Государственное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования (повышения квалификации) специалистов Московской области Педагогическая академия последипломного образования

(ГОУ ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ)

проект

Разработка методических рекомендаций обучения учащихся решению заданий с кратким ответом

Выполнила

Иванова Ольга Владимировна

Учитель математики МОУ СОШ №3

г. Тучково

руководитель

к.п.н., доцент

Васильева М.В.

Тучково

2011 г.

Содержание:

I. Введение

II. Методические рекомендации

1. Методические рекомендации обучения учащихся решению заданий В8

2. Методические рекомендации обучения учащихся решению заданий В11

3. Методические рекомендации обучения учащихся решению заданий В3

III. Заключение

IV. Список литературы

Единый государственный экзамен представляет собой форму объективной оценки качества подготовки лиц, освоивших образовательные программы основного общего и среднего (полного) общего образования, с использованием заданий стандартизированной формы (контрольных измерительных материалов).

Основная подготовка выпускников к ЕГЭ по математике, осуществляется не только в течение всего учебного года в старшей школе, но и гораздо раньше, начиная с 7-9 классов. *Исключительно важным становится целенаправленная и специально планируемая подготовка школьников к ЕГЭ*.

Основная цель ЕГЭ - обеспечить равные условия при поступлении в ВУЗы и устранить субъективность в оценке знаний выпускников школ. При проведении ЕГЭ по всей России применяются однотипные задания и единая шкала отметки (хотя в конструировании КИМ используются разнотипные задания). Результаты ЕГЭ учитываются сразу как оцениваемый факт завершения обучения в школе, так и при поступлении в ВУЗ

В профессиональном сообществе с начала эксперимента по введению ЕГЭ года велось обсуждение вопросов, связанных с качеством и направлениями развития математического образования в России и с их отражением в содержании ЕГЭ по математике. Одним из итогов этого обсуждения стало существенное изменение экзаменационной модели ЕГЭ по математике 2010 года.

**Контрольные измерительные материалы единого государственного экзамена по математике в 2010 году соответствуют целям ЕГЭ:**

* подтверждение наличия у выпускника базовых математических компетенций (т.е. получение участником экзамена не менее минимального количества баллов ЕГЭ);
* ранжирование выпускников при поступлении в образовательные учреждения среднего специального или высшего профессионального образования.

Создан Открытый банк математических задач, обеспечивающую цель поддержки работы учителя и самостоятельной работы учащихся по подготовке к сдаче экзамена на базовом уровне.

Экзаменационный вариант состоит из двух частей.

В первую часть экзаменационной работы включены 12 заданий с кратким ответом базового уровня сложности, проверяющие базовые вычислительные и логические умения и навыки, навыки аналитических преобразований, умения анализировать информацию, представленную в текстах, графиках и таблицах, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях.

В данной работе рассматриваются методические рекомендации к заданиям именно из первой части ЕГЭ.

Кодификатор элементов содержания по математике составлен на основе Обязательного минимума содержания основных образовательных программ и Требований к уровню подготовки выпускников средней (полной) школы (Приказ МО РФ «Об утверждении федерального компонента Государственных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования от 05.03.2004 №1089).

**Рекомендации по совершенствованию методики преподавания математики с учетом результатов ЕГЭ и диагностических работ 2010 года**

Результаты экзамена выявили ряд нерешенных проблем, характерных для подготовки различных категорий выпускников. О некоторых направлениях совершенствования обучения математике говорилось в методических письмах прошлых лет:

• ориентация на прочное усвоение базовых требований к математической подготовке;

• дифференциация обучения, разработка стратегии обучения и подготовки к выпускному экзамену с учетом уже имеющегося у выпускника уровня образовательной подготовки.

Контрольные измерительные материалы ЕГЭ 2010 года ориентируют и учителя, и учащихся на полноценное изучение курсов алгебры и начал анализа и геометрии по учебникам из Федерального перечня. Первоочередная задача изучения курса математики – это качественное изучение предмета на базовом уровне.

Задачи В1–В12 представлены заданиями, покрывающими все требования Федерального компонента образовательного стандарта, содержат все основные типы заданий базового уровня, представленные в школьном курсе математики. При этом, задания открытого банка содержат как задания, аналогичные экзаменационным (отличающиеся числовыми параметрами), кроме того, на каждой позиции представлены задания и попроще, и посложнее реальных.

Таким образом, подготовка не сводится к «натаскиванию» выпускника на выполнение определенного типа задач, содержащихся в демонстрационной версии экзамена. Подготовка к экзамену означает изучение программного материала с включением заданий в формах, используемых при итоговой аттестации. Одновременно надо постоянно выявлять проблемы и повышать уровень каждого учащегося в следующих областях (хорошо известных каждому учителю): арифметические действия и культура вычислений, алгебраические преобразования и действия с основными функциями, понимание условия задачи, решение практических задач, самопроверка.

КИМ ЕГЭ по математике 2010 года приближены к традиционным выпускным и вступительным экзаменам по математике, поэтому традиционное систематическое итоговое повторение, проведение традиционных письменных работ (самостоятельные и контрольные работы, зачеты), где ученик предъявляет не только ответы, но и решения заданий, становится важным как для учащихся, изучающих предмет на базовом уровне, так и для учащихся, изучающих предмет на профильном (или углубленном) уровне.

***Цель проекта***: разработка методических рекомендаций обучения учащихся решению заданий с кратким ответом.

***Задачи проекта***:

1. Выявить состояние подготовки учащихся к решению данных задач.
2. Отбор методических материалов для обучения моей темы.

Для решения этих задач мною использовались следующие методы исследования:

1. Анализ литературы по данной теме
2. Наблюдение за ходом учебного процесса
3. Анализ экзаменационных материалов.

**Методические рекомендации к решению заданий В8**

В задаче B8 дается график функции или производной, по которому требуется определить одну из следующих величин:

1. Значение производной в некоторой точке x0,
2. Точки максимума или минимума (точки экстремума),
3. Интервалы возрастания и убывания функции (интервалы монотонности).

Функции и производные, представленные в этой задаче, всегда непрерывны, что значительно упрощает решение. Не смотря на то, что задача относится к разделу математического анализа, она вполне по силам даже самым слабым ученикам, поскольку никаких глубоких теоретических познаний здесь не требуется.

Для нахождения значения производной, точек экстремума и интервалов монотонности существуют простые и универсальные алгоритмы — все они будут рассмотрены ниже.

Ученику следует рекомендовать внимательно читайть условие задачи B8, чтобы не допускать глупых ошибок: иногда попадаются довольно объемные тексты, но важных условий, которые влияют на ход решения, там немного.

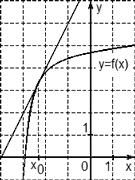
***Вычисление значения производной. Метод двух точек***

Если в задаче дан график функции f (x), касательная к этому графику в некоторой точке x0, и требуется найти значение производной в этой точке, применяется следующий алгоритм:

1. Найти на графике касательной две «адекватные» точки: их координаты должны быть целочисленными. Обозначим эти точки A (x1; y1) и B (x2; y2). Правильно выписывайте координаты — это ключевой момент решения, и любая ошибка здесь приводит к неправильному ответу.
2. Зная координаты, легко вычислить приращение аргумента Δx = x2 − x1 и приращение функции Δy = y2 − y1.
3. Наконец, находим значение производной D = Δy/Δx. Иными словами, надо разделить приращение функции на приращение аргумента — и это будет ответ.

Хочется отметить точки A и B надо искать именно на касательной, а не на графике функции f(x), как это часто случается. Касательная обязательно будет содержать хотя бы две таких точки — иначе задача составлена некорректно.

* *Задача1*. На рисунке изображен график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x0.

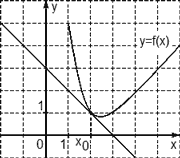


*Решение*. Рассмотрим точки A (−3; 2) и B (−1; 6) и найдем приращения:  
Δx = x2 − x1 = −1 − (−3) = 2; Δy = y2 − y1 = 6 − 2 = 4.

Найдем значение производной: D = Δy/Δx = 4/2 = 2.

*Ответ*: 2

* *Задача2*. На рисунке изображен график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x0.

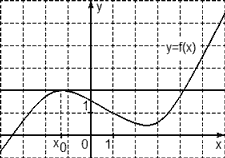


*Решение*. Рассмотрим точки A (0; 3) и B (3; 0), найдем приращения:  
Δx = x2 − x1 = 3 − 0 = 3; Δy = y2 − y1 = 0 − 3 = −3.

Теперь находим значение производной: D = Δy/Δx = −3/3 = −1.

*Ответ*: −1

* *Задача3*. На рисунке изображен график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x0.



*Решение*. Рассмотрим точки A (0; 2) и B (5; 2) и найдем приращения:  
Δx = x2 − x1 = 5 − 0 = 5; Δy = y2 − y1 = 2 − 2 = 0.

Осталось найти значение производной: D = Δy/Δx = 0/5 = 0.

*Ответ*: 0

Из последнего примера можно сформулировать правило: если касательная параллельна оси OX, производная функции в точке касания равна нулю. В этом случае даже не надо ничего считать — достаточно взглянуть на график.

***Вычисление точек максимума и минимума***

Иногда вместо графика функции в задаче B8 дается график производной и требуется найти точку максимума или минимума функции. В этом случае двух точек бесполезен, но существует другой, еще более простой алгоритм. Для начала определимся с терминологией:

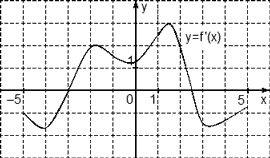
1. Точка x0 называется *точкой максимума* функции f(x), если в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство: f(x0) ≥ f(x).
2. Точка x0 называется *точкой минимума* функции f(x), если в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство: f(x0) ≤ f(x).

Для того чтобы найти точки максимума и минимума по графику производной, достаточно выполнить следующие шаги:

1. Перечертить график производной, убрав всю лишнюю информацию. Как показывает практика, лишние данные только мешают решению. Поэтому отмечаем на координатной оси нули производной — и все.
2. Выяснить знаки производной на промежутках между нулями. Если для некоторой точки x0 известно, что f’(x0) ≠ 0, то возможны лишь два варианта: f’(x0) ≥ 0 или f’(x0) ≤ 0. Знак производной легко определить по исходному чертежу: если график производной лежит выше оси OX, значит f’(x) ≥ 0. И наоборот, если график производной проходит под осью OX, то f’(x) ≤ 0.
3. Снова проверяем нули и знаки производной. Там, где знак меняется с минуса на плюс, находится точка минимума. И наоборот, если знак производной меняется с плюса на минус, это точка максимума. Отсчет всегда ведется слева направо.

Эта схема работает только для непрерывных функций — других в задаче B8 не встречается.

* *Задача1*. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на отрезке [−5; 5]. Найдите точку минимума функции f(x) на этом отрезке.



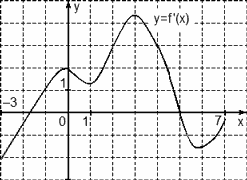
*Решение*. Избавимся от лишней информации — оставим только границы [−5; 5] и нули производной x = −3 и x = 2,5. Также отметим знаки:

Нахождение точки минимума по графику производной - без лишней информации

Очевидно, в точке x = −3 знак производной меняется с минуса на плюс. Это и есть точка минимума.

*Ответ*: −3

* *Задача2*. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на отрезке [−3; 7]. Найдите точку максимума функции f(x) на этом отрезке.



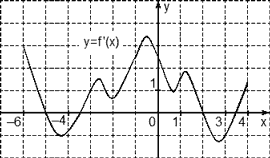
*Решение*. Перечертим график, оставив на координатной оси только границы [−3; 7] и нули производной x = −1,7 и x = 5. Отметим на полученном графике знаки производной. Имеем:

Нахождение точки максимума по графику производной - без лишней информации

Очевидно, в точке x = 5 знак производной меняется с плюса на минус — это точка максимума.

*Ответ*: 5

* *Задача3*. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на отрезке [−6; 4]. Найдите количество точек максимума функции f(x), принадлежащих отрезку [−4; 3].



*Решение*. Из условия задачи следует, что достаточно рассмотреть только часть графика, ограниченную отрезком [−4; 3]. Поэтому строим новый график, на котором отмечаем только границы [−4; 3] и нули производной внутри него. А именно, точки x = −3,5 и x = 2. Получаем:

Подсчет точек максимума на графике производной - без лишней информации

На этом графике есть лишь одна точка максимума x = 2. Именно в ней знак производной меняется с плюса на минус.

*Ответ*: 1

Небольшое замечание по поводу точек с нецелочисленными координатами. Например, в последней задаче была рассмотрена точка x = −3,5, но с тем же успехом можно взять x = −3,4. Если задача составлена корректно, такие изменения не должны влиять на ответ, поскольку точки «без определенного места жительства» не принимают непосредственного участия в решении задачи. Разумеется, с целочисленными точками такой фокус не пройдет.

***Нахождение интервалов возрастания и убывания функции***

В такой задаче, подобно точкам максимума и минимума, предлагается по графику производной отыскать области, в которых сама функция возрастает или убывает. Для начала определим, что такое возрастание и убывание:

1. Функция f(x) называется *возрастающей на отрезке* [a; b] если для любых двух точек x1 и x2 из этого отрезка верно утверждение: x1 ≤ x2 ⇒ f(x1) ≤ f(x2). Другими словами, чем больше значение аргумента, тем больше значение функции.
2. Функция f(x) называется *убывающей на отрезке* [a; b] если для любых двух точек x1 и x2 из этого отрезка верно утверждение: x1 ≤ x2 ⇒ f(x1) ≥ f(x2). Т.е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

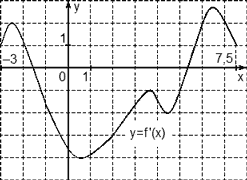
Сформулируем достаточные условия возрастания и убывания:

1. Для того чтобы непрерывная функция f(x) возрастала на отрезке [a; b], достаточно, чтобы ее производная внутри отрезка была положительна, т.е. f’(x) ≥ 0.
2. Для того чтобы непрерывная функция f(x) убывала на отрезке [a; b], достаточно, чтобы ее производная внутри отрезка была отрицательна, т.е. f’(x) ≤ 0.

Примем эти утверждения без доказательств. Таким образом, получаем схему для нахождения интервалов возрастания и убывания, которая во многом похожа на алгоритм вычисления точек экстремума:

1. Убрать всю лишнюю информацию. На исходном графике производной нас интересуют в первую очередь нули функции, поэтому оставим только их.
2. Отметить знаки производной на интервалах между нулями. Там, где f’(x) ≥ 0, функция возрастает, а где f’(x) ≤ 0 — убывает. Если в задаче установлены ограничения на переменную x, дополнительно отмечаем их на новом графике.
3. Теперь, когда нам известно поведение функции и ограничения, остается вычислить требуемую в задаче величину.

* *Задача1*. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на отрезке [−3; 7,5]. Найдите промежутки убывания функции f(x). В ответе укажите сумму целых чисел, входящих в эти промежутки.



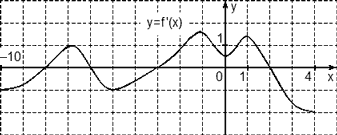
*Решение*. Как обычно, перечертим график и отметим границы [−3; 7,5], а также нули производной x = −1,5 и x = 5,3. Затем отметим знаки производной. Имеем:

Нахождение интервалов убывания функции - без лишней информации

Поскольку на интервале (− 1,5) производная отрицательна, это и есть интервал убывания функции. Осталось просуммировать все целые числа, которые находятся внутри этого интервала:  
−1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 14.

*Ответ*: 14

* *Задача2*. На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на отрезке [−10; 4]. Найдите промежутки возрастания функции f(x). В ответе укажите длину наибольшего из них.



*Решение*. Избавимся от лишней информации. Оставим только границы [−10; 4] и нули производной, которых в этот раз оказалось четыре: x = −8, x = −6, x = −3 и x = 2. Отметим знаки производной и получим следующую картинку:

Нахождение интервалов возрастания функции - без лишней информации

Нас интересуют промежутки возрастания функции, т.е. такие, где f’(x) ≥ 0. На графике таких промежутков два: (−8; −6) и (−3; 2). Вычислим их длины:  
l1 = − 6 − (−8) = 2;  
l2 = 2 − (−3) = 5.

Поскольку требуется найти длину наибольшего из интервалов, в ответ записываем значение l2 = 5.

*Ответ*: 5

**Методические рекомендации к решению заданий В11**

В задаче B11 предлагается исследовать на экстремумы функцию, заданную формулой. Это стандартная задача по математическому анализу, и ее сложность сильно меняется зависимости от рассматриваемой функции: некоторые из них решаются буквально устно, другие же требуют серьезных размышлений.

Прежде чем изучать методы решения, надо усвоить некоторые определения из области математического анализа. Итак, в задаче B11 требуется найти с помощью производной следующие величины:

1. *Точки локального максимума* (минимума) — значение переменной, при которой функция достигает своей наибольшей (наименьшей) величины. Такие точки еще называются точками экстремума.
2. *Глобальный максимум* (минимум) функции — наибольшее (наименьшее) значение функции при указанных ограничениях. Другое название — глобальные экстремумы.

При этом глобальные экстремумы обычно ищутся не на всей области определения функции, а лишь на некотором отрезке [a; b]. Важно понимать, что глобальный экстремум и значение функции в точке экстремума далеко не всегда совпадают. Поясним это на конкретном примере:

*Задача*. Найти точку минимума и минимальное значение функции y = 2x3 − 3x2 − 12x + 1 на отрезке [−3; 3].

*Решение*. Сначала найдем точку минимума, для чего вычислим производную:  
y’ = (2x3 − 3x2 − 12x + 1)’ = 6x2 − 6x − 12.

Найдем критические точки, решив уравнение y’ = 0. Получим стандартное квадратное уравнение:  
y’ = 0 ⇒ 6x2 − 6x − 12 = 0 ⇒ ... ⇒ x1 = −1, x2 = 2.

Отметим эти точки на координатной прямой, добавим знаки производной и ограничения — концы отрезка:

Стандартное решение задачи B11

Масштаб картинки не имеет значения. Самое главное — отметить точки в правильной последовательности. Из школьного курса математики известно, что в точке минимума производная меняет знак с минуса на плюс. Отсчет всегда идет слева направо — в направлении положительной полуоси. Поэтому точка минимума одна: x = 2.

Теперь найдем минимальное значение функции на отрезке [−3; 3]. Оно достигается либо в точке минимума (тогда она становится точкой глобального минимума), либо на конце отрезка. Заметим, что на интервале (2; 3) производная всюду положительна, а значит y(3) > y(2), поэтому правый конец отрезка можно не рассматривать. Остались лишь точки x = −3 (левый конец отрезка) и x = 2(точка минимума).

Имеем:  
y(−3)=2(−3)3 − 3(−3)2 − 12(−3) + 1 = −44;  
y(2) = 2\*23 − 3\*22 − 12\*2 + 1 = −19.

Итак, наименьшее значение функции достигается на конце отрезка и равно −44.

*Ответ*: xmin = 2; ymin = −44

Из приведенных рассуждений следует важный факт, о котором многие забывают. Функция принимает максимальное (минимальное) значение не обязательно в точке экстремума. Иногда такое значение достигается на конце отрезка, и производная там не обязана равняться нулю.

***Схема решения задач B11***

Если в задаче B11 требуется найти максимальное или минимальное значениефункции f(x) на отрезке [a; b], выполняем следующие действия:

1. Найти производную функции: f’(x).
2. Решить уравнение f’(x) = 0. Если корней нет, пропускаем третий шаг и переходим сразу к четвертому.
3. Из полученного набора корней вычеркнуть все, что лежит за пределами отрезка [a; b]. Оставшиеся числа обозначим x1, x2, ..., xn — их, как правило, будет немного.
4. Подставим концы отрезка [a; b] и точки x1, x2, ..., xn в исходную функцию. Получим набор чисел f(a), f(b), f(x1), f(x2), ..., f(xn), из которого выбираем наибольше или наименьшее значение — это и будет ответ.

Небольшое пояснение по поводу вычеркивания корней, когда они совпадают с концами отрезка. Их тоже можно вычеркнуть, поскольку на четвертом шаге концы отрезка все равно подставляются в функцию — даже если уравнение f’(x) = 0 не имело решений.

Также следует внимательно читать условие задачи. Когда требуется найти значение функции (максимальное или минимальное), концы отрезка и точки x1, x2, ..., xn подставляются именно в функцию, а не в ее производную.

*Задача1*. Найти наибольшее значение функции y = x3 + 3x2 − 9x − 7 на отрезке [−5; 0].

*Решение*. Для начала найдем производную: y’ = (x3 + 3x2 − 9x − 7)’ = 3x2 + 6x − 9.

Затем решаем уравнение: y’ = 0 ⇒ 3x2 + 6x − 9 = 0 ⇒ ... ⇒ x = −3; x = 1.

Вычеркиваем корень x = 1, потому что он не принадлежит отрезку [−5; 0].

Осталось вычислить значение функции на концах отрезка и в точке x = −3:  
y(−5) = (−5)3 + 4·(−5)2 − 9·(−5) − 7 = −12;  
y(−3) = (−3)3 + 4·(−3)2 − 9·(−3) − 7 = 20;  
y(0) = 03 + 4·02 − 9·0 − 7 = −7.

Очевидно, наибольшее значение равно 20 — оно достигается в точке x = −3.

*Ответ*: 20

Теперь рассмотрим случай, когда требуется найти точку максимума или минимума функции f(x) на отрезке [a; b]. Если отрезок не задан, функция рассматривается на своей области определения. В любом случае, схема решения такова:

1. Найти производную функции: f’(x).
2. Решить уравнение f’(x) = 0. Если производная — дробно-рациональная функция, дополнительно выясняем, когда ее знаменатель равен нулю. Полученные корни обозначим x1, x2, ..., xn.
3. Отметить x1, x2, ..., xn на координатной прямой и расставить знаки, которые принимает производная между этими числами. Если задан отрезок [a; b], отмечаем его и вычеркиваем все, что лежит за его пределами.
4. Среди оставшихся точек ищем такую, где знак производной меняется с минуса на плюс (это точка минимума) или с плюса на минус (точка минимума). Такая точка должна быть только одна — это и будет ответ.

Можно заметить. что для некоторых функций этот алгоритм не работает. Действительно, существует целый класс функций, для которых нахождение точек экстремума требует более сложных выкладок. Однако такие функции в ЕГЭ по математике не встречаются.

Необходимо внимательно отнеситесь к расстановке знаков между точками x1, x2, ..., xn. Помните: при переходе через корень четной кратности знак у производной не меняется. Когда ищутся точки экстремума, знаки всегда просматриваются слева направо, т.е. по направлению числовой оси.

*Задача2*. Найти точку максимума функции

Найти точку максимума

на отрезке [−8; 8].

*Решение*. Найдем производную:

Производная дробно-рациональной функции

Поскольку это дробно-рациональная функция, приравниваем к нулю производную и ее знаменатель:  
y’ = 0 ⇒x2 − 25 = 0 ⇒... ⇒x = 5;x = −5;  
x2 = 0 ⇒ x = 0 (корень второй кратности).

Отметим точки x = −5, x = 0 и x = 5 на координатной прямой, расставим знаки и границы:

Еще одно решение задачи B11

Очевидно, что внутри отрезка осталась лишь одна точка x = −5, в которой знак производной меняется с плюса на минус. Это и есть точка максимума.

*Ответ*: −5

Еще раз поясним, чем отличаются точки экстремума от самих экстремумов. Точки экстремума — это значения переменных, при которых функция принимает наибольшее или наименьшее значение. Экстремумы — это значения самих функций, максимальные или минимальные в некоторой своей окрестности.

Помимо обычных многочленов и дробно-рациональных функций, в задаче B11 встречаются следующие виды выражений:

1. Иррациональные функции,
2. Тригонометрические функции,
3. Показательные функции,
4. Логарифмические функции.

С иррациональными функциями проблем, как правило, не возникает. Остальные случаи стоит рассмотреть более подробно.

***Тригонометрические функции***

Основная сложность тригонометрических функций состоит в том, что при решении уравнений возникает бесконечное множество корней. Например, уравнение sin x = 0 имеет корни x = πn, где n ∈ Z. Ну и как отмечать их на координатной прямой, если таких чисел бесконечно много?

Ответ прост: надо подставлять конкретные значения n. Ведь в задачах B11 с тригонометрическими функциями всегда есть ограничение — отрезок [a; b]. Поэтому для начала берем n = 0, а затем увеличиваем n до тех пор, пока соответствующий корень не «вылетит» за пределы отрезка [a; b]. Аналогично, уменьшая n, очень скоро получим корень, который меньше нижней границы.

Несложно показать, что никаких корней, кроме полученных в рассмотренном процессе, на отрезке [a; b] не существует. Рассмотрим теперь этот процесс на конкретных примерах.

*Задача1*. Найти точку максимума функции y = sin x − 5x·sin x − 5cos x + 1, принадлежащую отрезку [−π/3; π/3].

*Решение*. Вычисляем производную: y’ = (sin x − 5x·sin x − 5cos x + 1)’ = ... = cos x − 5x·cos x = (1 − 5x)·cos x.

Затем решаем уравнение: y’ = 0 ⇒ (1 − 5x)·cos x = 0 ⇒ ... ⇒ x = 0,2 или x = π/2 + πn, n ∈ Z.

С корнем x = 0,2 все понятно, а вот формула x = π/2 + πn требует дополнительной обработки. Будем подставлять разные значения n, начиная с n =  0.

n = 0 ⇒ x = π/2. Но π/2 > π/3, поэтому корень x = π/2 не входит в исходный отрезок. Кроме того, чем больше n, тем больше x, поэтому нет смысла рассматривать n > 0.

n = −1 ⇒ x = − π/2. Но −π/2 < −π/3 — этот корень тоже придется отбросить. А вместе с ним — и все корни для n < −1.

Получается, что на отрезке  [−π/3; π/3] лежит только корень x = 0,2. Отметим его вместе со знаками и границами на координатной прямой:

Задача B11 с тригонометрической функцией

Чтобы удостовериться, что справа от x = 0,2 производная действительно отрицательна, достаточно подставить в y’ значение x = π/4. Мы же просто отметим, что в точке x = 0,2 производная меняет знак с плюса на минус, а следовательно это точка максимума.

*Ответ*: 0,2

*Задача2*. Найти наибольшее значение функции y = 4tg x − 4x + π − 5 на отрезке [−π/4; π/4].

*Решение*. Вычисляем производную: y’ = (4tg x − 4x + π − 5)’ = 4/cos 2x − 4.

Затем решаем уравнение: y’ = 0 ⇒ 4/cos 2x − 4 = 0 ⇒ ... ⇒ x = πn, n ∈ Z.

Выделим из этой формулы корни, подставляя конкретные n, начиная с n = 0:  
n = 0 ⇒x = 0. Этот корень нам подходит.  
n = 1 ⇒ x = π. Но π > π/4, поэтому корень x = π и значения n > 1 надо вычеркнуть.  
n = −1 ⇒ x = −π. Но π < −π/4, поэтому x = π и n < −1 тоже вычеркиваем.

Из всего многообразия корней остался лишь один: x = 0. Поэтому вычисляем значение функции для x = 0,x = π/4и x = −π/4.  
y(0) =4tg 0 − 4·0 + π − 5 =π − 5;y(π/4) =4tg (π/4) − 4·π/4 + π − 5 =1;  
y(π/4) = 4tg (−π/4) − 4·(−π/4) + π − 5 = ... = 2π − 9.

Теперь заметим, что π = 3,14... < 4, поэтому π − 5 < 4 − 5 < 0 и 2π − 9 < 8 − 9 < 0. Получается одно положительное число и два отрицательных. Мы ищем наибольшее — очевидно, это y = 1.

*Ответ*: 1

Заметим, что в последней задаче можно было и не сравнивать числа между собой. Ведь из чисел π − 5, 1 и 2π − 9 в бланк ответов может быть записана лишь единица. Действительно, как написать в бланке, скажем, число π? А никак. Это важная особенность первой части ЕГЭ по математике, которая значительно упрощает решение многих задач. И работает она не только в B11.

Иногда при исследовании функции возникают уравнения, у которых нет корней. В таком случае задача становится еще проще, поскольку остается рассмотреть лишь концы отрезка.

*Задача3*. Найти наименьшее значение функции y = 7sin x − 8x + 5 на отрезке [−3π/2; 0].

*Решение*. Сначала находим производную: y’ = (7sin x − 8x + 5)’ = 7cos x − 8.

Попробуем решить уравнение: y’ = 0 ⇒ 7cos x − 8 = 0 ⇒ cos x = 8/7. Но значения cos x всегда лежат на отрезке [−1; 1], а 8/7 > 1. Поэтому корней нет.

Если корней нет, то и вычеркивать ничего не надо. Переходим к последнему шагу — вычисляем значение функции:  
y(−3π/2) = 7sin (−3π/2) − 8·(−3π/2) + 5 = ... = 12π + 12;  
y(0) = 7sin 0 − 8·0 + 5 = 5.

Поскольку число 12π + 12 в бланк ответов не записать, остается лишь y = 5.

*Ответ*: 5

***Показательные функции***

Вообще говоря, показательная функция — это выражение вида y = ax, где a > 0. Но в задаче B11 встречаются только функции вида y = ex и, в крайнем случае, y = ekx + b. Причина в том, что производные этих функций считаются очень легко:

1. (ex)" = ex. Ничего не изменилось.
2. (ekx +b)" = k·ekx + b.

Просто добавляется множитель, равный коэффициенту при переменной x. Это частный случай производной сложной функции.

Все остальное абсолютно стандартно. Разумеется, настоящие функции в задачах B11 выглядят более сурово, но схема решения от этого не меняется. Рассмотрим пару примеров, выделяя лишь основные моменты решения — без основательных рассуждений и комментариев.

*Задача1*. Найти наименьшее значение функции y = (x2 − 5x + 5)ex − 3 на отрезке [−1; 5].

*Решение*. Производная: y’ = ((x2 − 5x + 5)ex − 3)’ = ... = (x2 − 3x)ex − 3 = x(x − 3)ex − 3.

Находим корни: y’ = 0 ⇒ x(x − 3)ex − 3 = 0 ⇒ ... ⇒ x = 0; x = 3.

Оба корня лежат на отрезке [−1; 5]. Осталось найти значение функции во всех точках:  
y(−1) = ((−1)2 − 5·(−1) + 5)e− 1 − 3 = ... = 11·e−4;  
y(0) = (02 − 5·0 + 5)e0 − 3 = ... = 5·e−3;  
y(3) = (32 − 5·3 + 5)e3 − 3 = ... = −1;  
y(5) = (52 − 5·5 + 5)e5 − 3 = ... = 5·e2.

Из четырех полученных чисел в бланк можно записать лишь y = −1. К тому же, это единственное отрицательное число — оно и будет наименьшим.

*Ответ*: −1

*Задача2*. Найти наибольшее значение функции y = (2x − 7)·e8 − 2x на отрезке [0; 6].

*Решение*. Производная: y’ = ((2x − 7)·e8 − 2x)’ = ... = (16 − 4x)·e8 − 2x = 4(4 − x)·e8 − 2x.

Находим корни: y’ = 0 ⇒ 4(4 − x)·e8 − 2x = 0 ⇒ x = 4.

Корень x = 4 принадлежит отрезку [0; 6]. Ищем значения функции:  
y(0) = (2·0 − 7)e8 − 2·0 = ... = −7·e8;  
y(4) = (2·4 − 7)e8 − 2·4 = ... = 1;  
y(6) = (2·6 − 7)e8 − 2·6 = ... = 5·e−4.

Очевидно в качестве ответа может выступать лишь y = 1.

*Ответ*: 1

***Логарифмические функции***

По аналогии с показательными функциями, в задаче B11 встречаются только натуральные логарифмы, поскольку их производная легко считается:

1. (ln x)’ = 1/x;
2. (ln(kx + b))’ = k/(kx + b). В частности, если b = 0, то (ln(kx))’ = 1/x.

Таким образом, производная всегда будет дробно-рациональной функцией. Остается лишь приравнять эту производную и ее знаменатель к нулю, а затем решить полученные уравнения.

Для поиска максимального или минимального значения логарифмической функции помните: натуральный логарифм обращается в «нормальное» число только в точках вида en. Например, ln 1 = ln e0 = 0 — это логарифмический ноль, и чаще всего решение сводится именно к нему. В остальных случаях «убрать» знак логарифма невозможно.

*Задача1*. Найти наименьшее значение функции y = x2 − 3x + ln x на отрезке [0,5; 5].

*Решение*. Считаем производную:

Производная логарифмической функции

Находим нули производной и ее знаменателя:  
y’ = 0 ⇒ 2x2 − 3x + 1 = 0 ⇒ ... ⇒ x = 0,5; x = 1;  
x = 0 — тут решать нечего.

Из трех чисел x = 0, x = 0,5 и x = 1 внутри отрезка [0,5; 5] лежит только x = 1, а число x = 0,5 является его концом. Имеем:  
y(0,5) = 0,52 − 3·0,5 + ln 0,5 = ln 0,5 − 1,25;  
y(1) = 12 − 3·1 + ln 1 = −2;  
y(5) = 52 − 3·5 + ln 5 = 10 + ln 5.

Из полученных трех значений лишь y = −2 не содержит знака логарифма — это и будет ответ.

*Ответ*: −2

*Задача2*. Найти наибольшее значение функции y = ln(6x) − 6x + 4 на отрезке [0,1; 3].

*Решение*. Вычисляем производную:

Производная сложной логарифмической функции

Выясняем, когда производная или ее знаменатель равны нулю:  
y’ = 0 ⇒ 1 − 6x = 0 ⇒ x = 1/6;  
x = 0 — уже решено.

Вычеркиваем число x = 0, поскольку оно лежит за пределами отрезка [0,1; 3]. Считаем значение функции на концах отрезка и в точке x = 1/6:  
y(0,1) = ln(6·0,1) − 6·0,1 + 4 = ln 0,6 + 3,4;  
y(1/6) = ln(6·1/6) − 6·1/6 + 4 = ln 1 + 3 = 3;  
y(3) = ln(6·3) − 6·3 + 4 = ln 18 − 14.

Очевидно, только y = 3 может выступать в качестве ответа — остальные значения содержат знак логарифма и не могут быть записаны в бланк ответов.

*Ответ*: 3

**Методические рекомендации к решению заданий В3**

Все задачи B3 сформулированы примерно одинаково: решить уравнение. При этом сами уравнения относятся к одному из трех видов:

1. Логарифмические,
2. Показательные,
3. Иррациональные.

В математике термин «решить уравнение» означает найти множество всех корней данного уравнения, либо доказать, что это множество пусто. Но в бланк ЕГЭ можно вписывать только числа — никаких множеств. Поэтому, если в задании B3 оказалось больше одного корня (или, наоборот, ни одного) — в решении была допущена ошибка.

***Логарифмические уравнения***

*Определение*. *Логарифмическое уравнение* — это любое уравнение, которое сводится к виду loga f(x) = k, где a > 0, a ≠ 1 — основание логарифма, f(x) — произвольная функция, k — некоторая постоянная.

Такое уравнение решается внесением постоянной k под знак логарифма: k = loga ak. Основание нового логарифма равно основанию исходного. Получим уравнение loga f(x) = loga ak, которое решается отбрасыванием логарифма.

Заметим, что по условию a > 0, поэтому f(x) = ak > 0, т.е. исходный логарифм существует.

*Задача*1. Решить уравнение: log7 (8 − x) = 2.

*Решение*. log7 (8 − x) = 2 ⇔ log7 (8 − x) = log7 72 ⇔ 8 − x = 49 ⇔ x = −41.

*Ответ*: −41

*Задача2*. Решить уравнение: log0,5 (6 − x) = −2.

*Решение*. log0,5 (6 − x) = −2 ⇔ log0,5 (6 − x) = log0,5 0,5−2 ⇔ 6 − x = 4 ⇔ x = 2.

*Ответ*: 2

Но что делать, если исходное уравнение окажется сложнее, чем стандартное loga f(x) = k? Тогда сводим его к стандартному, собирая все логарифмы в одной стороне, а числа — в другой.

Если в исходном уравнении присутствует более одного логарифма, придется искать область допустимых значений (ОДЗ) каждой функции, стоящей под логарифмом. Иначе могут появиться лишние корни.

*Задача3*. Решить уравнение: log5 (x + 1) + log5 (x + 5) = 1.

*Решение*. Поскольку в уравнении присутствуют два логарифма, найдем ОДЗ:

* 1. x + 1 > 0 ⇔ x > −1
  2. x + 5 > 0 ⇔ x > −5

Получаем, что ОДЗ — это интервал (−1, +∞). Теперь решаем уравнение:

log5 (x + 1) + log5 (x + 5) = 1 ⇒ log5 (x + 1)(x + 5) = 1 ⇔ log5 (x + 1)(x + 5) = log5 51 ⇔ (x + 1)(x + 5) = 5 ⇔ x2 + 6x + 5 = 5 ⇔ x (x + 6) = 0 ⇔ x1 = 0, x2 = −6.

Но x2 = −6 не подходит по ОДЗ. Остается корень x1 = 0.

*Ответ*: 0

***Показательные уравнения***

*Определение*. *Показательное уравнение* — это любое уравнение, которое сводится к виду af(x) = k, где a > 0, a ≠ 1 — основание степени, f(x) — произвольная функция, k — некоторая постоянная.

Это определение почти дословно повторяет определение логарифмического уравнения. Решаются показательные уравнения даже проще, чем логарифмические, ведь здесь не требуется, чтобы функция f(x) была положительна.

Для решения сделаем замену k = at, где t — вообще говоря, логарифм (t = loga k), но в ЕГЭ числа a и k будут подобраны так, что найти t будет легко. В полученном уравнении af(x) = at основания равны, а значит, равны и показатели, т.е. f(x) = t. Решение последнего уравнения, как правило, не вызывает проблем.

*Задача1*. Решить уравнение: 7x − 2 = 49.

*Решение*. 7x − 2 = 49 ⇔ 7x − 2 = 72 ⇔ x − 2 = 2 ⇔ x = 4.

*Ответ*: 4

*Задача2*. Решить уравнение: 616 − x = 1/36.

*Решение*. 616 − x = 1/36 ⇔ 616 − x = 6−2 ⇔ 16 − x = −2 ⇔ x = 18.

*Ответ*: 18

Немного о преобразовании показательных уравнений. Если исходное уравнение отличается от af(x) = k, применяем правила работы со степенями:

1. an · am = an + m,
2. an / am = an − m,
3. (an)m = an · m.

Кроме того, надо знать правила замены корней и дробей на степени с рациональным показателем:

Формула 1

Такие уравнения встречаются в ЕГЭ крайне редко, но без них разбор задачи B3 был бы неполным.

*Задача3*. Решить уравнение: (5/7)x − 2 · (7/5)2x − 1 = 125/343

*Решение*. Заметим, что:

* 1. (7/5)2x − 1 = ((5/7)−1)2x − 1 = (5/7)1 − 2x,
  2. 125/343 = (53)/(73) = (5/7)3.

Имеем: (5/7)x − 2 · (7/5)2x − 1 = 125/343 ⇔ (5/7)x − 2 · (5/7)1 − 2x = (5/7)3 ⇔ (5/7)x − 2 + 1 − 2x = (5/7)3 ⇔ (5/7)−x − 1 = (5/7)3 ⇔ −x − 1 = 3 ⇔ x = −4.

*Ответ*: −4

***Иррациональные уравнения***

Под иррациональным понимается любое уравнение, содержащее знак корня. Из всего многообразия иррациональных уравнений мы рассмотрим лишь простейший случай, когда уравнение имеет вид:

Формула 2

Чтобы решить такое уравнение, возведем обе стороны в квадрат. Получим уравнение f(x) = a2. При этом автоматически выполняется требование ОДЗ: f(x) ≥ 0, т.к. a2 ≥ 0. Остается решить несложное уравнение f(x) = a2.

*Задача1*. Решить уравнение:

Пример 1

*Решение*. Возводим обе стороны в квадрат и получим:

5x − 6 = 82 ⇔ 5x − 6 = 64 ⇔ 5x = 70 ⇔ x = 14.

*Ответ*: 14

*Задача2*. Решить уравнение:

Пример 2

*Решение*. Сначала, как и в прошлый раз, возводим обе стороны в квадрат. А затем внесем знак «минус» в числитель. Имеем:

Пример 3

Заметим, что при x = −4 под корнем будет положительное число, т.е. требование ОДЗ выполнено.

*Ответ*: −4

**Заключение**

При выполнении данной работы мною были отобраны и проанализированы различные дидактические материалы, литература, интернет ресурсы по данной теме. В результате которых, были составлены методические рекомендации к решению заданий с кратким ответом В8, В11, В3. Эта работа позволяет и учителю подготовить учащихся по данному вопросу, а ученику успешно справится с заданиями данной группы.

Хотелось бы отметить, что при проведении итоговой государственной аттестации выпускников 11 классов следует руководствоваться нормативными документами:

• Приказ МО и науки России от 28.11.2008г № 362 «Об утверждении Положения о формах и порядке проведения государственной (итоговой) аттестации обучающихся, освоивших основные общеобразовательные программы среднего (полного) образования» – ВО №2 2009г;

• Приказ МО и науки России от 30. 01.2009г № 16 «О внесении изменения в Положение о формах и порядке проведения государственной итоговой аттестации обучающихся, освоивших основные общеобразовательные программы среднего (полного) общего образования, утверждённое приказом МО и науки РФ от 28.11.2008г № 362, об утверждении образца Справки об обучении в ОУ, реализующем ООП ООО или среднего (полного) образования» - ВО № 8 2009г;

• Приказ МО России от 24.02.2009г № 57 «Об утверждении Порядка проведения ЕГЭ» - ВО № 8 2009г;

• Анализ результатов ЕГЭ по математике в РК в 2009г (http// www. ipk.karelia.ru).

Методика преподавания школьного курса математики и подготовка к ЕГЭ должна быть ориентирована на гармонизацию традиционного и инновационного подходов к обучению с применением современных образовательных технологий, деятельностного подхода в обучении, использования ресурсов сети Интернет.

При подготовке к ЕГЭ необходимо использовать интернет-ресурсы

* На сайте [www.mioo.ru](http://www.mioo.ru) (дистанционные уроки)
* На сайте www.matheg.ru (открытый банк заданий I части)

А так же печатные издания

* Учебники, имеющие гриф Министерства Образования РФ;
* Пособия, рекомендованные ФИПИ и МИОО для подготовки к ЕГЭ

**Литература:**

При разработке дидактических материалов использованы ресурсы сети Интернет:

http://www.korolewa-ow.narod.ru/sist\_ind.htm

http://www.mathnet.spb.ru/texts.htm

http://www.beluo.ru/

Материалы сайта ФИПИ (<http://www.fipi.ru>)

КоролеваТ.С., СорокинаЛ.В., Новикова Т.В., ЗеленоваЕ.В. Как успешно подготовиться к ЕГЭ по математике. Департамент образования г. Москвы Центральное окружное управление образования ОМЦ.