**Федеральное государственное казенное общеобразовательное учреждение**

**«Средняя общеобразовательная школа №151»**

ОБУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ ПРИЕМАМ

РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

Методическая разработка

Полищук Ольги Владимировны,

учителя математики ФГКОУ СОШ №151

г. Оленегорска-2 Мурманской области

2013 г

ОБУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ ПРИЕМАМ РЕШЕНИЯ

ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

**Введение**

 Текстовые   задачи  в математике играют важную роль. Путем  решения   задач  формируются различные математические понятия, осмысливаются различные арифметические операции.   Задачи  содействуют обогащению и развитию правильной речи учащихся,  помогают учащимся понять количественные соотношения различных жизненных фактов.  Статистические данные анализа результатов государственной итоговой аттестации за курс основной школы и ЕГЭ показывают, что большинство учащихся не в полной мере владеет техникой решения текстовых задач. Необходимость рассмотрения различных подходов к поиску решения задачи обусловлена тем, что умение решать задачу является высшим этапом в познании математики и развитии учащихся. В ходе решения текстовой задачи формируется умение переводить ее условие на математический язык уравнений, систем уравнений, графических образов - составлять математическую модель. Решение задач способствует развитию логического и образного мышления, повышает эффективность обучения математике и смежным дисциплинам.

 Научить решать текстовые задачи – значит, научить такому подходу к задаче, при котором она выступает как объект тщательного изучения, а ее решение – как объект математического моделирования. При решении каждой задачи мы производим небольшое математическое исследование, с помощью которого проверяется наша сообразительность и способность к логическому мышлению. Прикладное значение текстовых задач затрагивает финансовую, экологическую и другие стороны нашей жизни. По этой причине возникла необходимость рассмотреть классификации этих задач, рассмотреть различные пути поиска решения, систематизировать и ликвидировать пробелы в знаниях по математике.

**Классификация задач по типам и методам решения.**

Текстовые алгебраические задачи можно условно классифицировать по типам:

* задачи на движение;
* задачи на совместную работу;
* задачи, связанные с понятием «процента»;
* задачи на смеси и сплавы.
* задачи на прогрессии;

 Решение текстовых задач делится на несколько этапов:

1. Выбор неизвестных;
2. Составление уравнений или систем уравнений, а в некоторых случаях — систем неравенств;
3. Нахождение неизвестных или нужной комбинации неизвестных;
4. Отбор решений, подходящих по смыслу задачи.

 Иногда при решении сложных задач трудно с самого начала определить количество вводимых неизвестных. Выбирая неизвестные, мы создаём математическую модель ситуации, описанной в условии задачи. Поэтому все соотношения должны из конкретных условий задачи, т. е. необходимо каждое условие представить в виде уравнения или неравенства. Так же необходимо обратить внимание на то, что число переменных, входящих в неравенства или уравнения, может оказаться достаточно большим, однако в дальнейшем, при решении уравнений или неравенств, «лишние» переменные последовательно исключаются.

Бывают случаи, когда число уравнений совпадает с числом неизвестных, но и нередки задачи, в которых число неизвестных больше числа уравнений. Если при этом мы использовали все условия задачи, то необходимо прочитать внимательно ещё раз условие и понять требование задачи, т. к. может оказаться, что надо отыскать не все неизвестные, а всего лишь их соотношение.

 Существуют различные методы решения текстовых задач: арифметический, алгебраический, геометрический, логический, практический и др. В основе каждого метода лежат различные виды математических моделей.

Дадим краткую характеристику первых трех методов решения текстовых задач, которые наиболее часто встречаются в школьном курсе математики.

Арифметический метод. Решить задачу арифметическим методом – значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над числами. Одну и ту же задачу во многих случаях можно решить различными арифметическими способами. Задача считается решенной различными способами, если её решения отличаются связями между данными и искомыми, положенными в основу решений, или последовательностью использования этих связей.

Алгебраический метод. Решить задачу алгебраическим методом – это значит найти ответ на требование задачи, составив и решив уравнение или систему уравнений (или неравенств). Одну и ту же задачу можно также решить различными алгебраическими способами. Задача считается решенной различными способами, если для её решения составлены различные уравнения или системы уравнений (неравенств), в основе составления которых лежат различные соотношения между данными и искомыми.

Геометрический метод. Он состоит в том, что логическое доказательство или решение задачи направляется наглядным представлением, иногда доказательство или решение видно из наглядной картины. Под геометрическим методом решения алгебраических задач будем понимать в дальнейшем метод решения, заключающийся в использовании геометрических представлений (изображений), законов геометрии и элементов аналитических методов (уравнений (неравенств), систем уравнений, арифметических выражений и др.)

Традиционно под геометрическим методом решения задач (не только текстовых) в курсе алгебры понимали только конструктивный прием, когда решение выполнялось с помощью точных построений, и ответ задачи получали прямо с чертежа. Это ограничивало возможности использования геометрических представлений, в частности, при решении текстовых задач. Мы будем понимать геометрический метод, как метод, состоящий из двух приемов: конструктивного и конструктивно-аналитического.

Конструктивно-аналитический прием позволяет выполнить чертеж схематически, от руки. Решение задачи в этом случае осуществляется аналитически: либо арифметическим путем с использование чертежа, либо путем составления уравнения, которое основывается на точных геометрических соотношениях (равенства, подобия, равновеликости и др.).

Таким образом, для решения алгебраической задачи геометрическим методом необходимо:

1. построить геометрическую модель задачи: решающую или вспомогательную (геометрическая модель задачи называется решающей, если она позволяет получить ответ задачи без аналитических выкладок, в противном случае – вспомогательной).
2. найти ответ задачи: если модель решающая, то ответ «снимаем» с чертежа, в случае вспомогательной геометрической модели надо:

а) составить числовое выражение или уравнение (систему уравнений), неравенство (систему неравенств), используя геометрические соотношения полученных фигур;

б) найти значение числового выражения или уравнения, неравенства (системы уравнений или неравенств);

в) исследовать полученные решения: выяснить, удовлетворяют ли корни уравнения (системы уравнений), решения неравенства (системы неравенств) условию и требованию задачи, исчерпывают ли они все решения задачи и т.д.

Рассмотрим примеры решения некоторых типов задач из приведенной выше классификации, предварительно выделив особенности задач каждого типа, которые надо учитывать при их решении.

**Задачи на движение**

 **Задачи на движение обычно содержат следующие величины:**

***S* – скорость, *t* – время, *v* – расстояние.**

Уравнения, связывающие эти три величины:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***S = vt***  | ***v =*** $\frac{S}{t}$ | ***t =*** $\frac{S}{v}$ |

Уравнения, которые составляются на основании условий задач на движение, обычно содержат такие величины, как расстояние, скорости движущихся объектов, время, а также скорость течения воды (при движении по реке). При решении этих задач принимают следующие допущения:

1. Если нет специальных оговорок, то движение считается равномерным.
2. Повороты движущихся тел, переходы на новый режим движения считаются происходящими мгновенно.
3. Если тело с собственной скоростью *х* движется по реке, скорость течения которой равна *у*, то скорость движения тела по течению считается равной (*х+у*), а против течения равной (*х-у*).

При решении задач на движение рекомендуется сделать рисунок, отображающий все условия задачи. При этом решающий задачу должен выбрать схему решения: какого вида уравнения составлять, то есть что сравнивать: время, затраченное на движение на отдельных участках пути, или пройденный каждым объектом путь.

При решении задач такого типа часто необходимо узнать время встречи двух объектов, начинающих движение одновременно из двух точек с разными скоростями и движущихся навстречу друг другу либо в случае, когда один объект догоняет другой.

 Пусть расстояние между точками А и В равно S. Два тела начинают движение одновременно, но имеют разные скорости *v*1 и *v*2. Пусть С – точка встречи, а *t* – время движения тел до встречи. В случае движения навстречу друг другу имеем АС*=v*1*t*, BC*=v*2*t*. Сложим эти два равенства:

АС+СВ*=v*1*t+v*2*t=*(*v*1*+v*2)*t*⇒AB*=*S*=*(*v*1*+v*2)*t*⇒.

Если одно тело догоняет другое, то теперь получаем АС*=v*1*t*, BC*=v*2*t*.

Вычтем эти равенства:

АС*–*ВС*=*(*v*1*–v*2)*t*.

Так как АС*–*ВС*=*AB*=*S, то время, через которое первое тело догонит второе, определяется равенством

.

*Задача №1. Пароход прошел 4 км против течения реки, а затем прошел еще 33 км по течению, затратив на весь путь один час. Найдите собственную скорость парохода, если скорость течения реки равна 6,5 км/ч.*

Решение:

Решим задачу с помощью уравнения.

Пусть *х* км/ч – собственная скорость парохода.

Тогда (*х+*6,5) км/ч – скорость парохода по течению.

 (*х–*6,5) км/ч – скорость парохода против течения.

Составим таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|   | *v**км/ч* | *t**ч* | *S**км* |
| По течению | *х+ 6,5*  | 1 | *33* |
| Против течения | *х– 6,5* | *4* |

Так как против течения пароход прошел 4 км со скоростью (*х–*6,5) км/ч, то

  ч. – время движения парохода против течения.

Так как по течению пароход прошел 33 км со скоростью (*х+*6,5) км/ч, то  ч. – время движения парохода по течению.

По условию 

решим полученное уравнение 



Откуда получаем квадратное уравнение

 *х*2*–*37*х+*146,25*=*0 ⇒*х*1*=*4,5 км/ч и *х*2*=*32,5 км/ч.

Осуществим отбор полученных решений.

Через *х* мы обозначили собственную скорость парохода, при этом скорость течения реки 6,5 км/ч, поэтому *х*1*=*4,5 км/ч не подходит по смыслу задачи (при такой скорости пароход не выплыл бы против течения).

Поэтому, собственная скорость парохода равна 32,5 км/ч.

Ответ: 32,5 км/ч.

*Задача №2. Расстояние между городами А и В равно 60 км. Два поезда выходят одновременно: один из А в В, другой из В в А. Пройдя 20 км, поезд, идущий из А в В, останавливается на полчаса, затем, пройдя 4 минуты, встречает поезд, идущий из В. Оба поезда прибывают к месту назначения одновременно. Найдите скорости поездов.*

Решение:

Отобразим все условия задачи на рисунке.

4 мин.

Заметим, что если время в условии задачи выражено как в часах, так и в минутах, то минуты надо перевести в часы. В нашем случае 4 мин*=*ч*=*ч.

Так как в задаче надо определить две величины, введем две переменные и составим два уравнения.

Пусть *х* км/ч – скорость поезда, вышедшего из пункта А;

 *у*км/ч – скорость поезда, вышедшего из пункта В.

Так как в задаче известно расстояние, выразим время через скорость и расстояние.

(ч) – время, за которое поезд из А прошел 20 км.

(ч)– время, затраченное поездом из А до встречи в пункте D.

(км) – расстояние, которое прошел поезд из А за 4 минуты после остановки.

Тогда поезд из А до встречи в пункте D прошел (км).

(км) – расстояние, пройденное поездом из В до встречи.

ч– время, пройденное поездом из В до встречи в пункте D.

Так как по условию в пункте D поезда встретились, они затратили на путь до встречи одинаковое время, поэтому получаем первое уравнение

.

С другой стороны, выразим время движения поездов после встречи в пункте D.

Так как , то  – время движения поезда из В после встречи.

Так как , то  – время движения поезда из А после встречи.

По условию .

Таким образом, мы составили систему двух уравнений с двумя переменными.



Решим систему, для чего из первого уравнения выразим *у* и подставим это выражение вместо *у* во второе уравнение.

;

;.

Решим полученное уравнение

;

;

;

*х*1*=*60; *х*2*=–*600.

Так как *х* – скорость, то *х*2 не подходит по смыслу задачи. Подставим полученное значение *х* в выражение для*у*

.

Ответ: *v*A*=*60 км/ч, *v*B*=*40 км/ч.

Таким образом, при решении любых текстовых задач на движение наиболее рационально принимать в качестве неизвестных величин расстояние, скорость или наименьшую из величин, что приводит к более короткому решению. Если после составления уравнений, полученная система не решается, то необходимо попробовать выбрать другие неизвестные. Количество неизвестных не имеет значения, правильное составление системы превыше всего. Также, нужно обращать особое внимание на единицы измерения – в течение всего решения они обязательно должны быть одинаковыми. А именно, если это часы, то на протяжении всей задачи время должно выражаться в часах, а не в минутах, так и, километры и метры не должны применяться в одном решении

**Задачи на «совместную работу»**

Задачи «на работу» делятся на два вида: на производительность труда и на производительность различных механизмов (труб, насосов и т. д.). Такие задачи часто вычисляются по формуле:

 **А=P⋅t**

где:

 **P** – производительность труда, т. е. часть работы, выполняемая в единицу времени;

 **t** – время, необходимое для выполнения всей работы.

Пусть P⋅t=1 – взаимообратные величины, т. е. вся работаА=1, следовательно:

******

Решим задачу на производительность труда.

При решении этих задач нужно выяснить с учащимися, что возможны два случая:

1. объем выполненной работы известен;
2. объем выполненной работы неизвестен.

*Задача 1. Два токаря вместе изготовили 350 деталей. Первый токарь делал в день 40 деталей и работал 5 дней, второй работал на 2 дня меньше. Сколько деталей в день делал второй токарь?*

Решение:

Удобно записать данные в таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *Производительность,**Р* | *Время работы**t* | *Количество**дет.* |
| 1т. | 40 деталей | 5 дней | *+350 дет* |
| 2т. | ***?*** | ***?****, на 2 дня меньше* |

Так как известны производительность и время работы первого токаря, найдем количество деталей, изготовленных первым токарем.

40 · 5 = 200 (дет.) – изготовил первый токарь.

Работая с таблицей, делаем вывод, что можно найти, сколько деталей изготовил второй токарь.

350 – 200 = 150 (дет.) – изготовил второй токарь.

Обратив внимание на опорные слова «на…меньше», делаем вывод, что можно найти, сколько дней работал второй.

5 – 2 = 3 (дня) – работал второй токарь.

Зная количество и время работы второго токаря, находим его производительность:

150 : 3 = 50 (дет.) – изготовлял второй токарь в день.

Ответ: 50 деталей

Для решения задач второго типа, текст задачи можно проиллюстрировать чертежами, что помогает учащимся зрительно видеть задачу.

*Задача 2. Новая машина может выкопать канаву за 8 часов, а старая – за 12. Новая работала 3 часа, а старая - 5 часов. Какую часть канавы осталось выкопать?*









**?**

Н

С

ВМ

Рассмотрим наглядное представление этих задач. Условимся, что объем выполненной работы неизвестен, поэтому принимаем его за 1 и изображаем в виде отрезка, но отрезков будет три, так как возможны три случая:

1. - работает одна новая машина (Н)
2. - работает одна старая машина (С)
3. - работают вместе обе машины (ВМ)

Отрезки равной длины, так как обе машины выполняют одну и ту же работу.

Рассмотрим подробное решение.

Первый отрезок делим на 8 равных частей, так как работа выполняется за 8 часов. Одна часть показывает, какую часть работы выполняет новая машина за 1 час, т.е. производительность новой машины равна 

Так как новая машина работала 3 часа, то выполнила  части все работы. Отмечаем на третьем отрезке - .

Аналогичные рассуждения проводим, рассматривая старую машину, и отмечаем на третьем отрезке - .

Далее рассматривается третий нижний отрезок, и по нему выясняется, как найти оставшуюся часть, т.е., отрезок, обозначенный знаком вопроса.

В связи с экономией времени деление отрезков производится «на глаз», хотя очень полезно показать, как можно разделить быстро на 4 равные части (отрезок делится пополам, а затем каждая часть еще пополам). Аналогично деление на 8 и т.д. На 6 частей – сначала пополам, а потом каждую часть - на три.

*Задача 3. Два кузнеца, работая вместе, могут выполнить работу за 8 часов. За сколько часов может выполнить работу первый кузнец, если второй выполняет ее за 12 часов?*

Изображая чертеж, мы проводим те же рассуждения, что и в предыдущей задаче.



****

****

**вместе**

**2к**

**1к**

**за 8 часов**

**за 12 часов**

**за ? часов**

Первый отрезок делим на 8 равных частей, так как оба выполняют работу за 8 часов. Одна часть показывает, какую часть работы они выполняют вместе за 1 час, т.е., их совместную производительность. Аналогичные рассуждения проводим для расчета производительности второго кузнеца.

Зная их совместную производительность и производительность второго, можно найти производительность первого.



Результат показываем на чертеже.

Выясняем, сколько часов нужно первому кузнецу для выполнения работы (сколько раз в 1 содержится по).

Ответ: 24 часа.

*Задача 4. Три каменщика разной квалификации выложили кирпичную стену, причём первый каменщик работал 6 часов, второй – 4 часа, а третий – 7 часов. Если бы первый каменщик работал 4 часа, второй – 2 часа и третий – 5 часов, то было бы выполнено 2/3 всей работы. За сколько часов каменщики закончили бы кладку, если бы они работали вместе одно и то же время?*

Решение.

Решим эту задачу путём составления системы уравнений.

Пусть х – производительность первого каменщика, y – второго, z – третьего. Всю работу примем за 1.

Составим таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *Производи**тельность, Р* | *Время, t* | *Работа, A* |
| I |
| 1 к. | x | 6 | 6x | 1 |
| 2 к. | y | 4 | 4x |
| 3 к. | z | 7 | 7x |
| II |
| 1 к. | x | 4 | 4x |  |
| 2 к. | y | 2 | 2x |
| 3 к. | z | 5 | 5x |

Составим систему уравнений по условию задачи:



Надо найти , то есть 

Умножим (2) на 2 и сложим почленно с (1). Получим:



Затем умножим (2) на -1,5 и сложим почленно с (1). Получим:



Подставим в искомое выражение полученные значения для x, y, z: .

В итоге получим 6.

Ответ: каменщики выполнят эту работу за 6 часов.

Задачи «на работу» сложны тем, что в них абстрактное понятие «работа» приобретает различное конкретное содержание. В первой задаче работа выражалась в виде производительности труда каменщиков.

В следующей задаче рассмотрим случай, в котором идёт речь о работе по наполнению бассейна.

*Задача 5. При одновременной работе двух насосов разной мощности бассейн наполняется водой за 8 часов. После ремонта насосов производительность первого из них увеличилась в 1,2 раза, а второго – в 1,6 раза, и при одновременной работе насосов бассейн стал наполняться за 6 часов. За какое время наполнится бассейн при работе только первого насоса после ремонта?*

Решение.

Пусть объём бассейна равен 1, тогда время его заполнения до ремонта первым насосом – x часов, а вторым – y часов.

Следовательно,  - производительность первого насоса до ремонта,

 - производительность второго насоса до ремонта.

Зная, что бассейн до ремонта насосов заполняется за 8 часов, составим первое уравнение:, т.е. .

 - производительность первого насоса до ремонта, а  - производительность второго насоса после ремонта. Зная, что бассейн после ремонта насосов заполняется за 6 часов, составим второе уравнение:, т.е. .

Составим и решим систему уравнений:



Умножим (1) на 0,9 и вычтем из него (2):



 

В итоге получим y=24, x=12.

Из найденных значений для x и y вычислим производительность первого насоса после ремонта:



По формуле  найдём время наполнения бассейна при работе только первого насоса после ремонта: ч.

Ответ: 10 ч.

*Задача 6. Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 1 минуту быстрее, чем первая труба?*

Решение:

Пусть $x$ литров воды в минуту пропускает вторая труба. По условию задачи составим таблицу.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *Объём резервуара, (л)* | *Скорость заполнения,* $\left(\frac{лит}{м}\right)$ | *Время заполнения, (м)* |
| Первая труба | 110 | $$x-1$$ | $$\frac{110}{x-1}$$ |
| Вторая труба | 110 | $$x$$ | $$\frac{110}{x}$$ |

Зная, что вторая труба заполняет резервуар на 1 минуту быстрее, чем первая труба, составим и решим уравнение.

$\left\{\begin{array}{c}\frac{110}{x-1}-\frac{110}{x}=1,\\x>1; \end{array}⇔\right.\left\{\begin{array}{c}110x-110\left(x-1\right)=\left(x-1\right)x, (1)\\x>1; \end{array}⇔\right.$

$$\left(1\right)x^{2}-x-110x+110x-110=0; x^{2}-x-110=0$$

$D=1+440=441, x\_{1}=11, x\_{2}=-10 \left(не удовлетворяет условию, x>1\right)$ $⇒$ $x=11.$

Таким образом, вторая труба пропускает 11 литров воды в минуту.

*Ответ:* 10 литров воды в минуту.

Решая задачи «на работу», очень выгодно принимать за неизвестные величины производительность (работа, производимая за единицу времени), но бывают и исключения, где необходимо за неизвестную, например, выбрать время. Иногда встречаются такие задачи, в которых не указывается, какая работа выполняется. В таких задачах, будет удобнее ввести самим единицу работы, равную всей работе.

**Задачи «на проценты»**

Задачи «на проценты» - в большинстве случаев являются экономическими задачами, в которых идёт речь о вкладах в банк с тем или иным процентом. При их решении надо помнить, что процент есть сотая доля числа. Решение задач этого типа тесно связано с тремя алгоритмами: нахождения части от целого, восстановление целого по его известной части, нахождение процентного прироста.

Рассмотрим решение задач с помощью графической иллюстрации.

Наглядная иллюстрация процента может быть продемонстрирована на метровой школьной линейке с делениями по 1 см. В данном случае 1 см является сотой частью линейки, т.е. 1%. Можно рассмотреть следующие задания: показать на линейке 25%, 40% и т.д.; назвать число процентов, которые показываются на линейке. Затем работу можно продолжить на отрезках, задавая вопросы, например:

Как показать 1% отрезка?

Ответ: отрезок нужно разделить на 100 равных частей и взять одну часть. (Условимся, что деление отрезка на 100 равных частей делаем условно).

Или: покажите 5% и т.д.

**5%**

*Задача 1. Ученик прочитал 138 страниц, что составило 23% всех страниц книги. Сколько страниц в книге?*

Решение. Рассмотрим графическое изображение задачи.

**? стр.**

**23%**

**138 стр**

100%

Число страниц в книге неизвестно. Ставим знак вопроса. Но число страниц составляет 100%. Показываем это на отрезке, выполняя деление на условные 100 равных частей (для слабоуспевающих учеников внизу отрезка можно ставить еще и число 100). Затем отмечаем число 138 и показываем, что оно составляет 23%.

Прежде всего нужно выяснить, сколько составляет 1 часть или 1%.

Так как 138 страниц составляют 23%, то находим, сколько приходится на 1%.

138:23 = 6 (стр.) – составляет 1%.

Так как число страниц в книге составляет 100%, то

6·100% = 600 (стр.) – в книге.

Ответ: В книге 600 страниц.

*Задача 2.Мальчик истратил на покупку 40% имевшихся у него денег, а на оставшиеся 30 рублей купил билет в кино. Сколько денег было у мальчика?*

**40%**

**30 руб.**

**?**

**60%**

Решение. Количество всех денег неизвестно (ставим на чертеже знак вопроса). Все деньги составляют 100%, поэтому разделим отрезок условно на 100 равных частей. Найдем, сколько процентов составляют 30 рублей.

100% - 40% = 60% - составляют 30 руб.

Обозначаем 60% на чертеже. Найдем, сколько составляет 1%:

30 : 60 = 0,5 (руб.) – составляет 1%.

0,5 · 100 = 50(руб.) – у мальчика

Ответ: 50 рублей.

*Задача 3. В школе 700 учащихся. Среди них 357 мальчиков. Сколько процентов учащихся этой школы составляют девочки?*

**700 чел**

**357 мал**

**? дев**

**100 %**

7 чел = 1%

Решение. Число учащихся 700 человек, что составляет 100%. Отрезок условно делим на сто равных частей. (Само выполнение чертежа подсказывает ученику первое действие).

700 : 100 = 7 (чел.) – составляют 1%.

Узнаем, сколько процентов составляют мальчики. Для этого:

357 : 7 = 51%

(Можно сказать и так:«Сколько раз в 357 содержится по 7%?»)

Работаем с чертежом. Узнаем, сколько процентов составляют девочки.

100%-51%=49%

Ответ: 49%

При решении задачи чертеж должен быть постоянно в поле зрения учащихся, так как является наглядной иллюстрацией задачи.

*Задача 4. По плану рабочий должен был сделать 35 деталей. Однако он сделал 14 деталей сверх плана. На сколько процентов он перевыполнил план?*

**100%**

**14 дет**

**?**

100 %

0,35

**35 дет**

Решение. Решая задачу, нужно объяснить, что план всегда составляет 100% и поэтому 35 деталей составляют 100%. Чтобы узнать, сколько составляет 1% нужно:

35 : 100 = 0,35 (дет.)

Узнаем, сколько процентов составляют 14 деталей (сколько раз в 14 содержится по 0,35).

Большинство задач лучше решать, переходя от процентов к дроби.

# Задачи на процентный прирост и вычисление «сложных процентов»

Решение задач этого типа основано на использовании следующих определений:

* абсолютный прирост;
* относительный прирост;
* процентный прирост;
* средний процентный прирост.
1. Пусть нам известна некоторая величина $A$. Необходимо найти $a \%$ этой величины. Если считать, что $A$ – это 100%, а $x$ - неизвестная величина, то из пропорции $\frac{A}{100}=\frac{x}{a}$ получаем:

 $x=A∙\frac{a}{100}.$

1. Пусть некоторое число $b$ составляет $a \%$ от неизвестной величины $A$. Необходимо найти $A$. Считая, что $A$– это 100%, получаем пропорцию:

$\frac{ b}{a}=\frac{A}{100}, т.е.A=b\frac{100}{a}.$

1. Процентным приростом величины $A$ за время $∆t$ называется величина

$p \%=\frac{A\_{1}-A\_{0}}{A\_{0}}∙100\% ⇒A\_{1}=A\_{0}+A\_{0}\frac{p}{100}=A\_{0}\left(1+\frac{p}{100}\right).$

Если за время $∆t=t\_{1}-t\_{0}$ величина $A$ измениться на $p\_{1}\%,$ далее за $∆t\_{2}=t\_{2}-t\_{0}$ – на $p\_{2}\%$ и т. д., то значение величины $A$ в момент $t\_{n}=nt\_{1}$ вычисляется по формуле:

$A\_{n}=A\_{0}\left(1+\frac{p\_{1}}{100}\right)\left(1+\frac{p\_{2}}{100}\right)\cdots \left(1+\frac{p\_{n}}{100}\right).$

1. Средний процент прироста $q\%$ определяется равенством:

$A\_{0}\left(1+\frac{p\_{1}}{100}\right)\left(1+\frac{p\_{2}}{100}\right)\cdots \left(1+\frac{p\_{n}}{100}\right)=A\_{0}\left(1+\frac{q}{100}\right)^{n},$

откуда получаем

$\frac{q}{100}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{p\_{1}}{100}\right)\left(1+\frac{p\_{2}}{100}\right)\cdots \left(1+\frac{p\_{n}}{100}\right)}-1.$

Итак, если число $A$ увеличится на $p \%$, то полученное значение будет равно $A\left(1+\frac{p}{100}\right),$ а если уменьшить на $q \%$, то полученное значение будет равно $A\left(1-\frac{q}{100}\right).$

Рассмотрим примеры.

*Задача 5.Известно, что вклад, находящийся в банке, с начала года возрастает к концу года на определённый процент (свой для каждого банка). В начале года 5/6 некоторого количества денег положили в первый банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 670 у.е., а к концу второго года – 749 у.е. Было подсчитано, что если бы первоначально исходного количества денег положили во второй банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 710 у.е. В предложении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.*

Решение.

Обозначим через x первоначальную сумму денег. Тогда через а обозначим процент, на который возрастает сумма за год в первом банке, а через b – во втором банке. К концу первого года сумму вклада в I банке стала равной , во II банке , а к концу второго года  и . По условию задачи сумма вкладов в конце первого года составляет 670 у.е., а к концу второго года – 749 у.е., поэтому можно составить два уравнения:





Если во второй банк положить  у.е., а в первый – у.е, то сумма вкладов к концу года составила бы:

,

что равнялось бы 710 у.е. Поэтому получим третье уравнение:



Для нахождения известного х составим систему уравнений из (1) и (3) и решим её:











Подставляя вместо и  вместо  в уравнение (2), приходим к уравнению , имеющему один корень: x=660, но тогда:



Если исходное количество денег положить на два года, то к концу второго года величина вклада составит 726 у.е.

Ответ 726 у.е.

*Задача 6.Рабочий положил на хранение в сберегательный банк 5000 руб. По истечении одного года к его вкладу были причислены процентные деньги, и в то же время он увеличил свой вклад ещё на 5000 руб., а по истечении ещё одного года попросил выдать ему накопленные процентные деньги. Сколько процентов в год начисляет сбербанк, если рабочий получил 1232 руб. процентных денег, оставив вклад в 10 000 руб. на новый срок?*

Решение.

Пусть x% в год начисляет сбербанк, а y% - процент за 2 года. x+x+y - весь начисленный процент. По условию задачи 2x+y=1232 (руб.)

За I и II начисленный процент равен 5000⋅0,01x=50x, а процент за оба года равен 0,01x⋅(5000+50x).

Составим уравнение:

50x+50x+0,01x⋅(5000+50x)=1232

Решив это уравнение 50x+50x+0,01x(5000+50x)=1232

100x+50x+0,5x2-1232=0

0,5x2+150x-1232=0

D=b2-4ac=1502-4⋅0,5⋅(-1232)=24964, D>0, два корня.



x1=-308

x2=8

Найдём два значения для х: х1=-308 – не удовлетворяет смыслу задачи, х2=8. Значит, сбербанк начисляет в год 8%.

Ответ: 8%

**Задачи на «смеси и сплавы»**

Довольно часто приходится смешивать различные жидкости, порошки, разбавлять что-либо водой или наблюдать испарение воды. В задачах такого типа эти операции приходится проводить мысленно и выполнять расчёты.

Итак, пусть смесь массы ***М*** содержит некоторое вещество массой ***m*.** Тогда:

* **концентрацией данного вещества в смеси (сплаве) называется величина ;**
* **процентным содержанием данного вещества называется величина *с*⋅100%;**

Из последней формулы следует, что при известных величинах концентрации вещества и общей массы смеси (сплава) масса данного вещества определяется по формуле

***m=c⋅M*.**

Задачи на смеси (сплавы) можно разделить на два вида:

1. Задаются, например, две смеси (сплава) с массами *m*1 и *m*2 и с концентрациями в них некоторого вещества, равными соответственно *с*1 и *с*2. Смеси (сплавы) сливают (сплавляют). Требуется определить массу этого вещества в новой смеси (сплаве) и его новую концентрацию. Ясно, что в новой смеси (сплаве) масса данного вещества равна *c*1*m*1*+c*2*m*2, а концентрация .
2. Задается некоторый объем смеси (сплава) и от этого объема начинают отливать (убирать) определенное количество смеси (сплава), а затем доливать (добавлять) такое же или другое количество смеси (сплава) с такой же концентрацией данного вещества или с другой концентрацией. Эта операция проводится несколько раз.

При решении таких задач необходимо установить контроль за количеством данного вещества и его концентрацией при каждом отливе, а также при каждом доливе смеси. В результате такого контроля получаем разрешающее уравнение. Рассмотрим конкретные задачи.

*Задача 1.Из сосуда ёмкостью 54 литра, наполненного кислотой, вылили несколько литров и доли сосуд водой. Потом опять вылили столько же литров смеси. Тогда в оставшейся в сосуде смеси оказалось 24 литра чистой кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?*

Решение.

Пусть x литров кислоты вылили в первый раз. Тогда в сосуде осталось (54-x) литров. Долив сосуд водой, получим 54 литра смеси, в которой растворилось (54-х) литров кислоты. Значит, в одном литре смеси содержитсялитров кислоты. Всего за два раза вылили 54-24=30 литров кислоты. В результате получили уравнение:



Решив это уравнение, найдём два корня: х=90 и х=18. Ясно, что значение 90 не удовлетворяет условию задачи.

**Ответ:** в первый раз было вылито 18 литров воды.

При решении задач на смеси считается, что рассматриваемые смеси однородны: не делается различия между литром как единицей массы и как единицей ёмкости.

*Задача 2. В каких пропорциях нужно смешать раствор 50%-й и 70%-й кислоты, чтобы получить раствор 65%-й кислоты?*

Решение.

**1 способ**

Пусть х г – масса 50%-й кислоты, y г – масса 70%-й кислоты, 0,5х г – масса чистой кислоты в первом растворе, (x+y)г – масса смеси, 0,65(x+y)г - масса чистой кислоты в смеси. Составим уравнение (рис. 6а):

0,5x+0,7y=0,65(x+y)

Получаем соотношение 1:3.

Ответ: 1:3.

Существует и другой способ решения этой задачи. Он называется арифметическим (или старинным) способом.

**2 способ**

Обоснуем старинный способ решения задач «на смеси».

Пусть требуется смешать растворы а%-й и b%-й кислот, чтобы получить

с%-й раствор.

Пусть х г – масса а%-го раствора, y г – масса b%-го раствора,  г – масса чистой кислоты в первом растворе, а  г – масса чистой кислоты во втором растворе,  г – масса чистой кислоты в смеси.

,

при упрощении которого станет ясно, что x:y=(b-c):(c-a). Такой же вывод даёт схема:



*Задача 3.Имеется два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй – 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и во втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определите, сколько килограммов олова содержится в получившемся новом сплаве.*

Решение.

Пусть х кг – количество олова в новом сплаве. Так как новый сплав весит 400 кг и в нём находится 30 % цинка, то он содержит  кг, а во втором сплаве (120-y) кг цинка. По условию задачи процентное содержание цинка в двух сплавах равно, следовательно, можно составить уравнение:



Из этого уравнения находим, что у=45. Поскольку первый сплав содержит 40% олова, то в 150 кг первого сплава олова будет кг, а во втором сплаве олова будет (х-60) кг. Поскольку второй сплав содержит 26% меди, то во втором сплаве меди будет кг. Во втором сплаве олова содержится (х-60) кг, цинка 120-45=75 (кг), меди 65 кг и, так как весь сплав весит 250 кг, то имеем:

х-60+75+65=250, откуда х=170 кг

Ответ: 170 кг.

*Задача 4.В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5 % железа, содержание железа в оставшейся руде повысилось на 20 %. Определите, какое количество железа осталось ещё в руде?*

Решение.

Сначала составим таблицу, в которой напишем массу руды, массу железа, концентрацию (долю железа в рудеапишем массу руды, массу железа, концентрацию () руде?нем 12,5 % железа, содержание железа в оставшейся руде повысилось на 20) до и после удаления примесей.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Масса руды, кг | Масса железа, кг | Концентрация (доля железа в руде) |
| Руда | 500 | х |  |
| Руда после удаления примесей | 500-200=300 | х-0,125⋅200=x-25 |  |

Пусть х кг – масса железа в руде. Так как масса всей руды равна 500 кг, то концентрация железа в ней равна .

Так как масса железа в 200 кг примесей равна 0,125⋅200=25 (кг), то его масса в руде после удаления примесей равна (х-25) кг. Из того, что масса оставшейся руды равна 500-200=300 кг следует, что концентрация железа в ней равна 

По условию, содержание железа в оставшейся руде повысилось на 20%=$\frac{1}{5}$ . Составим и решим уравнение:



Найдём, что х=212,5 кг – масса железа в руде.

Найдём остаток железа в руде после удаления примесей:

212,5-25=187,5 (кг)

Ответ:187,5 кг.

 Мы решили вторую задачу путём составления таблицы, помогающей зрительно воспринимать задачу.

Задачи «на смеси и сплавы» решаются множеством способов, но в них всегда присутствует концентрация (доля содержания одного вещества в другом), и они всегда решаются путём составления уравнений.

**Заключение**

 При решении текстовых задач учащимся могут помочь несколько простых и общих советов.

* Не просто прочитайте, а тщательно изучите условие задачи. Попытайтесь полученную информацию представить в другом виде – это может быть рисунок, таблица или просто краткая запись условия задачи.
* Выбор неизвестных. В задачах "на движение" – это обычно скорость, время, путь. В задачах “на работу” - производительность и т.д.

Не надо бояться большого количества неизвестных или уравнений. Главное, чтобы они соответствовали условию задачи и можно было составить соответствующую “математическую модель” (уравнение, неравенство, система уравнений или неравенств).

* Составление и решение “математической модели”.

При составлении “математической модели” (уравнения, неравенства, системы уравнений или неравенств) ещё раз внимательно прочитайте условие задачи. Проследите за тем, что соответствует каждой фразе текста задачи в полученной математической записи и чему в тексте задачи соответствует каждый “знак” полученной записи (сами неизвестные, действия над ними, полученные уравнения, неравенства или их системы).

Очень важно не только составить уравнение, неравенство, систему уравнений или неравенств, но и решить составленное.

Если решение задачи не получается, то нужно ещё раз прочитать и проанализировать задачу (заданный текст и полученную запись).

Иногда по условию задачи достаточно отыскать не сами неизвестные, а их комбинации. Например, не *x* и *y*, а *x+y*, $\frac{x}{y}$, $\frac{1}{x}$и т.п.

Если кажется, что получилось правильное, но очень сложное выражение, то попробуйте ввести другие неизвестные, может быть, изменив их количество, чтобы получилась более простая модель.

Иногда неизвестные в задачах выражаются только целыми числами, тогда при решении задач нужно использовать свойства целых чисел.

* Решение сложной текстовой задачи – процесс творческий. Иной раз требуется вернуться к самому началу задачи, учитывая и анализируя уже полученные результаты.

При решении задач короткую запись задачи можно сделать с помощью рисунка или таблицы.

Таблица является универсальным средством и позволяет решать большое количество идейно близких задач.

**Задачи для самостоятельного решения**

* 1. Расстояние 450 км один из поездов проходит на 1,5 ч. быстрее другого. Найдите скорость каждого из поездов, если известно, что первый проходит 240 км за то же время, что второй проходит 200 км.
	2. Расстояние между городами А и В равно 50 км. Из города А в город В выехал велосипедист, а через 1 ч. 30 мин. вслед за ним выехал мотоциклист. Обогнав велосипедиста, он прибыл в город В на 1 ч. раньше него. Найдите скорость мотоциклиста, если известно, что она в 2,5 раза больше скорости велосипедиста.
	3. В реку впадает приток. Катер отходит от пункта А, находящегося на притоке, идет по течению 80 км до впадения притока в реку в пункте В, а затем идет вверх по реке до пункта С. На путь от А до С он затратил 18 ч., на обратный – от А до С – 15 ч. Найдите расстояние от пункта А до С, если известно, что скорость течения реки 3 км/ч, а собственная скорость катера 18 км/ч.
	4. По окружности, длина которой 999м, движутся два тела по одному и тому же направлению и встречаются через каждые 37 мин. Определить скорость каждого тела, если известно, что скорость первого в 4 раза больше скорости второго.
	5. Найти длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.
	6. Бассейн может наполниться водой из двух кранов. Если первый кран открыть на 10 мин., а второй – на 20 мин., то бассейн будет наполнен. Если первый кран открыть на 5 мин., а второй – на 15 мин., то заполнится 3/5 бассейна. За какое время из каждого крана в отдельности может заполниться весь бассейн?
	7. Двум рабочим была поручена работа. Второй приступил к работе на час позже первого. Через 3 ч. после того, как первый приступил к работе, им осталось выполнить 9/20 всей работы. По окончанию работы оказалось, что каждый выполнил половину всей работы. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить свою работу?
	8. Двое рабочих вытачивают вместе 136 деталей за 8 часов. Если бы первый делал на две детали в час меньше, а второй на 1 деталь больше, то на изготовление одной детали второй рабочий затратил бы на 4 минуты меньше, чем первый. Сколько деталей в час изготавливается первый рабочий?
	9. В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и сосуд долили водой. Затем снова отлили столько же и опять залили водой. Сколько жидкости отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25% раствор кислоты?
	10. Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?
	11. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько стали того и другого сорта надо взять, чтобы после переплавки получить 140 тонн стал и с содержанием никеля 30%?
	12. Из 22 кг свежих грибов получается 2,5 кг сухих грибов. Содержащих 12% воды. Какой процент воды в свежих грибах?
	13. Два завода по плану должны были выпустить за месяц 360 станков. Первый завод выполнил план на 112%, а второй – на 110%, вместе заводы выполнили за месяц 400 станков. Сколько станков сверх плана выпустил каждый завод в отдельности?
	14. Цену товара сперва снизили на 20%, за­тем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение ее на 10%. Па сколько процентов всего снизили первоначаль­ную цену товара?

**Литература**

1. Обучение решению задач как средство развития учащихся: из опыта работы. Методическое пособие для учителя. – Киров, ИИУ. – 1999. – С.3-18.
2. Тоом А.Л. Между детством и математикой: Текстовые задачи в математическом образовании/ Математика, 2005, № 14
3. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научится решать задачи: Кн для учащихся ст. классов сред.шк. – 3-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.: ил.
4. Шевкин А.В. Материалы курса «Текстовые задачи в школьном курсе математики»: Лекции 1-4. – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2006. 88 с.
5. Шевкин А.В. Материалы курса «Текстовые задачи в школьном курсе математики»: Лекции 5-8. – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2006. 80 с.
6. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа.-М.:Просвещение, 1990.-416.