Вычисление объемов тел с помощью принципа Кавальери

Сайфутдинова Фирдауса Файзутдиновна, учитель математики МБОУ "Лицей №2 г. Мамадыш"

В отличие от учебника «Геометрия, 10-11» авторов Л.С. Атанасян, В.Ф.Бутузов и др., где формулы объёмов пространственных тел выводятся с помощью определённого интеграла, в учебнике А.Г. Мордковича, И.М. Смирнова и др. «Математика,11» формулы для объёмов тел выводятся с помощью принципа Кавальери. Понятно, что интеграл является более тонким инструментом для исследования объёмов, чем принцип Кавальери. Тем не менее, использование принципа Кавальери обеспечивает изложение объёмов более упрощенным и легко воспринимаемым учащимися. Кроме того, технология укрупнения дидактических единиц позволяет с помощью данного принципа сразу вывести формулы объёмов для тел цилиндрической, конической конструкций и объёма шара. Исходя из опыта апробации учебника А.Г. Мордковича, И.М. Смирнова и др. «Математика,11» , хочу поделиться с некоторыми методическими находками при изучении главы " Объёмы тел". На этапе актуализации опорных знаний, предлагаю к четырём аксиомам объёма добавить принцип Кавальери, предложенный итальянским математиком Бонавентурой Кавальери (1598-1647) и названный впоследствии его именем. Он заключается в следующем:

** ***Если при пересечении двух тел F и*** $ F\_{1}$***, плоскостями, параллельными одной и той же плос­кости α, в сечении всегда получаются фигуры, площади которых находятся***

***в постоянном отношении λ (λ > 0): S = λ***$S\_{1}$ ***,то объемы этих тел находятся в том же соотношении: V(F) = λ***$V\_{1}$ ***(***$ F\_{1}$***); или если при пересечении двух тел F и*** $ F\_{1}$ ***плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях получаются фигуры одинаковой площади, то объёмы исходных тел равны.***

 С помощью этого принципа вывести формулу для вычисления объема тел любой цилиндрической конструкции. Для этого разместим куб так, чтобы нижнее основание куба лежало в плоскости нижнего основания цилиндрической конструкции, а верхнее основание куба лежало в плоскости верхнего основания цилиндрической конструкции. Высота цилиндрической конструкции равна H – длине ребра куба. Любая плоскость, параллельная основанию куба, пересекает куб по квадрату площадью H², а цилиндрическую конструкцию по фигуре, равной основанию, площадью S. отношение этих площадей для любого сечения равно $\frac{H^{2}}{S}$, поэтому $\frac{V\_{куба}}{V\_{цил.конст.}}$ = $\frac{H^{2}}{S}$ или $\frac{H^{3}}{V\_{цил.конст.}}$ = $\frac{H^{2}}{S}$, откуда следует, что $V\_{цил.конст.}$ = HS.

**Итак,** $V\_{цил.}$ **= R²H**

Для получения объема конической конструкции, разобьем куб с ребром H на три равные пирамиды. Объем каждой из них равен $\frac{H^{3}}{3}$.

В параллельных плоскостях разместим пирамиду с ребром основания H и произвольную коническую поверхность. Пусть плоскость α пересекает два тела на высоте h от вершин. Обозначим сечения конуса и пирамиды через $S\_{∝\_{1}}$, $S\_{∝\_{2}}$ соответственно. Так как отношения площадей подобных фигур относятся, как квадраты соответствующих сторон, то $\frac{S\_{∝\_{2}}}{H^{2}}$ =($\frac{h}{H}$)² и

 $S\_{∝\_{2}}$ = ($\frac{h}{H}$)²·$ H^{2}$, $\frac{S\_{∝\_{1}}}{S}$ = ($\frac{h}{H}$)² и $S\_{∝\_{1}}$ = ($\frac{h}{H}$)²·S. Мы видим, что отношение площадей двух сечений есть величина постоянная и не зависящая от выбора высоты секущей плоскости : $\frac{S\_{∝\_{1}}}{S\_{∝\_{2}}}$ = $\frac{H^{2}}{S}$. Согласно принципу Кавальери $\frac{\frac{1}{3}V\_{куба}}{V\_{кон.конст.}}$ = $\frac{H^{2}}{S}$.

Выразим из последнего соотношения $V\_{кон.конст.}$ = $\frac{1}{3}$HS.

**Итак,** $V\_{кон.}$ **=** $\frac{1}{3}$**R²H**

Для получения объема шара, рассмотрим полушар с центром в О и радиусом R. Продолжим плоскость α ограничивающего этот полушар большого круга и поместим на эту плоскость основанием куб с ребрами, равными R. Если мы отделим от этого куба четырехугольную пирамиду B$A\_{1}B\_{1}C\_{1}D\_{1}$, имеющую вершиной вершину B куба, а основанием – верхнее основание последнего, то получим некоторое тело, которое будем обозначать через $ F\_{1}$. Пересечем оба тела некоторой плоскостью $∝^{'}$, параллельной плоскости α и отстоящей от α на расстоянии x (x<R). В сечении с полушаром эта плоскость дает круг, площадь которого равна ($R^{2}$ - $x^{2}$). В сечении же тела $ F\_{1}$ той же плоскостью получается фигура, площадь которой равна $R^{2}$ - $x^{2}$. Откуда ясно, что условия принципа Кавальера выполнены. Следовательно: $V\_{полушара}$= V($ F\_{1}$) = ($V\_{куба}$ - $V\_{пир.}$) = ($R^{3}$ - $\frac{1}{3}R^{3}$) = $\frac{2}{3}$$R^{3}$. Объём шара в 2 раза больше.

**Итак,** $V\_{шара}$ **=** $\frac{4}{3}$****$R^{3}.$

 Для закрепления выведенных формул в конце урока можно предложить практическую работу на вычисление объёмов тел цилиндрической, конической конструкций и объёма шара. Результаты вычислений можно оформить в виде следующей таблицы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тела | Конструкция | Формула вычисления объёма | Результаты вычисления |
| Призма | цилиндрическая | V=S∙H |  |
| Цилиндр | цилиндрическая | V= R²H |  |
| Параллелипипед | цилиндрическая | V=S∙H |  |
| Пирамида | коническая | V=$\frac{1}{3}$ S∙H |  |
| Конус | коническая | V=$\frac{1}{3}$R²H |  |
| Шар | шаровая |  V= $\frac{4}{3}$$R^{3}$ |  |