.
Так как графики функций проходят через точку (1; 1), то выполняются равенства: 1 = 1 + а + b и 1 = 1 + с + d, то есть, a = -b и с = -d. Следовательно, а5 = -b5 и d6 = c6. Складывая эти неравенства почленно, получим, что а5 + d6 = c6 – b5.

1. Какое наибольшее число ребер шестиугольной призмы может пересечь плоскость, не проходящая через вершины призмы?

Решение:

Горизонтальной плоскостью можно пересечь все 6 боковых ребер. Наклоним эту плоскость так, чтобы она пересекла верхнее основание около одной из вершин. Ясно, что при этом она станет пересекать два ребра в верхнем основании, но перестанет пересекать одно из боковых ребер. Таким образом, мы увеличим число пересеченных ребер на 1.
Точно также можно увеличить это число еще на 1 за счет ребер нижнего основания. Так мы получили плоскость, пересекающую 8 ребер призмы.
Почему больше пересечений получить невозможно? Во-первых, никакое сечение не может пересекать более двух ребер одного основания (иначе сечение просто совпадает с плоскостью этого основания). Но пересечение двух ребер в одном основании исключает пересечение хотя бы одного из боковых ребер, а пересечение двух ребер в другом основании – другого бокового ребра.

1. Решите уравнение: 

Решение:

Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на выражение, сопряженное знаменателю:



1. Докажите, что если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то их высоты тоже образуют геометрическую прогрессию.

Решение:

Пусть стороны треугольника равны b, bq, bq2, площадь треугольника S, тогда высоты треугольника соответственно равны: 2S/b, 2S/bq, 2S/db2, то есть тоже образуют геометрическую прогрессию.

1. В клетки квадрата 3х3 требуется вписать девять различных натуральных чисел так, чтобы все они не превосходили n, и чтобы произведения чисел в каждой строке и каждом столбце были равны. При каком наименьшем n это возможно?

Решение:

 Покажем, что n = 14 слишком мало. Среди чисел 1, 2, …, 14 только 2 делятся на 5 (5 и 10), поэтому их нельзя использовать (не во всех строках произведение будет делиться на 5). По тем же соображениям нельзя использовать числа 7 и 14. Тем более, нельзя использовать числа 11 и 13. Итак, 6 чисел уже отпадают. Остается всего 8 чисел, а их не хватит для заполнения клеток квадрата! На рисунке изображен квадрат с n = 15

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 5 | 12 | 2 |
| 3 | 10 | 4 |
| 8 | 1 | 15 |