**Тема «**Производная, ее геометрический и механический смысл**»**

**Цели урока:**

учебная: изучить скорость изменения функции в точке, дать понятие производной, сформировать представление о касательной к графику функции в точке.

воспитательная: способствовать воспитанию у школьников интереса к изучаемой теме и ценностного отношения к труду и полученным знаниям.

развивающая: способствовать развитию навыков частично-поисковой познавательной деятельности

**О б е с п е ч е н и е з а н я т и й**

# Наглядные пособия: портреты математиков, высказывания ученых, программа «Математика 9-11».

# Раздаточный материал: карточки с заданиями, микроплакаты с формулами, макеты передвижных графиков

Технические средства: ПК IBM

Литература: А.Г. Мордкович «Алгебра и начала анализа 10-11 класс часть 1 и 2

Девиз урока записан на плакате и вывешивается перед уроком:

Кто такой учёный? Определение. Тот, кто ночами, забыв про кровать.  
 Усердно роется в книжной груде.  
 Чтобы ещё кое-что узнать  
 Из того, что знают другие люди.

(П. Хейн)

**1. Организационный момент (3 минуты)**

Организационный момент: приветствие, проверка посещаемости, ответы на вопросы по д.з.

**2. Сообщение темы урока и целей занятия.**

**Вступительное слово** (5 минут)

"Мир - рвался в опытах Кюри Атомной, лопнувшею бомбой  
На электронные струи…»

Эти строчки в одном из своих стихотворений написал поэт Андрей Белый. Это был только 1921 год... За полтора десятка лет до того, как учёные начали работать над созданием бомбы и почти за четверть века до Хиросимы! Поэт предсказал вступление в атомный век! Но как он смог?! Андрей Белый - это литературный псевдоним, а настоящее его имя Борис Николаевич Бугаев. Учился он на физико-математическом факультете Московского университета.

Но почему же мы знаем о его литературных достижениях и о Борисе Бугаеве математике знаем совсем мало?! А дело в том, что мир узнаёт о каком-то великом человеке, когда он получает всемирное признание и ему вручают премию за достижения. Премий много, но самая престижная - Нобелевская (она вручается за заслуги в самых различных областях). Так, например мир узнал о великом русском поэте Николае Гумилёве. Но в списках нобелевских лауреатов вы не найдёте ни одного человека, которому бы её вручили за математику! Почему? Потому, что у её основателя Альфреда Нобеля была невеста и друг – математик, который отбил её у него… После чего Нобель завещал: за математику премию не вручать! И сейчас я предлагаю вам на уроке стать учёными, совершить открытие, вывести формулы самим, и как знать, может уважаемая комиссия Нобелевской премии восхитится вашими математическими способностями и, наконец-то, обратит внимание на математиков!

Итак, начинаем исследовательскую часть.

**3. Актуализация опорных знаний**

|  |
| --- |
|  |

Работа идёт в группах. Ученики берут лист с заданием и выполняют это задание в тетрадях самостоятельно, но разрешается вести обсуждение внутри группы.

*Математики. Лист №1.*

Пусть дан график *f(x)*.

Рассмотрим точку М0 с абсциссой *xo*. Пусть *∆х* - это изменение абсциссы от точки *xo*  до *х,* т.е.  *∆х = х - xo , M0М* – секущая, *M0N –* касательная.

Найдите

а) угловой коэффициент секущей (это средняя скорость изменения функции);

б) угловой коэффициент касательной (подсказка: касательная - это предельное положение секущей)

*Решение: f(x)* – заданная функция, *∆х = х - xo –* изменение абсциссы от точки *xo* до х

*vср* =. В нашем случае *kсек =*

При *х→х0* (или *∆х* →0)будет  *f(x)→f(x0)*, следовательно, *M0М→ M0N.*  Тогда *k* кас = .

*Вопрос:* Скажите, а вы знаете, кто впервые стал использовать знак «∆» для обозначения разности аргументов?

- Да. Буква «∆» - одна из заглавных букв греческого алфавита ее стал использовать Эйлер (сер. 18 века).

**Физики.** Лист №1:

|  |
| --- |
|  |

Рассмотрим движение материальной точки *М* по прямой с выбранным на ней началом отсчета - точкой *О.*  Расстояние от начала отсчета до точки М в каждый момент времени t обозначим буквой s. Тогда движение точки М будет описываться функцией

*s = s (t)*, *t*[ *t0* ; *t*].

Найдите:

а) среднюю скорость за отрезок [*t0* ; *t*];

б) скорость точки в момент времени *t0* (мгновенную скорость).

*Решение:* За промежуток времени длительности *t -*  *t0* между моментами времени *t0* и  *t* точка проходит путь равный s*(t) –s(t0 ).*

Среднюю скорость получают, разделив перемещение материальной точки *s* на изменение времени, в течение которого оно совершено.

Тогда *vср* = ;

Чем меньше рассматриваемый промежуток времени, тем точнее можно охарактеризовать движение. А мгновенной скоростью называется предел средней скорости за промежуток времени от *t0* до  *t* при *t→ t0.* Тогда 

**Биологи.** Лист №1.

Бактерии размножаются быстро и просто – они делятся пополам и при благоприятных условиях за сутки из одной бактерии могут образоваться десятки тысяч. Рост клеток бактерий в условиях ограниченности питательных веществ или пространства в течение начального интервала времени от *t0* до  *t*  происходит по некоторому закону *y = N(t)*.

Найдите:

а) среднюю скорость изменения количества бактерий за промежуток времени [*t0* ; *t*];

б) скорость изменения количества точки в момент времени *t0* (мгновенную скорость).

*Решение:* В физике для нахождения средней скорости делят длину перемещения тела *s* на время, в течение которого оно совершено, т.е. *vср* = . В нашем случае *vср* = .

Мгновенной скоростью v(*t0*) в момент времени *t0* является предел средней скорости за промежуток времени от *t0* до  *t* при *t→ t0*.

Тогда .

**4. Изучение нового материала (15-20 мин)**

Подобные задачи рассматриваются и в экономике, и в анализе ценовой политики. Например: «цена товара напрямую зависит от расходов на производство» или «объем реализации некоторой продукции зависит от роста или снижения его цены».

А теперь давайте подведём итоги вашей исследовательской работы. Вы решали различные задачи, но все они привели к одной и той же математической модели: к пределу отношения разности значений функции к разности значений аргумента. В русском языке для величины, на которую изменилось начальное количество, используется слово **«прирост».**

Так как *∆х* показывает на сколько изменилось начальное значение аргумента *х0,* то  *∆х*  называют **«приращением аргумента»**.

Приращению аргумента соответствует **«приращение функции»**, которое также обозначается с помощью заглавной греческой буквы «∆». Исходя из этого полученную формулу  можно записать по-другому:  или  и прочитать так: **предел отношения приращения функции к приращению аргумента при *∆х →0*** ( или при *∆ t→0*).

Поскольку многие задачи в различных областях науки в процессе решения приводят к такой же модели - этому пределу надо: **дать название, дать обозначение и изучить его. Это мы с вами сейчас и сделаем.**

**Математически предел отношения приращения функции к приращению аргумента при *∆х→0*  называется производной в точке *xo,* но обозначается по-разному:**

*f′(х),*   *f′,  у′ -* эти обозначения для производной ввел Жозеф Луи Лагранж

** или * -* эти обозначения ввел Готфрид Вильгельм Лейбниц (разности *xo - xo* и *у - уo* он обозначил как *dx*  и *dy*, *d –* первая буква в латинском слове *diferentia* означающее «разность»). В своих трудах он писал: «…Предупреждаю, чтобы остерегались отбрасывать *dx*, - ошибка, которую часто допускают и которая препятствует продвижению вперед…»

Это определение вы запишете в тетрадях, а я - на доске:

|  |
| --- |
| Пусть функция *f(x)* определена в точке xo и в некоторой её окрестности.  Дадим точке xo приращение *∆х.* Тогда производной в точке xo называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при *∆х →0*  а именно: *f′(х0)* = lim |

Теперь посмотрите на ваши задачи и сформулируйте план нахождения производной. учащиеся должны ответить:

1. Задать функцию f(x).

2. Задать приращение аргументу и найти приращение функции … *∆у = f(x0 +∆х) – f(x0)*.

3. Найти отношение приращения функции к приращению аргумента... 

4. Найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента при *∆х→0* 

Далее группа самостоятельно формулирует и записывает в тетради

Ф**изический смысл производной – это скорость изменения расстояния: *s'(t) = v(t);***

**Геометрический смысл: *f'(хо) –* это коэффициент угла наклона касательной к оси Ох**

***f'(хо) = k* = *tg α.***

Т.е. из геометрического смысла получается, что если существует производная в точке *хо*, то можно провести что? (обычно ученики говорят: что можно провести касательную в точке *хо* и наоборот - если можно провести касательную в точке *хо,* то в этой точке существует производная. На ошибку в формулировке пока не обращается внимание, фраза записывается на доске в таком виде и дальше продолжаются обсуждения.

|  |
| --- |
| *записывается под определением на доске*  …Если существует производная в точке *хо*, то можно провести касательную в точке *хо.* Наоборот - если можно провести (…) касательную в точке *хо,* то в этой точке существует производная. |

|  |
| --- |
|  |

Итак, подведём итог: вы сами дали мне определение производной, но встаёт вопрос: а всегда ли существует производная в точке? Возьмите модели в руки. На них вы видите график некоторой функции *у = f(x).*  А теперь давайте покрутим окружность с графиком вокруг центра и рассмотрим различные положения кривой и касательной к ней.

Рассматриваются различные случаи... Особое внимание обращается на моменты, когда касательная перпендикулярна оси Ох и параллельна оси Ох.

Всегда ли существует ли производная в точке *хо*?

Задается ряд вопросов:

|  |  |
| --- | --- |
| Если касательная к графику функции будет убывающей, то каким будет угол между этой прямой и осью *Ох*? | Угол будет тупым. |
| Каким будет **угловой коэффициент** ***k*** ? | ***k*** < 0 |
| Если касательная к графику функции будет возрастающей, то каким будет угол между этой прямой и осью *Ох*? | Угол будет острым. |
| Каким будет **угловой коэффициент** ***k*** ? | ***k*** > 0 |
| Если касательная к графику функции будет параллельна оси *Ох* или совпадать с ней, то каким будет угол между этой прямой и осью *Ох*? | Угла не будет, вернее α = 0º |
| Чему равен **тангенс угла наклона** такой касательной? | *tg 0º = 0* |
| Чему равен **угловой коэффициент** ***k*** касательной, параллельной оси *Ох*? | Также не существует! |
| Чему равен **угол** наклона вертикальной касательной? | α = 90º |
| Чему равен **тангенс угла наклона**  вертикальной касательной? | *tg 90º* не существует. Почему?Потому, что cos 90º = 0… |
| Чему равен **угловой коэффициент** ***k*** вертикальной касательной? | Также не существует! |

Давайте вернёмся к геометрическому смыслу производной: производная в точке равна угловому коэффициенту касательной, проведённой в этой точке ***f'(хо) = k* = *tg α.***

Мы получили, что не во всех точках существует производная.

Как же так? Вы же сами сказали и написали, что если есть касательная в точке, то в точке есть и производная! Вот пример: есть касательная, но нет производной?! Подумайте, что же вы сделали не так, и исправьте фразу. "

Далее учащиеся возвращаются к предложению, написанному на доске и самостоятельно исправляют ошибку. Должно получиться:

|  |
| --- |
| ***Если в точке можно провести невертикальную касательную, то в этой точке существует производная, и наоборот, если в точке существует производная, то в этой точке можно провести невертикальную касательную*** |

**5.** **Закрепление нового материала**

**Самостоятельная работа в группах** (15-20 минут)

Вот теперь вы готовы к работе с производной и можете приступить к выполнению задания №2

**Биологи**

|  |
| --- |
|  |

**Л**ист №2: Пользуясь определением и схемой вычисления производной, найдите производную функции *y = C.*

**Решение**

*y = C –* постоянная линейная функция*.*

*∆у = f(x +∆х) – f(x)= С – С = 0;*  *= 0,*

то *у′* =  =  = *0.*

Итак, *( С ) ′= 0.*

**Физики**

|  |
| --- |
|  |

**Л**ист №2: Пользуясь определением и схемой вычисления производной, найдите производную функции *y = kx + b.*

**Решение**

*y = kx + b –* линейная функция.

Аргументу *х* дадим приращение  *∆х,* тогда

*∆у = f(x + ∆х) – f(x)=*

*= k (x +∆х) – (kx + b) = k∙x + k∆∙х – kx - b = k∆∙х*

 = *k* = *k.*

Итак*, (kx + b)′ = k.*

**Математики**

|  |
| --- |
|  |

**Л**ист №2: Пользуясь определением и схемой вычисления производной, найдите производную функции *y = х2.*

Решение

*y = х2 .*

Аргументу *х* дадим приращение  *∆х,* тогда

*∆у = f(x + ∆х) – f(x)=*

*= (x +∆х)2 – х2 =*

*= х2+ 2∙х∙∆х + (∆х)2 - х2 = 2∙х∙∆х + (∆х)2 = ∆х∙(2х +∆х)*

 = *2х = 2х.*

Итак*, (х2 )′ = 2х.*

**6 этап. Закрепление нового понятия**

Работа с программой «Математика 10-11».

1. Инструктаж по технике безопасности.

2. Инструктаж по работе с программой.

3. Просмотр и прослушивание темы: «Производная», «Пример 1»,

«Пример 2». Решение задач 1 и 2.

Просмотр и прослушивание темы: «Задачи о касательных», «Пример 1»,

«Пример 2», «Пример 3». Решение задач 1 и 2.

Просмотр и прослушивание темы: «Механический смысл производной»,

«Пример 1», « Пример 2».

Решение задачи 1.Прослушивание, просмотр, запись….

**7 этап. Итог урока**

Вопросы учащимся:

Что называется производной в точке?

Сформулируйте физический смысл производной?

Геометрический смысл? Когда существует производная?

Какой момент был самым интересным на уроке?

Какой был самым трудным?

Что же, вы доказали, что смогли сами определить и исследовать понятие производной и я хочу вам вручить долгожданную Нобелевскую премию - вы настоящие учёные! Откройте свои конверты и достаньте оттуда грамоты в виде крокодила.

Почему крокодил?

Потому что это животное, которое никогда не отступает и не пятится назад!

Этого я и вам желаю! "

Оценки за работу на уроке...

**8 этап. Домашнее задание**

Выучить теорию по учебнику §27-28, № 27.1-27.4