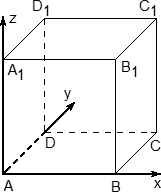
# Введение системы координат

Метод координат — это, конечно, очень хорошо, но в настоящих задачах C2 никаких координат и векторов нет. Поэтому их придется вводить. Да-да, вот так взять и ввести: указать начало отсчета, единичный отрезок и направление осей x, y и z.

Самое замечательное свойство этого метода заключается в том, что не имеет никакого значения, как именно вводить систему координат. Если все вычисления будут правильными, то и ответ будет правильным.

Тем не менее, приведу некоторые рекомендации, как лучше ввести систему координат для самых часто встречающихся в задаче C2 многогранников. С указанием конкретных точек. Во всех случаях упор делается на минимизацию объема вычислений.

## Координаты куба



Если в задаче C2 будет куб — считайте, что вам повезло. Это самый простой многогранник, все двугранные углы которого равны 90°.

Система координат также вводится очень просто:

1. Начало координат — в точке A;
2. Чаще всего ребро куба не указано, поэтому принимаем его за единичный отрезок;
3. Ось x направляем по ребру AB, y — по ребру AD, а ось z — по ребру AA1.

Обратите внимание: ось z направляется вверх! После двумерной системы координат это несколько непривычно, но на самом деле очень логично.

Итак, теперь у каждой вершины куба есть координаты. Соберем их в таблицу — отдельно для нижней плоскости куба:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Точка | A | B | C | D |
| Координаты | (0; 0; 0) | (1; 0; 0) | (1; 1; 0) | (0; 1; 0) |

И для верхней:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Точка | A1 | B1 | C1 | D1 |
| Координаты | (0; 0; 1) | (1; 0; 1) | (1; 1; 1) | (0; 1; 1) |

Несложно заметить, что точки верхней плоскости отличаются соответствующих точек нижней только координатой z. Например, B = (1; 0; 0), B1 = (1; 0; 1). Главное — не запутаться!

## Координаты трехгранной призмы

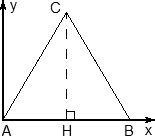
Призма — это уже намного веселее. При правильном подходе достаточно знать координаты только нижнего основания — верхнее будет считаться автоматически.

В задачах C2 встречаются исключительно правильные трехгранные призмы (прямые призмы, в основании которых лежит правильный треугольник). Для них система координат вводится почти так же, как и для куба. Кстати, если кто не в курсе, куб — это тоже призма, только четырехгранная.

Вводим систему координат:

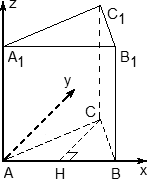
1. Начало координат — в точке A;
2. Сторону призмы принимаем за единичный отрезок, если иное не указано в условии задачи;
3. Ось x направляем по ребру AB, z — по ребру AA1, а ось y расположим так, чтобы плоскость OXY совпадала с плоскостью основания ABC.

Здесь требуются некоторые пояснения. Дело в том, что ось y **НЕ совпадает** с ребром AC, как многие считают. А почему не совпадает? Подумайте сами: треугольник ABC — равносторонний, в нем все углы по 60°. А углы между осями координат должны быть по 90°, поэтому сверху картинка будет выглядеть так:



Надеюсь, теперь понятно, почему ось y не пойдет вдоль AC. Проведем в этом треугольнике высоту CH. Треугольник ACH — прямоугольный, причем AC = 1, поэтому AH = 1 · cos A = cos 60°; CH = 1 · sin A = sin 60°. Эти факты нужны для вычисления координат точки C.

Теперь взглянем на всю призму вместе с построенной системой координат:



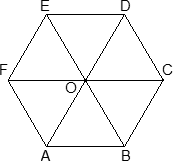
Получаем следующие координаты точек:

Координаты трехгранной призмы

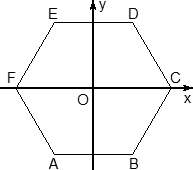
Как видим, точки верхнего основания призмы снова отличаются от соответствующих точек нижнего лишь координатой z. Основная проблема — это точки C и C1. У них есть иррациональные координаты, которые надо просто запомнить. Ну, или понять, откуда они возникают.

## Координаты шестигранной призмы

Шестигранная призма — это «клонированная» трехгранная. Можно понять, как это происходит, если взглянуть на нижнее основание — обозначим его ABCDEF. Проведем дополнительные построения: отрезки AD, BE и CF. Получилось шесть треугольников, каждый из которых (например, треугольник ABO) является основанием для трехгранной призмы.

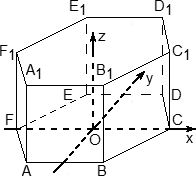


Теперь введем собственно систему координат. Начало координат — точку O — поместим в центр симметрии шестиугольника ABCDEF. Ось x пойдет вдоль FC, а ось y — через середины отрезков AB и DE. Получим такую картинку:



Обратите внимание: начало координат **НЕ совпадает** с вершиной многогранника! На самом деле, при решении настоящих задач вы обнаружите, что это очень удобно, поскольку позволяет значительно уменьшить объем вычислений.

Осталось добавить ось z. По традиции, проводим ее перпендикулярно плоскости OXY и направляем вертикально вверх. Получим итоговую картинку:



Запишем теперь координаты точек. Предположим, что все ребра нашей правильной шестигранной призмы равны 1. Итак, координаты нижнего основания:

Координаты шестигранной призмы - низ

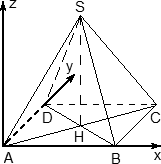
Координаты верхнего основания сдвинуты на единицу по оси z:

Координаты шестигранной призмы - верх

## Координаты четырехугольной пирамиды

Пирамида — это вообще очень сурово. Мы разберем только самый простой случай — правильную четырехугольную пирамиду, все ребра которой равны единице. Однако в настоящих задачах C2 длины ребер могут отличаться, поэтому ниже приведена и общая схема вычисления координат.

Итак, правильная четырехугольная пирамида. Это такая же, как у Хеопса, только чуть поменьше. Обозначим ее SABCD, где S — вершина. Введем систему координат: начало в точке A, единичный отрезок AB = 1, ось x направим вдоль AB, ось y — вдоль AD, а ось z — вверх, перпендикулярно плоскости OXY. Для дальнейших вычислений нам потребуется высота SH — вот и построим ее. Получим следующую картинку:



Теперь найдем координаты точек. Для начала рассмотрим плоскость OXY. Здесь все просто: в основании лежит квадрат, его координаты известны. Проблемы возникают с точкой S. Поскольку SH — высота к плоскости OXY, точки S и H отличаются лишь координатой z. Собственно, длина отрезка SH — это и есть координата z для точки S, поскольку H = (0,5; 0,5; 0).

Заметим, что треугольники ABC и ASC равны по трем сторонам (AS = CS = AB = CB = 1, а сторона AC — общая). Следовательно, SH = BH. Но BH — половина диагонали квадрата ABCD, т.е. BH = AB · sin 45°. Получаем координаты всех точек:

Координаты четырехугольной пирамиды

Вот и все с координатами пирамиды. Но не с координатами вообще. Мы рассмотрели лишь самые распространенные многогранники, однако этих примеров достаточно, чтобы самостоятельно вычислить координаты любых других фигур. Поэтому можно приступать, собственно, к методам решения конкретных задач C2

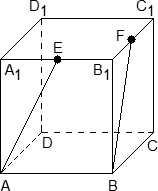
# Угол между двумя прямыми

Угол между двумя прямыми равен углу между их направляющими векторами. Таким образом, если вам удастся найти координаты направляющих векторов a = (x1; y1; z1) и b = (x2; y2; z2), то сможете найти угол. Точнее, косинус угла по формуле:

Формула скалярного произведения

Посмотрим, как эта формула работает на конкретных примерах:

* Задача. В кубе ABCDA1B1C1D1 отмечены точки E и F — середины ребер A1B1 и B1C1 соответственно. Найдите угол между прямыми AE и BF.



Решение. Поскольку ребро куба не указано, положим AB = 1. Введем стандартную систему координат: начало в точке A, оси x, y, z направим вдоль AB, AD и AA1 соответственно. Единичный отрезок равен AB = 1. Теперь найдем координаты направляющих векторов для наших прямых.

Найдем координаты вектора AE. Для этого нам потребуются точки A = (0; 0; 0) и E = (0,5; 0; 1). Поскольку точка E — середина отрезка A1B1, ее координаты равны среднему арифметическому координат концов. Заметим, что начало вектора AE совпадает с началом координат, поэтому AE = (0,5; 0; 1).

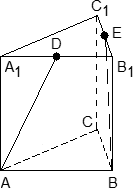
Теперь разберемся с вектором BF. Аналогично, разбираем точки B = (1; 0; 0) и F = (1; 0,5; 1), т.к. F — середина отрезка B1C1. Имеем:  
BF = (1 − 1; 0,5 − 0; 1 − 0) = (0; 0,5; 1).

Итак, направляющие векторы готовы. Косинус угла между прямыми — это косинус угла между направляющими векторами, поэтому имеем:

Косинус угла между векторами

Ответ: arccos 0,8

Задача. В правильной трехгранной призме ABCA1B1C1, все ребра которой равны 1, отмечены точки D и E — середины ребер A1B1 и B1C1 соответственно. Найдите угол между прямыми AD и BE.



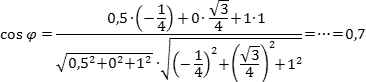
* Решение. Введем стандартную систему координат: начало координат в точке A, ось x направим вдоль AB, z — вдоль AA1. Ось y направим так, чтобы плоскость OXY совпадала с плоскостью ABC. Единичный отрезок равен AB = 1. Найдем координаты направляющих векторов для искомых прямых.

Для начала найдем координаты вектора AD. Рассмотрим точки: A = (0; 0; 0) и D = (0,5; 0; 1), т.к. D — середина отрезка A1B1. Поскольку начало вектора AD совпадает с началом координат, получаем AD = (0,5; 0; 1).

Теперь найдем координаты вектора BE. Точка B = (1; 0; 0) считается легко. С точкой E — серединой отрезка C1B1 — чуть сложнее. Имеем:

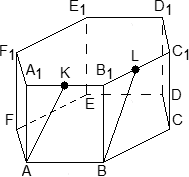
Координаты точки E и вектора BE

Осталось найти косинус угла:

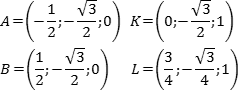


Ответ: arccos 0,7

* Задача. В правильной шестигранной призме ABCDEFA1B1C1D1E1F1, все ребра которой равны 1, отмечены точки K и L — середины ребер A1B1 и B1C1 соответственно. Найдите угол между прямыми AK и BL.



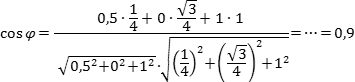
Решение. Введем стандартную для призмы систему координат: начало координат поместим в центр нижнего основания, ось x направим вдоль FC, ось y — через середины отрезков AB и DE, а ось z — вертикально вверх. Единичный отрезок снова равен AB = 1. Выпишем координаты интересующих нас точек:



Точки K и L — середины отрезков A1B1 и B1C1 соответственно, поэтому их координаты находятся через среднее арифметическое. Зная точки, найдем координаты направляющих векторов AK и BL:

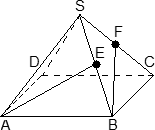
Координаты векторов AK и BL

Теперь найдем косинус угла:



Ответ: arccos 0,9

* Задача. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, отмечены точки E и F — середины сторон SB и SC соответственно. Найдите угол между прямыми AE и BF.



Решение. Введем стандартную систему координат: начало в точке A, оси x и y направим вдоль AB и AD соответственно, а ось z направим вертикально вверх. Единичный отрезок равен AB = 1.

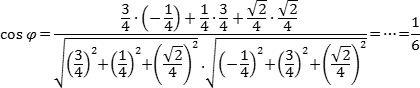
Точки E и F — середины отрезков SB и SC соответственно, поэтому их координаты находятся как среднее арифметическое концов. Выпишем координаты интересующих нас точек:  
A = (0; 0; 0); B = (1; 0; 0)

Координаты точек E и F

Зная точки, найдем координаты направляющих векторов AE и BF:

Координаты векторов AE и BF

Координаты вектора AE совпадают с координатами точки E, поскольку точка A — начало координат. Осталось найти косинус угла:



Ответ: arccos (1/6)

# Дополнительные соображения

Метод координат — это, конечно, хороший инструмент, однако у него есть недостаток. Даже два:

1. Иногда приходится много считать. И чем сложнее многогранник — тем больше объем вычислений. Это становится особенно заметно, когда в дело вступают иррациональные координаты и плоскости;
2. К сожалению, в школе этой теме уделяется недостаточно внимания. Проходят что-то в 10 классе — и благополучно забывают. Из-за этого возникают проблемы с оформлением готового решения.

Однако нет ничего невозможного. Если вы освоили метод координат, научились вычислять углы между всевозможными комбинациями прямых и плоскостей, то научиться оформлять свои выкладки — дело пяти минут. А может быть и двух — если эти выкладки немного оптимизировать.

## Оптимизация вычислений

Во многих задачах получаются весьма неслабые векторы, координаты которых содержат корни и дроби. От них можно избавиться, если помнить простое правило: при умножении вектора на число a ≠ 0 угол между этим вектором и другими не меняется.

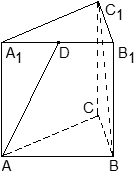
Таким образом, вектор AB = (0,3; 0,5; 1) можно без ущерба для здоровья заменить вектором 10 · AB = (3; 5; 10). Это значительно сократит объем дальнейших вычислений.

Разумеется, это был очень простой пример. Чтобы разобраться с другими тонкостями (например, с корнями), надо выполнить два несложных шага:

1. Избавиться от иррациональности в знаменателе, если она есть. Другими словами, избавляемся от всех корней, которые стоят в знаменателе, путем умножения вектора на этот корень или на сопряженное выражение.
2. Избавиться от иррациональности в числителе и — по возможности — от самих дробей.

Для некоторых эти два правила звучат угрожающе, поэтому разберемся с ними на конкретных примерах. Заодно убедимся, насколько это упрощает решение.

* Задача. В правильной треугольной призме ABCA1B1C1, все ребра которой равны 1, точка D — середина ребра A1B1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BC1.



Решение. Очевидно, речь идет о косинусе угла между двумя прямыми. Введем стандартную систему координат: начало координат поместим в точку A, единичный отрезок равен AB = 1. Ось x направим вдоль AB, ось z — вдоль AA1, а ось y расположим так, чтобы плоскость OXY совпадала с плоскостью ABC. Найдем координаты вектора AD:  
A = (0; 0; 0) — начало координат.

Точка D — середина отрезка A1B1, поэтому нам потребуются точки A1 и B1:  
A1 = (0; 0; 1);  
B1 = (1; 0; 1);

D = (0,5; 0; 1) — координаты середины отрезка равны среднему арифметическому координат концов. Итак, находим координаты вектора AD:

AD = (0,5 − 0; 0 − 0; 1 − 1) = (0,5; 0; 1) → (1; 0; 2) — избавились от дробей, умножив координаты вектора на 2.

Теперь найдем координаты вектора BC1:  
B = (1; 0; 0);

Координаты точки C  
Координаты вектора BC

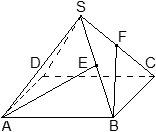
Координаты вектора BC1 также оптимизировали, умножив все на 2. Больше тут ничего не упростить, иррациональность убрать не получится. Остается найти косинус:

Косинус угла между векторами

Ответ:

Три корня из 10 на 20

* Задача. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, точки E и F — середины ребер SB и SC соответственно. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.



Решение. Снова ищем косинус угла между двумя прямыми. Введем систему координат следующим образом: начало координат — точка A, единичный отрезок равен AB = 1. Ось x направим вдоль AB, ось y — вдоль AD, а ось z направим вверх, т.е. перпендикулярно плоскости ABC. Найдем координаты векторов AE и BF.

Координаты точек A = (0; 0; 0) и B = (1; 0; 0) находятся легко. Далее, по условию, точки E и F — середины отрезков SB и SC соответственно, поэтому для нахождения их координат нам потребуются точки C и S:  
C = (1; 1; 0);

Координаты точек S, E и F

Откуда взялись корни и как из среднего арифметического получились координаты точек E и F, предлагаю читателям подумать самостоятельно. Подсказка: проведите диагональ основания, высоту и воспользуйтесь теоремой Пифагора.

А мы тем временем найдем и оптимизируем координаты векторов AE и BF:

Координаты векторов AE и BF

В обоих случаях координаты вектора умножены на 4, чтобы избавиться от дробей. Осталось найти косинус:

Косинус угла между векторами

Ответ: 1/6

## Замечания по оформлению задачи C2

Многие спрашивают: «А примут ли у меня такое решение проверяющие?» Конечно, примут — при условии, что все будет правильно оформлено. Вот основные рекомендации по оформлению:

1. Подробно комментируйте основные моменты решения. Недостаточно просто написать «введем систему координат, как показано на рисунке». Обязательно укажите, где находится начало координат, куда направлены оси и чему равен единичный отрезок.
2. Выписывайте координаты точек, с которыми работаете. Да-да, я знаю, что вы уже тысячу раз чертили кубы и призмы, уже знаете наизусть координаты всех вершин — но проверяющие об этом пока не подозревают! Поэтому начертите еще раз и напишите рядом: A = (0; 0; 0), B = (1; 0; 0) ... — и так все точки, которые вам нужны.
3. Не экономьте на вычислениях. Подставляя числа в формулу для косинуса, напишите эту формулу в исходном виде, затем — с подставленными числами, и только затем проводите вычисления. Это вдвое упростит работу для проверяющего и уменьшит число претензий.
4. Если вы работаете с плоскостями, укажите, почему в формуле Ax + By + Cz + D = 0 коэффициент D принимает конкретные значения (D = 0 или D = 1). В самом деле, почему? Да просто потому, что если плоскость проходит через начало координат, D ≠ 0 не позволит получить верное числовое равенство. Так и напишите — это будет достаточным обоснованием.
5. Внимательно читайте условие задачи. Метод координат дает нам только косинус или синус угла — но не ответ. А что, если требуется тангенс? Обидно, если все решение будет правильным, а ответ — совсем не тот, что надо.

# Метод координат в пространстве

Для того, чтобы использовать метод координат, надо хорошо знать формулы. Их три:

1. Главная формула — косинус угла φ между векторами a = (x1; y1; z1) и b = (x2; y2; z2):

Косинус угла между векторами

1. Уравнение плоскости в трехмерном пространстве: Ax + By + Cz + D = 0, где A, B, C и D — действительные числа, причем, если плоскость проходит через начало координат, D = 0. А если не проходит, то D = 1.
2. Вектор, перпендикулярный к плоскости Ax + By + Cz + D = 0, имеет координаты: n = (A; B; C).

На первый взгляд, выглядит угрожающе, но достаточно немного практики — и все будет работать великолепно.

* Задача. Найти косинус угла между векторами a = (4; 3; 0) и b = (0; 12; 5).

Решение. Поскольку координаты векторов нам даны, подставляем их в первую формулу:

Косинус угла - пример вычисления

Ответ: 36/65

* Задача. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M = (2; 0; 1), N = (0; 1; 1) и K = (2; 1; 0), если известно, что она не проходит через начало координат.

Решение. Общее уравнение плоскости: Ax + By + Cz + D = 0, но, поскольку искомая плоскость не проходит через начало координат — точку (0; 0; 0) — то положим D = 1. Поскольку эта плоскость проходит через точки M, N и K, то координаты этих точек должны обращать уравнение в верное числовое равенство.

Подставим вместо x, y и z координаты точки M = (2; 0; 1). Имеем:  
A · 2 + B · 0 + C · 1 + 1 = 0 ⇒ 2A + C + 1 = 0;

Аналогично, для точек N = (0; 1; 1) и K = (2; 1; 0) получим уравнения:  
A · 0 + B · 1 + C · 1 + 1 = 0 ⇒ B + C + 1 = 0;  
A · 2 + B · 1 + C · 0 + 1 = 0 ⇒ 2A + B + 1 = 0;

Итак, у нас есть три уравнения и три неизвестных. Составим и решим систему уравнений:

Система уравнений

Получили, что уравнение плоскости имеет вид: − 0,25A − 0,5B − 0,5C + 1 = 0.

Ответ: − 0,25A − 0,5B − 0,5C + 1 = 0

* Задача. Плоскость задана уравнением 7x − 2y + 4z + 1 = 0. Найти координаты вектора, перпендикулярного данной плоскости.

Решение. Используя третью формулу, получаем n = (7; − 2; 4) — вот и все!

Ответ: n = (7; − 2; 4)

## Вычисление координат векторов

А что, если в задаче нет векторов — есть только точки, лежащие на прямых, и требуется вычислить угол между этими прямыми? Все просто: зная координаты точек — начала и конца вектора — можно вычислить координаты самого вектора.

**Теорема**. Чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца вычесть координаты начала.

Эта теорема одинаково работает и на плоскости, и в пространстве. Выражение «вычесть координаты» означает, что из координаты x одной точки вычитается координата x другой, затем то же самое надо сделать с координатами y и z. Вот несколько примеров:

* Задача. В пространстве расположены три точки, заданные своими координатами: A = (1; 6; 3), B = (3; − 1; 7) и C = (− 4; 3; − 2). Найти координаты векторов AB, AC и BC.

Решение. Рассмотрим вектор AB: его начало находится в точке A, а конец — в точке B. Следовательно, чтобы найти его координаты, надо из координат точки B вычесть координаты точки A:  
AB = (3 − 1; − 1 − 6; 7 − 3) = (2; − 7; 4).

Аналогично, начало вектора AC — все та же точка A, зато конец — точка C. Поэтому имеем:  
AC = (− 4 − 1; 3 − 6; − 2 − 3) = (− 5; − 3; − 5).

Наконец, чтобы найти координаты вектора BC, надо из координат точки C вычесть координаты точки B:  
BC = (− 4 − 3; 3 − (− 1); − 2 − 7) = (− 7; 4; − 9).

Ответ: AB = (2; − 7; 4); AC = (− 5; − 3; − 5); BC = (− 7; 4; − 9)

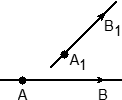
Обратите внимание на вычисление координат последнего вектора BC: очень многие ошибаются, когда работают с отрицательными числами. Это касается переменной y: у точки B координата y = − 1, а у точки C y = 3. Получаем именно 3 − (− 1) = 4, а не 3 − 1, как многие считают. Не допускайте таких глупых ошибок!

## Вычисление направляющих векторов для прямых

Если вы внимательно прочитаете задачу C2, то с удивлением обнаружите, что никаких векторов там нет. Там только прямые да плоскости.

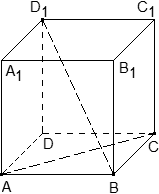
Для начала разберемся с прямыми. Здесь все просто: на любой прямой найдутся хотя бы две различные точки и, наоборот, любые две различные точки задают единственную прямую...

Кто-нибудь понял, что написано в предыдущем абзаце? Я и сам не понял, поэтому объясню проще: в задаче C2 прямые всегда задаются парой точек. Если ввести систему координат и рассмотреть вектор с началом и концом в этих точках, получим так называемый направляющий вектор для прямой:



Зачем нужен этот вектор? Дело в том, что угол между двумя прямыми — это угол между их направляющими векторами. Таким образом, мы переходим от непонятных прямых к конкретным векторам, координаты которых легко считаются. Насколько легко? Взгляните на примеры:

* Задача. В кубе ABCDA1B1C1D1 проведены прямые AC и BD1. Найдите координаты направляющих векторов этих прямых.



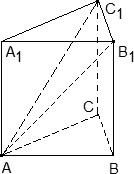
Решение. Поскольку длина ребер куба в условии не указана, положим AB = 1. Введем систему координат с началом в точке A и осями x, y, z, направленными вдоль прямых AB, AD и AA1 соответственно. Единичный отрезок равен AB = 1.

Теперь найдем координаты направляющего вектора для прямой AC. Нам потребуются две точки: A = (0; 0; 0) и C = (1; 1; 0). Отсюда получаем координаты вектора AC = (1 − 0; 1 − 0; 0 − 0) = (1; 1; 0) — это и есть направляющий вектор.

Теперь разберемся с прямой BD1. На ней также есть две точки: B = (1; 0; 0) и D1 = (0; 1; 1). Получаем направляющий вектор BD1 = (0 − 1; 1 − 0; 1 − 0) = (− 1; 1; 1).

Ответ:  
AC = (1; 1; 0);  
BD1 = (− 1; 1; 1)

* Задача. В правильной треугольной призме ABCA1B1C1, все ребра которой равны 1, проведены прямые AB1 и AC1. Найдите координаты направляющих векторов этих прямых.



Решение. Введем систему координат: начало в точке A, ось x совпадает с AB, ось z совпадает с AA1, ось y образует с осью x плоскость OXY, которая совпадает с плоскостью ABC.

Для начала разберемся с прямой AB1. Тут все просто: у нас есть точки A = (0; 0; 0) и B1 = (1; 0; 1). Получаем направляющий вектор AB1 = (1 − 0; 0 − 0; 1 − 0) = (1; 0; 1).

Теперь найдем направляющий вектор для AC1. Все то же самое — единственное отличие в том, что у точки C1 иррациональные координаты. Итак, A = (0; 0; 0), поэтому имеем:

Точка с иррациональными координатами

Ответ:

AB1 = (1; 0; 1);  
Координаты вектора AC1

Небольшое, но очень важное замечание насчет последнего примера. Если начало вектора совпадает с  началом координат, вычисления резко упрощаются: координаты вектора просто равны координатам конца. К сожалению, это верно лишь для векторов. Например, при работе с плоскостями присутствие на них начала координат только усложняет выкладки.

## Вычисление нормальных векторов для плоскостей

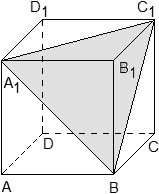
Нормальные векторы — это не те векторы, у которых все в порядке, или которые чувствуют себя хорошо. По определению, нормальный вектор (нормаль) к плоскости — это вектор, перпендикулярный данной плоскости.

Другими словами, нормаль — это вектор, перпендикулярный любому вектору в данной плоскости. Наверняка вы встречали такое определение — правда, вместо векторов речь шла о прямых. Однако чуть выше было показано, что в задаче C2 можно оперировать любым удобным объектом — хоть прямой, хоть вектором.

Еще раз напомню, что всякая плоскость задается в пространстве уравнением Ax + By + Cz + D = 0, где A, B, C и D — некоторые коэффициенты. Не умаляя общности решения, можно полагать D = 1, если плоскость не проходит через начало координат, или D = 0, если все-таки проходит. В любом случае, координаты нормального вектора к этой плоскости равны n = (A; B; C).

Итак, плоскость тоже можно успешно заменить вектором — той самой нормалью. Всякая плоскость задается в пространстве тремя точками. Как найти уравнение плоскости (а следовательно — и нормали), мы уже обсуждали в самом начале статьи. Однако этот процесс у многих вызывает проблемы, поэтому приведу еще парочку примеров:

* Задача. В кубе ABCDA1B1C1D1 проведено сечение A1BC1. Найти нормальный вектор для плоскости этого сечения, если начало координат находится в точке A, а оси x, y и z совпадают с ребрами AB, AD и AA1 соответственно.



Решение. Поскольку плоскость не проходит через начало координат, ее уравнение выглядит так: Ax + By + Cz + 1 = 0, т.е. коэффициент D = 1. Поскольку эта плоскость проходит через точки A1, B и C1, то координаты этих точек обращают уравнение плоскости в верное числовое равенство.

Подставим вместо x, y и z координаты точки A1 = (0; 0; 1). Имеем:  
A · 0 + B · 0 + C · 1 + 1 = 0 ⇒ C + 1 = 0 ⇒ C = − 1;

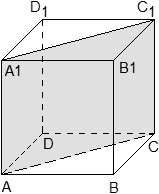
Аналогично, для точек B = (1; 0; 0) и C1 = (1; 1; 1) получим уравнения:  
A · 1 + B · 0 + C · 0 + 1 = 0 ⇒ A + 1 = 0 ⇒ A = − 1;  
A · 1 + B · 1 + C · 1 + 1 = 0 ⇒ A + B + C + 1 = 0;

Но коэффициенты A = − 1 и C = − 1 нам уже известны, поэтому остается найти коэффициент B:  
B = − 1 − A − B = − 1 + 1 + 1 = 1.

Получаем уравнение плоскости: − A + B − C + 1 = 0, Следовательно, координаты нормального вектора равны n = (− 1; 1; − 1).

Ответ: n = (− 1; 1; − 1)

* Задача. В кубе ABCDA1B1C1D1 проведено сечение AA1C1C. Найти нормальный вектор для плоскости этого сечения, если начало координат находится в точке A, а оси x, y и z совпадают с ребрами AB, AD и AA1 соответственно.



Решение. В данном случае плоскость проходит через начало координат, поэтому коэффициент D = 0, а уравнение плоскости выглядит так: Ax + By + Cz = 0. Поскольку плоскость проходит через точки A1 и C, координаты этих точек обращают уравнение плоскости в верное числовое равенство.

Подставим вместо x, y и z координаты точки A1 = (0; 0; 1). Имеем:  
A · 0 + B · 0 + C · 1 = 0 ⇒ C = 0;

Аналогично, для точки C = (1; 1; 0) получим уравнение:  
A · 1 + B · 1 + C · 0 = 0 ⇒ A + B = 0 ⇒ A = − B;

Положим B = 1. Тогда A = − B = − 1, и уравнение всей плоскости имеет вид: − A + B = 0, Следовательно, координаты нормального вектора равны n = (− 1; 1; 0).

Ответ: n = (− 1; 1; 0)

Вообще говоря, в приведенных задачах надо составлять систему уравнений и решать ее. Получится три уравнения и три переменных, но во втором случае одна из них будет свободной, т.е. принимать произвольные значения. Именно поэтому мы вправе положить B = 1 — без ущерба для общности решения и правильности ответа.

## Координаты середины отрезка

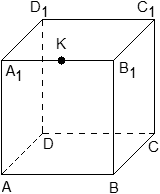
Очень часто в задаче C2 требуется работать с точками, которые делят отрезок пополам. Координаты таких точек легко считаются, если известны координаты концов отрезка.

Итак, пусть отрезок задан своими концами — точками A = (xa; ya; za) и B = (xb; yb; zb). Тогда координаты середины отрезка — обозначим ее точкой H — можно найти по формуле:

Координаты середины отрезка

Другими словами, координаты середины отрезка — это среднее арифметическое координат его концов.

* Задача. Единичный куб ABCDA1B1C1D1 помещен в систему координат так, что оси x, y и z направлены вдоль ребер AB, AD и AA1 соответственно, а начало координат совпадает с точкой A. Точка K — середина ребра A1B1. Найдите координаты этой точки.

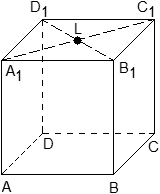


Решение. Поскольку точка K — середина отрезка A1B1, ее координаты равных среднему арифметическому координат концов. Запишем координаты концов: A1 = (0; 0; 1) и B1 = (1; 0; 1). Теперь найдем координаты точки K:

Координаты точки K

Ответ: K = (0,5; 0; 1)

* Задача. Единичный куб ABCDA1B1C1D1 помещен в систему координат так, что оси x, y и z направлены вдоль ребер AB, AD и AA1 соответственно, а начало координат совпадает с точкой A. Найдите координаты точки L, в которой пересекаются диагонали квадрата A1B1C1D1.



Решение. Из курса планиметрии известно, что точка пересечения диагоналей квадрата равноудалена от всех его вершин. В частности, A1L = C1L, т.е. точка L — это середина отрезка A1C1. Но A1 = (0; 0; 1), C1 = (1; 1; 1), поэтому имеем:

Координаты точки L

Ответ: L = (0,5; 0,5; 1)