Солдатова Ольга Михайловна, учитель математики МОУ «Гимназия №5»

НЕКОТОРЫЕ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

(подборка планиметрических задач, охватывающие в своем решении наиболее важные теоремы планиметрии)

В данной работе представлена подборка задач (см. Используемая литература) с решениями по планиметрии, которые можно использовать для зачета, повторения планиметрии или при подготовке к ЕГЭ по математике; При решении задач используется большинство теоретических знаний, изучающихся в курсе планиметрии.

1. В ромб, который делится диагональю на два равносторонних треугольника, вписан круг. Найти площадь круга, если сторона ромба равна 4.

Будем считать, что диагональ DB делит ромб на 2 равносторонних треугольника, т.е.

$∆$ABD = $∆$CBD - равносторонние, значит,
углы $∠$ADB = $∠$DBA = $∠$BAD=60°

Т.к. в равнобедренном (а любой равносторонний треугольник является равнобедренным) треугольнике высота является медианой, биссектрисой и высотой, то треугольник $∆$AOD - прямоугольный с углом $∠$DAO = 30°.

Катет, лежащий против угла в 30° равен половине гипотенузы, поэтому

DO = $\frac{1}{2}$AD = 2.

Тогда радиус окружности, он же высота ААОВ (т.к. радиус окружности перпендикулярен касательной, проведенной в точке касания) и он же является катетом $∆$KOD равен:

$$R=DO∙sin\left(KDO\right)=DO∙sin\left(\frac{π}{2}\right)=2∙\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

Искомая площадь круга:

$$S=πR^{2}=π∙\left(\sqrt{3}\right)^{2}=3π$$

1. Окружность, вписанная в ромб, точкой касания делит его сторону в отношении 2:З.Тогда синус угла ромба равен?

DK:КА = 2:3

Пусть сторона ромба равна 5х, тогда DK = 2х, АК =Зх.

По свойству прямоугольного треугольника

OK2 = DK-AK

R2 R= DK-AK = 2х∙3х = бх2

Тогда $R=x∙\sqrt{6}$

Из треугольника АОК - прямоугольного, его гипотенуза

$$AO=\sqrt{AK^{2}+KO^{2}}$$

$$AO=\sqrt{\left(3x\right)^{2}+\left(x∙\sqrt{6}\right)^{2}}=\sqrt{9x^{2}+6x^{2}}=x∙\sqrt{15}$$

$$cos\left(DAO\right)=cos\left(\frac{BAD}{2}\right)=\frac{AK}{AO}=\frac{3x}{\sqrt{15}∙x}=\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$sin\left(DAO\right)=\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{2}}=\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Т.к. $∠BAD=2∠DAO$, то

$$sin\left(BAD\right)=sin\left(2DAO\right)=2sin\left(DAO\right)cos\left(DAO\right)=2\sqrt{\frac{2}{5}}\sqrt{\frac{3}{5}}=0,4∙\sqrt{6}$$

1. В треугольнике с основанием 2 и высотой, проведённой к этому основанию, равно 3, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании, а две другие - на боковых сторонах. Чему равна часть площади треугольника, не накрытого квадратом?

По условию - АК = ML =5х

Тогда КМ параллельна основанию и треугольники КМВ и АСВ подобны. При этом,

$$cos\left(A\right)=\frac{18}{2∙15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

$$sin\left(A\right)=\sqrt{1^{2}-\left(\frac{9}{15}\right)^{2}}=\frac{4}{5}$$

$$BK=\frac{3}{2xcos\left(A\right)}=\frac{3}{2x\frac{3}{5}}=\frac{5}{2x}$$

$$\frac{AC}{KM}=\frac{AB}{KB} \frac{18}{3x}=\frac{15}{\frac{5}{2x}}$$

$$\frac{6}{x}=6x x^{2}=1 x=1$$

Тогда $KM=3∙1=3$

Значит, коэффициент подобия треугольников равен $k=\frac{AC}{KM}=\frac{18}{3}=6$

Высота $BH=AB∙sin\left(A\right)=15∙\frac{4}{5}=12$

$$S\_{ABC}=\frac{1}{2}∙18∙12=108$$

Т.к. площади подобных фигур относятся как квадраты коэффициентов подобия, то

$$S\_{BKM}=\frac{108}{36}=3$$

Тогда площадь трапеции $S=108-3=105$

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание АС = 18,а боковая сторона = 15.На стороне АВ выбрана точка К, на стороне ВС - точка М, причём, АК:КМ:МС=5:3:5.Найти площадь АКМС.

По условию $AK=MC=5x$

Тогда KM параллельна основанию и треугольники KMB и FCB подобны. При этом,

$$cos\left(A\right)=\frac{18}{2∙15}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

$$\sin(\left(A\right)=\sqrt{1^{2}-\left(\frac{3}{5}\right)^{2}}=\frac{4}{5})$$

$$BK=\frac{\frac{1}{2}KM}{\cos(\left(A\right))}=\frac{3x}{2\cos(\left(A\right))}=\frac{3x}{2∙\frac{3}{5}}=\frac{5x}{2}$$

Можно выразить AB

$$AB=5x+\frac{5}{2}x=\frac{15}{2}x$$

Значит, коэффициент подобия треугольников равен $k=\frac{AB}{KB}=\frac{\frac{15}{2}x}{\frac{5x}{2}}=3$

Высота $BH=AB\sin(\left(A\right)=15∙\frac{4}{5}=12)$

$$S\_{ABC}=\frac{1}{2}∙18∙12=108$$

Т.к. площади подобных фигур относятся как квадраты коэффициентов подобия, то

$$S\_{BKM}=\frac{S\_{ABC}}{k^{2}}=\frac{108}{9}=12$$

Тогда площадь трапеции $S==108-12=96$

1. В квадрате АВСД со стороной 10 точки М и Т - середины сторон АД и ДС соответственно. Отрезки АТ и ВМ пересекаются в точке К. Найти площадь треугольника АКМ.

Очевидно, что треугольники *ADT*, *ATL*, *LTB*, *ТВС* равны и в сумме составляют площадь квадрата, поэтому

$$S\_{ADT}=\frac{1}{4}S\_{ABCD}=\frac{1}{4}∙100=25$$

Треугольники DTA и AMS подобны с коэффициентом подобия

$$k=\frac{AM}{AT}$$

$$AM=5$$

$$AT=\sqrt{10^{2}+5^{2}}=5\sqrt{5}$$

$$k=\frac{5}{5\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Т.к. площади подобных фигур относятся как квадраты коэффициентов подобия, получим:

$$\frac{S\_{ADT}}{S\_{AMS}}=5 S\_{AMS}=\frac{1}{5}∙25=5$$

1. Два угла со взаимно перпендикулярными сторонами относятся как 4 5. Чему равен модуль их разности?

Сторона *АВ* угла *ABD* = *4х*, перпендикулярна стороне *BE* угла *СВЕ* = *5х*. Сторона *BD* угла *ABD*, перпендикулярна стороне *ВС* угла *СВЕ* Модуль их разности

$5x-4x=x$

Из чертежа составим уравнение:

$$5x-90=90-4x=ACB$$

$$5x-4x=180$$

$$x=20$$

$$CBE-ABD=20^{°}$$

1. Два угла со взаимно перпендикулярными сторонами относятся как 7:5.Меныний из них равен?

См. чертеж предыдущей задачи, но

$$7x-90=90-5x=ACB и 7x-5x=2x$$

$$12x=180$$

$$x=15$$

$$5x=5∙15=75^{°}$$

1. Величина одного из углов треугольника равна 20 градусам. Величина острого угла между биссектрисами двух других углов этого треугольника равна?

Т.к. сумма углов треугольника 180°, то сумма углов В и А равна

$$A+B=180-20=160^{°}$$

Тогда сумма углов 1 и 2

$$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}=\frac{160}{2}=80^{°}$$

Тогда из треугольника *АОВ* угол *О*, равный углу а, как вертикальные

$$α=180-80=100^{°}$$

1. Биссектриса внешнего угла при основании равнобедренного треугольника образует с высотой, опущенной из вершины этого угла, угол 87 градусов. Угол при вершине этого треугольника равен?

Т.к. треугольник равнобедренный, то его углы:

$$A=B=\frac{180-α}{2}=90-\frac{α}{2}$$

С другой стороны из треугольника *BCH* угол

$$BCH=90-α$$

По свойству

$$BCD=A+B=α+\left(90-\frac{α}{2}\right)=90+\frac{α}{2}$$

Тогда

$$DCF=BCF=\frac{\left(90+\frac{α}{2}\right)}{2}=45+\frac{α}{4}$$

Используя условие (угол *FCH*=81о), получим $BCH=87-\left(45+\frac{α}{4}\right)=90-α$

Решая уравнение, получим:

$$42-\frac{1}{4}α=90-α$$

$$\frac{3}{4}α=48$$

$$α=64^{°}$$

1. Если в выпуклом четырёхугольнике АВСД дано, что угол А=90 градусов и угол В =130,то величина острого угла между биссектрисами двух других углов равна?

Т. к. сумма внутренних углов 4-угольника равна 360°, то сумма углов D и С равна

$$2a+2b=360-90-130=140^{°}$$

Откуда

$$α+β=70^{°}$$

Из треугольника COD угол COD будет равен

$$180-\left(α+β\right)=180-70=110^{°}$$

Тогда острый угол между биссектрисами:

$$180-110=70^{°}$$

1. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна 1620 градусов. Число его сторон равно?

Сумма внутренних углов выпуклого *n* - угольника вычисляется по формуле:

$$S\_{n}=180\left(n-2\right)=1620$$

$$n-2=9$$

$$n=11$$

1. Если в правильном *m*-угольнике внутренний угол относится к внешнему как 13:2,то *m* = ?

Пусть

$$α=13x$$

$$β=2x$$

Тогда по свойству внешнего угла многоугольника

$$α+β=13x+2x=180$$

$15x=18$0

$$x=12$$

$$α=13∙12=156^{°}$$

Внутренний угол правильного m - угольника вычисляется по формуле:

$$α=\frac{180\left(m-2\right)}{m}=156$$

$$\frac{360}{m}=180-156$$

$$m=15$$

1. Если катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 6, то длина медианы, проведённой к гипотенузе равна?

По свойству медианы прямоугольного треугольника ее длина равна радиусу описанной окружности и половине гипотенузы. Найдем гипотенузу:

$$AB=\sqrt{8^{2}+6^{2}}=10$$

Тогда медиана равна 5.

14. В ромб с острым углом 45 вписана окружность радиуса 2. Произведение диагоналей ромба равно?

Из треугольника *AOF* (угол *ВАО* = 22,5°) найдем *АО*

$$AO=\frac{R}{\sin(\left(\frac{π}{8}\right))}=\frac{2}{\sin(\left(\frac{π}{8}\right))}$$

Из треугольника *AOB* (угол *ВАО* = 22,5°) найдем *АВ*

$$AB=\frac{AO}{\cos(\left(\frac{π}{8}\right))}=\frac{2}{\sin(\left(\frac{π}{8}\right))\cos(\left(\frac{π}{8}\right))}=\frac{4}{\sin(\left(\frac{π}{4}\right))}=\frac{8}{\sqrt{2}}$$

Тогда площадь треугольника *AOB*

$$S\_{AOB}=\frac{1}{2}∙AB∙R=\frac{1}{2}∙\frac{8}{\sqrt{2}}∙2=\frac{8}{\sqrt{2}}$$

А площадь ромба, (равная половине произведения диагоналей) будет равна:

$$S\_{ABCD}=4S\_{AOB}=\frac{4∙8}{\sqrt{2}}=\frac{32}{\sqrt{2}}$$

Тогда произведение диагоналей ромба

$$BD∙AC=2S\_{ABCD}=2∙\frac{32}{\sqrt{2}}=32∙\sqrt{2}$$

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Юдина И.И., Геометрия 7-9. Учебник для 7 - 9 кл. общеобразовательных учреждений; - М.: «Просвещение», 2006 г.;
2. Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений; - М.: «Просвещение», 2007 г.;
3. Цыпкин А.Г, Пинский А.И./Под ред. Благодатских В.И. «Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы»; - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983.