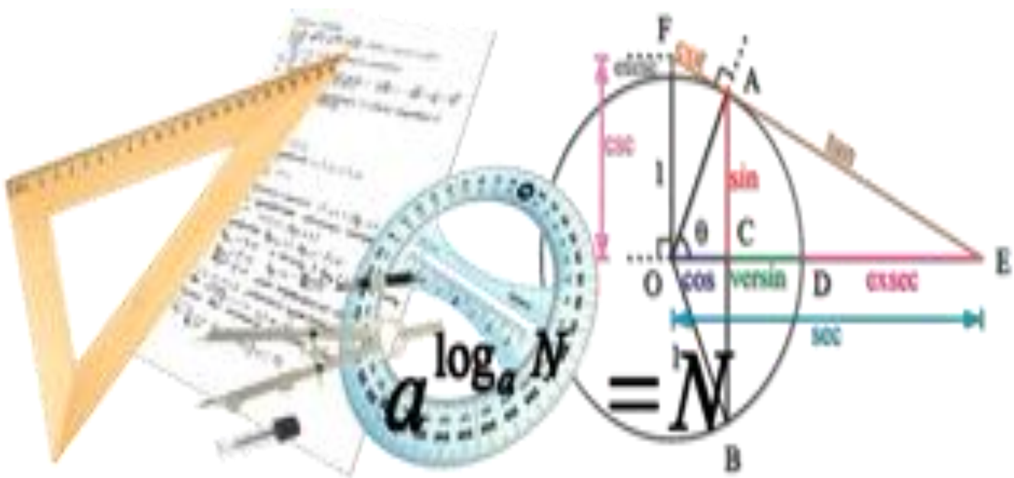
Школьные олимпиады
по математике.



Содержание

В последние годы проводится много различных математических олимпиад. Кроме традиционных олимпиад, проводятся также дистанционные, устные, заочные, нестандартные и другие виды олимпиад.
Основная цель олимпиад:

- выявление талантливых ребят,
- развитие творческих способностей и интереса к научно-исследовательской деятельности у обучающихся,
- создание необходимых условий для поддержки одаренных детей,

Для успеха в конкурсной математике, конечно, нужно решать задачи.
Успех связан не только со способностями, но и со знанием классических олимпиадных задач.
Учитель может использовать данный материал на занятиях математического кружка, для дистанционного обучения и как материал для самообразования школьников.

1. ЧИСЛОВЫЕ РЕБУСЫ

Задачи на числовые ребусы—это задачи на восстановление записи при выполнении действий над натуральными числами, только цифры обозначаются не звездочками, а буквами. При этом добавляется важное условие: в одной и той же задаче одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы—разные цифры. Причем первая цифра каждого числа должна быть отлична от нуля. Если задача имеет не один ответ, требуется найти их все.

Пример 1:
Решить ребус:

$$\begin{array}{r} \text{КОКА} \\ +\ \text{КОЛА} \\ \hline \text{ВОДА.} \end{array}$$

Присмотримся к последнему столбцу: в нем стоит одна и та же цифра А. Чему же она равна? Только нулю.

А теперь обратим внимание на второй столбец: в нем аналогичное положение с цифрой О. Отсюда О равна нулю или 9. Но первая возможность отпадает; остается О = 9.

Для нахождения К рассмотрим первый столбец. Очевидно, К отлична от нуля и не превосходит 4. Тогда К принимает одно из значений 1, 2, 3, 4. Разберем четыре случая.

1) Пусть К =1.

Получаем, что в третьем столбце Л = 9, поскольку во втором столбце должно быть 9 + 9 + 1 = 19. Но тогда Д = 0, а это невозможно.

2) Пусть К = 2.

Подставим в ребус значения К = 2, А = О, О = 9.

$$\begin{array}{r} \text{2920} \\ +\ \text{29Л0} \\ \hline \text{В9Д0}. \end{array}$$

Из третьего столбца 2 + Л=10 + Д, Л = 8 + Д.

Отсюда Д = 0 или Д = 1, соответственно Л = 8 или Л = 9. Но обе эти возможности исключаются.

3) Пусть К = 3.

Получаем:

$$\begin{array}{r} \text{3930} \\ +\ \text{39Л0} \\ \hline \text{В9Д0}. \end{array}$$

Тогда 3 + Л=10 + Д, Л = 7 + Д, а значит, Д = 1, Л = 8. Кроме того, В = 7.

4) Пусть К = 4.

Следовательно, В = 9. Но последнее невозможно.

Итак, решение получается только в третьем случае.

Ответ: 3930 + 3980 = 7910

Пример 2.

Восстановите запись: АВ·АВ = АСС.

Давайте подумаем: когда произведение АВ • АВ начинается той же цифрой А, что и число АВ? Это возможно только при А = 1.

А когда такое произведение оканчивается двумя одинаковыми цифрами? Это возможно в двух случаях: 10·10=100, 12·12=144.

Но первый вариант отпадает, так как тогда В = С = 0, а разные буквы должны обозначать разные цифры.

Ответ: 12·12= 144

****

Задачи

1.Восстановите записи:

а) $$\begin{array}{r} \text{ОХОХО} \\ +\ \text{АХАХА} \\ \hline \text{АХАХАХ}, \end{array}$$
б) $$\begin{array}{r} \text{УДАР} \\ +\ \text{УДАР} \\ \hline \text{ДРАКА}. \end{array}$$

Ответ: а) 90909+10101=101010 б) 8126+8126=16252

2.Ребус не имеет решения. Почему?

ШАРИК
+МУРКА
ДРУЗЬЯ

Ответ:

Всего различных цифр—10 (от 0 до 9), а в ребусе их 11

3.Решить числовой ребус

**5
1**
2**5
+13*0
***
4*77*

Ответ:325*147=47775

4.Решите ребусы

а) ОДИН + ОДИН = МНОГО, б) ДРАМА + ДРАМА = ТЕАТР, в) ТРОПКА + ТРОПКА + ТРОПКА = ДОРОЖКА.

Ответ:

а) 6823+6823=13646 б) 18969+18969=37938 в) 649750*3=1949250

5.Рассмотрим запись

Из какого наименьшего количества елок может состоять ЛЕСОК?

(Буквы Е и Ё обозначают одну и ту же цифру)

Ответ:Из трех

6.Восстановить запись: ТОРГ·Г=ГРОТ

Ответ:1089*9=9801

7.Решите ребус: СИ·СИ=СОЛЬ

Ответ:98*98=9604

8.Решите ребусы: а) СИГ^2=СЕМГА б) СОМ^2=ОГОГО

Ответ:а) 128^2=16384 б) 264^2=69696

9.Число КУБ является кубом натурального числа, а число БУК простое. Какие это числа, если одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а разные буквы—разные цифры?

Ответ:125 и 521

10.Восстановить зашифрованные цифры: $ТР^{И}$=ИКС

Ответ:

17^2=289

11.Заменить буквы цифрами так, чтобы равенство БЕСЫ=$(Б+Е+С+Ы)^4$ оказалось верным.

Ответ:Б=2, Е=4, С=0, Ы=1

12. Решить ребусы:

а) АВ·А=ССС б) А·В·АВ=ВВВ в) АА·АВС·ВС=АВСАВС

Ответ:а) 37·3=111 б) 3·7·37=777 в) 77·713·13=713713

2.ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЦИФР НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Здесь мы встретимся с задачами на арифметические действия над натуральными числами, где часть цифр чисел известна, а большая часть нет. Будем обозначать неизвестные цифры звездочками. Нужно найти все цифры, обозначенные звездочками; если ответов несколько, то требуется найти их все.

Любопытно проследить, как в задаче, где порой известны две-три, а то и одна цифра, а неизвестных цифр много, удается найти эти цифры — почти из ничего получить все.

В задачах этой темы предполагается, что первая цифра каждого числа отлична от нуля.

Пример

$$
\begin{array}{r|l}
-\,{*}{*}8 & {*}{*} \\
\underline{2{*}} & {*}7 \\
-\,{*}{*}{*} & \\
\underline{{*}{*}{*}} & \\
0. &
\end{array}
$$

1.

Восстановить запись: Сначала найдем вторую цифру делителя. Так как она при умножении на 7 дает число, оканчивающееся на 8, то эта цифра равна 4.

А чему равна первая цифра делителя? Очевидно, 1 или 2. Если первая цифра делителя 1, то 14 при умножении на 7 дает двузначное число 98, а должно давать трехзначное число. Значит, этот случай невозможен.

Пусть первая цифра делителя равна 2. Найдем первую цифру частного. Она равна 1, поскольку 24 при умножении на эту цифру дает число 2*. Наконец, делимое легко найти, умножая делитель 24 на частное 17.

Ответ: 408 : 24 = 17

Пример 2.

Найдите неизвестные цифры в записи:

$$\begin{array}{rcccc}
\times & & & 1 & 9\\
 & & & \ast & \ast\\ \hline
 & & & \ast & \ast\\
+ & & \ast & \ast & \\ \hline
 & \ast & \ast & 0 & \ast
\end{array}.$$

Первая цифра суммы может быть равна только 1. Тогда первая цифра второго слагаемого — 9. Отсюда первая цифра второго множителя равна 5, а следовательно, второе слагаемое — 95. Тогда первая цифра первого слагаемого равна 5. Поэтому вторая цифра второго множителя равна 3.

Ответ: 19·53 =1007.

****

Задачи:

1.Восстановите записи:

а) $\begin{array}{rcccc}
\times & & & \ast & \ast\\
 & & & \ast & \ast\\ \hline
 & & & \ast & \ast\\
+ & & \ast & 7 & \\ \hline
 & \ast & \ast & \ast & \ast
\end{array}$, б) $\begin{array}{rccc}
\times & & 2 & \ast\\
 & & \ast & \ast\\ \hline
 & & 9 & \ast\\
+ & \ast & 9 & \\ \hline
 & \ast & \ast & \ast
\end{array}$, в) $\begin{array}{rcccc}
\times & & & 5 & 8\\
 & & & \ast & \ast\\ \hline
 & & & \ast & \ast\\
+ & \ast & \ast & \ast & \\ \hline
 & 5 & \ast & \ast & \ast
\end{array}$, г) $\begin{array}{rcccc}
\times & & & 1 & \ast\\
 & & & \ast & \ast\\ \hline
 & & \ast & \ast & \ast\\
+ & & \ast & \ast & \\ \hline
 & \ast & \ast & \ast & 1
\end{array}$.

Ответ:

а) 97·11=1067 б) 23·34=782 в) 58·91=5278 г) 19·59=1121

2.Восстановите запись:

$$\begin{array}{rccccc}
\times & & & \ast & \ast & \ast\\
 & & & & \ast & 8\\ \hline
 & & & \ast & \ast & \ast\\
+ & \ast & \ast & \ast & \ast & \\ \hline
 & \ast & \ast & \ast & \ast & 0
\end{array}.$$

Ответ:

120·98=11760 или 115·98=11270

3.Восстановите запись:

а) $\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} *2* \\ *7 \end{array} \\ \hline *** \\ +\;\; **** \quad \\ \hline ****8, \end{array}$ б) $\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} *19 \\ ** \end{array} \\ \hline *** \\ +\;\; ** \quad \\ \hline **0*, \end{array}$ в) $\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} *0* \\ *** \end{array} \\ \hline 5** \\ +\;\; *0* \quad \\ \hline 5***5. \end{array}$

Ответ:

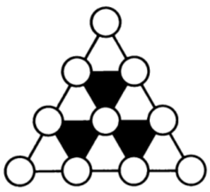
а) 124·97=12028 б) 19·53=1007 в) 505·101=51005

4.Восстановите пример на умножение натуральных чисел, если известно, что сумма цифр у обоих сомножителей одинакова.

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} ***1 \\ 2* \end{array} \\ \hline **3** \\ +\;\; *4** \quad \\ \hline 5**** \end{array}$$

Ответ:2231·26=58006

5. Можно ли какие-либо десять чисел расставить в кружки данной фигуры так, чтобы сумма чисел в вершинах любого черного треугольника была равна 1996, а сумма чисел в вершинах любого белого треугольника была равна 1997?



Ответ:Нельзя

6.Восстановить запись: *3·3*=3**

Ответ:13·30=390

7.Восстановить запись 91·**=***

Ответ:91·10=910

8.Восстановить записи: а) **·*-*=1 б) ***·9=***

Ответ:а) 10·1-9=1 б) 101·9=909, 111·9=999

9.Сколько всех решений имеет задача ***·9=*** ?

Ответ:12

10.В примере на умножение допущена ошибка. Откуда это видно?

```
  ×***3
      **
  -------
  + ***7
   *****
  -------
   ******
```

Ответ:Вторая цифра второго множителя ровна 9, но его первая цифра должна быть больше 9, а это невозможно.

11.Восстановить запись

```
_*****|**
 ***   *8*
 -----
 _***
    **
 -----
 _***
  ***
 -----
     0.
```

Ответ:11868:12=989

12.На какое наименьшее натуральное число нужно умножить число 7 для того, чтобы получить число, записывающимися одними девятками.

Ответ: на 142857

13.На какое наименьшее натуральное число нужно умножить число 12345679 для того, чтобы получить число, состоящее из одних пятерок.

Ответ:45

3. ЧЕТНОЕ И НЕЧЕТНОЕ ЧИСЛО

Обычно четные и нечетные числа связывают только с натуральными числами. Здесь мы распространим их на любые целые числа.

Целое число называется четным, если оно делится на 2, и нечетным, если оно на 2 не делится.

Например, число 6 — четное, число 0 — четное, 5 — нечетное, число —1 — тоже.

Любое четное число можно представить в виде 2а, а любое нечетное — в виде 2а + 1 (или 2а - 1), где число а — целое.

Два целых числа называются числами одинаковой четности, если оба они четные или оба нечетные. Два целых числа называются числами разной четности, если одно из них четное, а другое нечетное.

Рассмотрим свойства четных и нечетных чисел, важные для решения задач.

1. Если хотя бы один множитель произведения двух (или нескольких) чисел четен, то и все произведение четно.

2. Если каждый множитель произведения двух (или нескольких) чисел нечетен, то и все произведение нечетно.

3. Сумма любого количества четных чисел — число четное.

4. Сумма четного и нечетного чисел — число нечетное.

5. Сумма любого количества нечетных чисел — число четное, если число слагаемых четно, и нечетное, если число слагаемых нечетно.

Пример

В пятиэтажном доме с четырьмя подъездами подсчитали число жителей на каждом этаже и, кроме того, в каждом подъезде. Могут ли все полученные 9 чисел быть нечетными?

Обозначим число жителей на этажах соответственно через a_1,a_2,a_3,a_4,a_5, а число жителей в подъездах соответственно через b_1,b_2,b_3,b_4. Тогда общее число жителей дома можно подсчитать двумя способами — по этажам и по подъездам: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$.

Если бы все эти 9 чисел были нечетными, то сумма в левой части записанного равенства была бы нечетной, а сумма в правой части — четной. Следовательно, это невозможно.

Ответ: не могут

****

Задачи

1.Найдите все целые p и q при которых трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ принимает при всех целых x: а) четные б) нечетные значения.

Ответ:а) *p* нечетно *q* четно б) *p* и *q* нечетно

2. Дано 125 чисел, каждое из которых равно 1 или 3. Можно ли их разбить на

две группы так, чтобы суммы чисел, входящих в каждую группу, были равны?

Ответ: нельзя.

3.Страницы книги пронумерованы подряд, от первой до последней. Гриша вырвал из разных мест книги 15 листов и сложил номера всех 30 вырванных страниц. У него получилось число 800. Когда он сказал об этом Мише, тот заявил, что Гриша при подсчете ошибся. Почему Миша прав?

Ответ:Сумма номеров всех страниц нечетна

4.По кругу сцепили несколько шестеренок. Смогут ли они одновременно

вращаться, если их: а) 5; б) 6?

Ответ:а) не смогут б) смогут

5. В шести коробках лежат шарики: в первой — 1, во второй — 2, в третьей — 3, в четвертой — 4, в пятой — 5, в шестой — 6. За один ход разрешается в любые две коробки прибавить по одному шарику. Можно ли за несколько ходов уравнять количество шариков во всех коробках?

Ответ: нельзя

6.Числа a и b нечетные. Каким будет число a^2+b+1?

Ответ: нечетное

7.Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка 1 м). Докажите, что он сделал четное число прыжков.

Ответ:Поскольку кузнечик вернулся в исходную точку, количество прыжков вправо равно количеству прыжков влево, поэтому общее количество прыжков четно.

8.Существует ли замкнутая 7-звенная ломаная, которая пересекает каждое свое звено ровно один раз?

Ответ: не существует

9.Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы от 1 до 192. Его младший брат вырвал из тетради все листы и разбросал по комнате. Петя подобрал наугад с пола 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 2006?

Ответ:нет

10.Сколько существует четырехзначных чисел, не делящихся на 1000, у которых первая и последняя цифры четны?

Ответ:1996

11. Можно ли разменять 125 рублей при помощи 50 купюр достоинствами 1, 3, и 5 рублей?

Ответ: нельзя

12.Вдоль забора растут 8 кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 225 ягод?

Ответ: нет

13. Можно ли выпуклый 13-угольник разрезать на параллелограмм?

Ответ: нельзя

14. Сумма нескольких последовательных четных чисел ровна 100. Найти эти числа.

Ответ:22+24+26+28=100, 16+18+20+22+24=100

4. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Вспомним известное из школьного курса математики определение: говорят, что целое число a делится на целое число b, не равное нулю, если существует такое целое число m, что a = bm.

Число a называется делимым, число b — делителем, число m — частным. В этом случае говорят также, что число a кратно числу b. Тот факт, что число a делится на число b, будем обозначать так: a⋮ b.

А теперь вспомним признаки делимости натуральных чисел:

-делимость натурального числа на 2 равносильна тому, что его последняя цифра четная;

-делимость натурального числа на 5равносильна тому, что его последняя цифра — 0 или 5;

-делимость натурального числа на 10 равносильна тому, что оно оканчивается цифрой 0;

-делимость натурального числа на 25 равносильна делимости на 25 числа, образованного двумя его последними цифрами;

-остаток от деления натурального числа на 3 (на 9) совпадает с остатком от деления суммы его цифр на 3 (на 9);

-делимость натурального числа на 4равносильна делимости на 4 числа, образованного двумя его последними цифрами;

-делимость натурального числа на 8равносильна делимости на 8 числа, образованного тремя его последними цифрами;

-делимость натурального числа на 11 равносильна делимости на 11 разности между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах (другими словами, делимости на 11 знакочередующейся суммы всех его цифр).

Пример

К числу 43 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное четырехзначное число делилось на 45. Найдите все решения.

Обозначим неизвестные цифры через a и b. Тогда четырехзначное число можно записать в виде $\overline{a43b}$.

По признаку делимости на 5 b = 0 или b = 5. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть 6 = 0. Полученное число $\overline{a430}$ делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр, равная a + 7, делится на 9. Отсюда a =2.

2) Пусть b = 5. Аналогично находим, что a = 6.

Ответ:

четырехзначное число равно 2430 или 6435

****

Задачи

1.Найдите все значения цифр, обозначенных звездочками, если число 4·8·2 делится на 88.

Ответ:0,3 или 7,7

2.Найдите все значения цифр x и y, при которых число $\overline{84x5y}$ делится на 198.

Ответ: x=1, y=0

3.Из натурального числа вычли сумму его цифр, а затем у полученной разности вычеркнули одну цифру. Сумма оставшихся цифр разности равна 131. Какую цифру вычеркнули?

Ответ: 4

4. У трехзначного числа, делящегося на 45, разность между второй и первой цифрами равна разности между третьей и второй. Найдите все такие трехзначные числа.

Ответ: 135, 630 или 765

5.Найдите все трехзначные числа, делящиеся на 11, у которых сумма цифр делится на 11.

Ответ: 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902

6.Найдите все значения цифр a и b, при которых число $\overline{53ab213}$ делится на 99.

Ответ: a=9, b=4

7.Найдите все значения цифры а, если число $\overline{a719}$ делится на 11.

Ответ: 4

8.Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается одинаковыми цифрами и делится на 18.

Ответ: 666

9.Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается одинаковыми цифрами и делится на: а) 72, б) 693.

Ответ: а) 888888888 б) 333333

10.Пятизначное число делится на 72, причем три его цифры — единицы. Найдите все такие числа.

Ответ:41112, 14112, 11016, 11160

11.Пятизначное число делится на 315, причем три его цифры — четверки.
Найдите все такие числа.

Ответ: 44415

12.Найдите значения x и y в числе 12x3y4, если оно кратно 599.

Ответ: x=9, y=8

13.Какие две цифры можно приписать к числу 1313 справа, чтобы полученное шестизначное число делилось на 53?

Ответ: 5, 4 или 8, 7

14.Найти наименьшее натуральное число вида n^3+3n^2-4, делящееся на 19.

Ответ: $19^2 \cdot 16=5776$

15.Сколько существует двузначных чисел, делящихся на произведение своих цифр?

Ответ: 5 чисел: 11, 12, 24, 36, 15

5 .НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

Вспомним определения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.

Наибольшим общим делителем двух или нескольких натуральных чисел называется наибольшее из натуральных чисел, на которое делится каждое из данных чисел.

Обозначение наибольшего общего делителя чисел a и b:

НОД(a, d).

В частном случае, когда наибольший делитель двух чисел равен 1, эти числа называются взаимно простыми.

Наименьшим общим кратным двух или нескольких натуральных чисел называется наименьшее из натуральных чисел, которое делится на каждое из данных чисел.

Обозначение наименьшего общего кратного двух чисел a и b: НОК(a, b).

Пример 1:

Найдите наибольший общий делитель всех девятизначных чисел, в записи которых каждая из цифр 1, 2, 3,..., 9 встречается по одному разу.

Обозначим этот наибольший общий делитель через d.

Из всех девятизначных чисел указанного вида возьмем только два — 123456798 и 123456789.

Так как эти числа делятся на d, то и их разность, которая равна 9, делится на d:

9:d. Отсюда d = 1, d = 3 или d = 9.

Какой из этих случаев дает ответ? Для выяснения истины определим с помощью признаков делимости на 3 и на 9, делится ли каждое из девятизначных чисел на 3 или 9. С этой целью найдем сумму цифр любого из них: 1 + 2 + 3+...+ 9 = 45.

Поскольку 45 делится на 9, то каждое из девятизначных чисел делится на 9. Из предыдущего следует, что 9 является их наибольшим делителем.

Ответ: 9

Пример 2:

Найдите наименьшее общее кратное натуральных

исел n и n + 3.

Ответ зависит от того, чему равен наибольший общий делитель чисел n и n + 3.

Он равен 1, если n не делится на 3, и 3, если n делится на 3.

Ответ:

n(n + 3), если п не делится на 3, и (n + 3), если n делится на 3.

****

Задачи:

1.Найти наибольший общий делитель чисел
111111 и 111111111.

Ответ:111

2.Найдите все пары натуральных чисел, сумма которых ровна 288, а наибольший общий делитель—36.

Ответ:252, 36, 180, 108

3. Найти наибольший общий делитель чисел
121212 и 121212121212.

Ответ: 121212

4.Среди первых ста натуральных чисел найти 3 различные числа, наименьшее общее кратное которых наибольшее из всех возможных.

Ответ:97, 99, 100

5. Три теплохода заходят в порт после каждого рейса. Первый теплоход совершает рейс за 4 дня, второй — за 6, третий — за 9. Однажды они встретились в порту все вместе. Через какое наименьшее число дней они снова встретятся в порту все вместе?

Ответ: через 36 дней

6. Отец и сын шли по занесенной снегом дороге друг за другом. Длина шага отца — 80 см, сына — 60 см. Их шаги совпали 601 раз, в том числе в самом начале и в конце пути. Какое расстояние они прошли?

Ответ:1 км 440 см

7. Покупатель хотел купить у продавщицы все имеющиеся у нее яйца и спросил, сколько у нее яиц. Та ответила, что не помнит, но знает, что если яйца раскладывать по 2, 3, 4, 5 или 6, то каждый раз в остатке остается одно яйцо. Какое наименьшее число яиц могло быть у продавщицы?

Ответ: 61

8. Найдите все пары натуральных чисел, если их сумма равна 60, а наименьшее общее кратное — 72.

Ответ: 24 и 36

9. Найдите все пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 24, а наименьшее общее кратное — 360.

Ответ:24 и 360, 72 и 120

10. Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей — $\frac{21}{25}$ и $\frac{14}{15}$

получаются натуральные числа.

Ответ: $\frac{42}{5}$

11. Два школьника вышли одновременно из пункта А и отправились друг за другом по занесенной снегом тропинке. Шаг одного из них равен 75 см, другого — 65 см. В первый раз их шаги совпали через 18 сек. после начала движения, а после 10 мин. движения их шаги совпали впервые в пункте В. Найдите расстояние АВ.

Ответ: 331,5 м

12.Найдите наибольший общий делитель чисел

^{95} -1 и 2^{1998} -1.

Ответ: 7

13.На какое число и при каких натуральных n сократим

добь $\frac{n^2+1}{n+1}$? Найдите все решения.

Ответ: На 2 при всех нечетных n

14. Пусть a и b — натуральные числа, a > b и числа a + b и a-b взаимно просты. Найдите все значения наибольшего общего делителя чисел a и b.

Ответ: 1

15. Натуральные числа aи b взаимно просты. Найдите все значения наибольшего общего делителя чисел 11a + 2b и 18a + 5b.

Ответ: 1 и 19

6. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Вспомним соответствующие определения.

Натуральное число, большее 1, называется простым, если оно делится только на 1 и на само себя. Натуральное число называется составным, если оно имеет больше двух различных делителей.

Принято считать, что число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам. Отсюда следует, что множество натуральных чисел можно разбить на такие три подмножества: множество простых чисел, множество составных чисел и множество, содержащее единственный элемент 1.

Справедлива следующая теорема.

Любое натуральное число, большее 1, можно, и притом единственным образом, представить в виде произведения простых чисел.

Это предложение называется основной теоремой арифметики натуральных чисел.

Среди простых делителей натурального числа могут быть равные, и их произведение можно записать в виде степени. Тогда разложение натурального числа а на простые множители можно представить в следующем виде: $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n}$,

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$-различные простые числа, $k_1, k_2, \ldots, k_n$-натуральные.

Пример 1:

Натуральные числа a и b таковы, что 31a=54b. Докажите, что число a + b составное.

Так как число 31а делится на 54 и числа 31 и 54 — взаимно простые, то а делится на 54: а = 54n, где n$\in$ N. Тогда 31·54·n = 54b, b= 31n.

Отсюда a+b=54n+31n=85n, а следовательно, число a + b является составным.

Пример 2:

Найдите все натуральные n, при которых число a^2- 10a + 21 простое.

Разложим этот квадратный трехчлен на линейные множители:

a^2- 10a + 21=(a-3)(a-7)

Отсюда видно, что данное число, вообще говоря, составное. А когда оно простое? Когда один из множителей равен 1, а другой — простому числу или когда один из них равен — 1, а другой равен —р, где число р — простое. Переберем все случаи.

1)Пусть а-3= 1.

Тогда а = 4, откуда а -7 = -3. Получилось, что число $a^2 - 10a + 21$ отрицательно. Значит, этот случай невозможен.

2)Пусть а-7= 1.

Тогда а = 8, а - 3 = 5, где 5 — число простое

едовательно, значение а = 8 удовлетворяет требованию задачи.

3) Положим а-3 = -1.

В этом случае а = 2, а-7 = -5. Так как число 5 — простое

о значение а = 2 также

подходит.

4) Пусть а-7 = -1.

Тогда а = 6, а-3 = 3. Поскольку здесь (а — 3)(а — 7) < 0,

то этот случай невозможен.

Ответ: 8, 2

****

Задачи:

1.Простое число разделено на 21 с остатком. Найдите все значения остатка, являющиеся составными числами.

Ответ: 4, 8, 10, 16, 20

2.Может ли быть составным числом остаток от деления простого числа на а) 30 б) 60

Ответ: а) не может б) может, если остаток равен 49

3.Простое или составное число $2^{80}+3^{80}$?

Ответ: составное

4.Натуральные числа a, b, c, d таковы, что ab=cd. Может ли число a+b+c+d быть простым?

Ответ: не может

5.Является ли число $4^9+6^{10}+3^{20}$ простым?

Ответ: является

6.Найти такое простое число p, что p^2+9 тоже простое.

Ответ: p=2

7.Простым или составным является число $20^{2007}+1$?

Ответ: составным

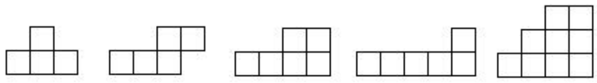
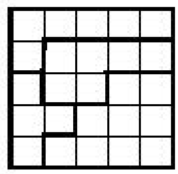
8.Найти все целые n, при которых модуль
числа n^2-7n+10—число простое.
Ответ: 3, 4

9. Найти все натуральные n, при которых число n^4+4 составное.
Ответ: все n≠1

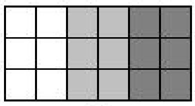
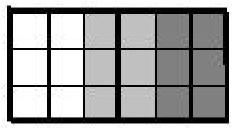
10.Найти все целые x, для которых 8·3-12·2+6x-217
простое число.
Ответ: при x=4

8.Задачи для проведения школьной олимпиады по математике

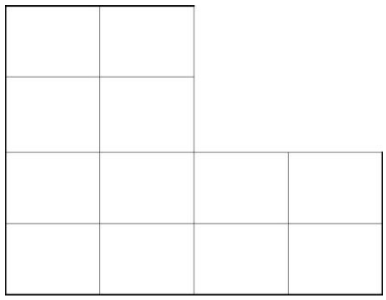
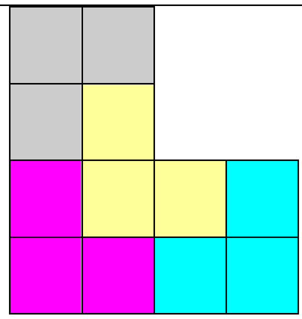
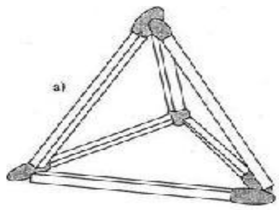
5 класс

1	В примере на сложение двух чисел первое меньше суммы на 2000, а сумма больше второго о на 6. Восстановите пример.	6+2000 = 2006. Если из суммы двух чисел вычесть одно из слагаемых, то получится другое слагаемое. Из условия следует, что второе слагаемое равно 2000, а первое - равно 6.
2	Составьте квадрат, используя ровно четыре из пят изображенных ниже фигур. Каждую из четырех выбранных Вами фигур можно использовать толь один раз. 	Можно определить длину  стороны искомого квадрата. Общее количество клеток пяти фигур равно 4+5+6+6+9=30. Значит, если можно составить квадрат, только со стороной 5. Таким образом, лишней является фигура из пяти клеток.
3	Без ореха (от дупла до орешника) белка бежит со скоростью 4 м/сек, а с орехом (от орешника до дупла) — со скоростью 2 м/сек. На путь от дупла до орешника и обратно она тратит 54 секунды. Найдите расстояние от дупла до орешника. Ответ обоснуйте.	72 метра. Поскольку обратно белка бежит в два раза медленнее, то время, затраченное белкой на обратную дорогу, в два раза больше времени, которое она тратит на дорогу от дупла до орешника. Поэтому, время, затраченное на дорогу от дупла до орешника, в три раза меньш времени, затраченного на всю дорогу, то есть, равно 54 : 3 = 18 секунд. Следовательно, расстояние от дупла до орешника равно 18*4 = 72 метра.
4	В день рождения дяди Федора почтальон Печкин хочет выяснить, сколько тому лет. Шарик говорит что дяде Федору больше 11 лет, а кот Матроскин утверждает, что больше 10 лет. Сколько лет дяде Федору, если известно, что ровно один из них ошибся? Ответ обоснуйте.	дяде Федору 11 лет. Заметим, что если не ошибся Шарик, то не ошибся и Матроскин, что противоречит условию. Значит, Шарик сказал неправду, в отличие от кота Матроскина. Таким образом, дяде Федору больше 10 лет, но не меньше 11. Следовательно, дяде Федору исполнилось 11 ле
5	В забеге от Воробьевых гор до Красной площади приняли участие три спортсмена. Сначала стартовал Гриша, затем — Саша, и последней — Лена. После финиша выяснилось, что во время забега Гриша обгонял других 10 раз, Лена — 6 ра Саша — 4 раза, причем все трое ни разу не оказывались в одной точке одновременно. В како порядке финишировали спортсмены, если известн что они пришли к финишу в разное время? Ответ обоснуйте.	первым финишировал Гриша, затем - Саша, и последней - Лена. Гриша стартовал первым. Чтобы он смог совершить 10 обгонов, необходимо чтобы Саш и Лена обогнали его хотя бы 10 раз. Так как общее количество обгонов Саши и Лены равно + 4 = 10, то они обгоняли только Гришу и не обгоняли друг друга. После того, как Гриша совершил все 10 обгонов, он опять оказался первым. Значит, спортсмены финишировали в том же порядке, в котором и стартовали.

6 класс

1	В саду у Ани и Вити росло 2006 розовых кусто Витя полил половину всех кустов, и Аня полил половину всех кустов. При этом оказалось, что ровно три куста, самые красивые, были политы Аней, и Витей. Сколько розовых кустов остали не политыми?	3 куста. Витя полил 1003 куста, из них 1000 он поливал один, а три вместе с Аней. Точно так же Аня поли 1003 куста, из них 1000 она поливала в одиночку, три с Витей. Значит, вместе они полили 1000+1000+3=2003 куста. Следовательно, осталис не политыми 2006-2003=3 розовых куста
2	Цифры трёхзначного числа А записали в обратном порядке и получили число В. Может число, равное сумме А и В, записываться тольк нечётными цифрами?	да, может. Пусть, например, А=219. Тогда В=912, А+В=1131
3	В стране Полосатии произошёл переворот и новый лидер приказал перекроить старый флаг на новый (см. рисунки). Как выполнить такой приказ, если разрешается разрезать старый фла ровно на четыре части?  старый флаг  новый флаг	 старый флаг  новый флаг
4	Чтобы испечь сто блинов, маме требуется 30 минут, а Ане — 40 минут. Андрюша готов съес 100 блинов за час. Мама с Аней пекут блины б остановки, а Андрюша непрерывно их поедает. Через какое время после начала этого процесса на столе окажется ровно сто блинов?	через 24 минуты. <u>Первый способ.</u> Мама печёт сто блинов за полчаса значит, за два часа она испечёт 400 блинов. Аня печёт сто блинов за сорок минут, поэтому, за два часа она испечёт 300 блинов. Андрюша за эти два часа съест двести блинов. Получается, что через д часа на столе окажется 400 + 300 - 200 = 500 блинов. Следовательно, для того, чтобы на столе оказалось сто блинов, потребуется времени в пять раз меньше, то есть 120 : 5 = 24 минуты.
5	В норке живёт семья из 24 мышей. Каждую но ровно четыре из них отправляются на склад за сыром. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждая мышка побывала на складе с каждой ровно по одному разу?	нет, такого быть не может. Каждая мышка за одну ночь может побывать на складе с тремя другими мышками. Чтобы побыват на складе с каждой из 23 других мышек по одному разу, ей необходимо 23:3 ночей. Но число 23 не делится нацело на три. Поэтому такая ситуация невозможна

Задачи для проведения конкурса на уроке.

1	Из 9 монет одна фальшивая, она легче остальных. За какое минимальное количество взвешиваний на чашечных весах можно найти фальшивую монету?	За два взвешивания. Нужно разделить монеты на 3 кучки.
2	Разделить фигуру на четыре равные части 	
3	В записи 52*2* замените значок *цифрами так, чтобы полученное число делило на 36. Укажите все возможные варианты.	Число делится на 36, если оно делится и 4 на 9. Так кА сумма цифр 5, 2, 2 равна 9, то сумма дву недостающих цифр должна равняться 0, 9 или 18. А число должно делиться на 4 и учитывая , что что предпоследняя цифра 2, то последняя цифра может быть или 0, или 4 или 8. Тогда искомые числа: 52524, 52128, 52020, 52920.
4	Сложить из шести спичек три равные треугольника.	
5	В классе 35 учеников. Из них 20 человек занимаются в математическом кружке, 11 – в экологическом, 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько экологов увлекаются математикой?	1) 35-10=25 (чел) – посещают кружки, 2) 25-20=5 (чел) – посещают лишь экологическ кружок, 3) 11-5=6 (чел) – занимаются экологией и математикой.
6	Как с помощью 7-литрового ведра и 3-литровоi банки налить в кастрюлю ровно 5 литров воды'	Старший брат догонит младшего через 15 мину Если бы младший брат вышел на 10 минут раньше старшего, то старший брат догнал бы младшего у школы: 40-30=10 (мин). Значит, в случае, когда младший брат вышел на 5 минут раньше старшего, старший брат догонит младшего в середине пути. Это расстояние старший брат пройдет за 30:2=15 (мин).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. пособие для учащихся 7—11 кл. — Челябинск: Взгляд, 2005. — 271 с. — (Нестандартные задачи по математике).
2. В. А. Шеховцов. Олимпиадные задания по математике. 9-11 классы: решение олимпиадных задач повышенной сложности / авт.-сост. В. А. Шеховцов. - Волгоград: Учитель, 2009. - 99 с.
3. Балаян Э.Н. Олимпиадная и занимательная задачи по математике / Э.Н. Балаян. — 3-е изд. — Ростов н/Д : Феникс, 2008. — 364, [1] с.: ил. — (Библиотека учителя).
4. Депман И.Я., Виленкин Н.Я. За страницами учебника математики: Пособие для учащихся 5-6 кл. сред.шк.—М.: Просвещение, 1989—287 с.
5. Петраков И.С. Математические олимпиады школьников. Пособие для учителей.—М.: Просвещение, 1982.—96 с.
6. Р. М. Федоров, А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, И. В. Ященко Московские математические олимпиады 1993—2005 г. / Р. М. Федоров и др. Под ред. В. М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2006. — 456 с.