Методические рекомендации

по изучению темы « Системы счисления» в 9 классе

**ВВЕДЕНИЕ**

Тема «Системы счисления» сегодня рассматривается в курсе информатики в 9 и 10 классах. В 9 классе она изучается в разделе «Кодирование числовой информации» и нужна преимущественно для подготовки к успешной сдачи экзамена в форме государственной итоговой аттестации (ГИА); в 10 классе – является элементом повторения, закрепления и углубления, подготовки к сдаче единого государственного экзамена (ЕГЭ) в 11 классе.

Тема «Системы счисления» имеет прямое отношение к математической теории чисел. Но в школьном курсе математики эта тема, как правило, не изучается. **Необходимость изучения темы** в курсе информатики связана с тем, что числа в памяти компьютера представлены в двоичной системе счисления, а для внешнего представления содержимого памяти, адресов памяти используют шестнадцатеричную или восьмеричную системы счисления. Данная тема является смежной темой с математикой и вносит вклад в фундаментальное математическое образование школьников.

Как правило, при изучении темы «Системы счисления» рассматриваются следующие вопросы:

* позиционные и непозиционные системы счисления;
* основные понятия позиционных систем счисления: основание, алфавит;
* формы представления чисел в позиционных системах;
* перевод чисел из одной системы счисления в другую;
* особенности арифметики в позиционных системах счисления.

Остановимся подробнее на последнем вопросе «Арифметические операции в Р-ичных системах счисления» и рассмотрим его как тему отдельного урока в 10 классе.

**Цель урока** – развитие логического (математического) мышления учащихся в области информатики и расширение навыков реализации теоретических знаний в практической деятельности.

**Задачи:**

* закрепление знаний, умений, навыков работы с позиционными системами счисления (перевода чисел из одной системы счисления в другую);
* знакомство с правилами арифметических операций в Р-ичных системах счисления;
* реализация теоретических знаний в практической деятельности;
* развитие логического мышления посредством решения задач;
* выполнение оперативных и рациональных действий, заданных условиями.

При изучении материала следует учитывать межпредметную связь с математикой (темы «Выполнение арифметических операций»; «Запись натуральных чисел»; «Степень с натуральным, отрицательным, нулевым показателем»), а также внутридисциплинарную связь с темами «Основы алгоритмизации и программирования», «Архитектура ЭВМ», «Кодирование информации».

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**

**Системы счисления: основные понятия**

Современный человек в повседневной жизни постоянно сталкивается с числами: мы запоминаем номера автобусов и телефонов, в магазине подсчитываем стоимость покупок, ведём свой семейный бюджет в рублях и копейках (сотых долях рубля) и т.д. Сегодня числа, цифры с нами везде. А что знал человек о числах несколько тысяч лет назад? Вопрос непростой, но очень интересный. Историки доказали, что и пять тысяч лет назад люди могли записывать числа и производить над ними арифметические действия. Конечно, принципы записи были совсем не такими, как сейчас. Однако уже тогда число изображалось с помощью одного или нескольких символов.

Эти символы, участвующие в записи числа, в математике и информатике принять называть цифрами.

Но что же мы понимаем под словом «число»?

Первоначально понятие отвлечённого числа отсутствовало, число было «привязано» к тем конкретным предметам, которые пересчитывали. Отвлечённое понятие натурального числа появляется вместе с развитием письменности. Дробные же числа изобрели тогда, когда возникла необходимость производить измерения. Измерение, как известно, это сравнение с другой величиной того же рода, выбираемой в качестве эталона. Эталон называется ещё единицей измерения. Понятно, что единица измерения не всегда укладывалась целое число раз в измеряемой величине. Отсюда и возникла практическая потребность ввести более «мелкие» числа, чем натуральные. Дальнейшее развитие понятия числа было обусловлено уже развитием математики.

Понятие числа – фундаментальное понятие как математики, так и информатики.

Сегодня, в XXI веке, для записи чисел человечество использует в основном десятичную систему счисления. А что такое система счисления?

Система счисления – это способ записи (изображения) чисел.

Алфавит - конечный набор (множество) символов.

Различные системы счисления, которые существовали раньше и которые используются в настоящее время, делятся на две группы: позиционные и непозиционные.

Наиболее совершенными являются позиционные системы счисления, т.е. системы записи чисел, в которых вклад каждой цифры в величину числа зависит от её положения (позиции) в последовательности цифр, изображающей число. Например, наша привычная десятичная система является позиционной.

Системы счисления, в которых каждой цифре соответствует величина, не зависящая от её места в записи числа, называются непозиционными.

Позиционные системы счисления – результат длительного исторического развития непозиционных систем счисления.

Позиционную систему счисления с основанием P принято называть P-ичной. Примерами позиционной системы счисления могут служить двоичная, троичная, восьмеричная, шестнадцатеричная и т.д. (табл. 1).

Таблица . Примеры позиционных систем счисления

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Позиционная** **система счисления** | **Основание** | **Алфавит** |
| Двоичная | 2 | 0, 1 |
| Троичная | 3 | 0, 1, 2 |
| Восьмеричная | 8 | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 |
| Десятичная | 10 | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 |
| Шестнадцатеричная | 16 | 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A(10), B(11), C(12), D(13), E(14), F(15) |

Позиция цифры в числе называется разрядом. Для целых чисел разряды нумеруются справа налево, началом отсчета является 0.

## Арифметические операции в Р-ичных системах счисления

### Сложение

Для двоичной системы счисления действуют правила сложения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | + | 0 | = | 0 |
| 0 | + | 1 | = | 1 |
| 1 | + | 0 | = | 1 |
| 1 | + | 1 | = | 1 |

При сложении чисел в произвольной позиционной системе счисле­ния с основанием Р в каждом разряде производится сложение цифр сла­гаемых и цифры, переносимой из соседнего младшего разряда, если она имеется. При этом необходимо учитывать, что если при сложении чисел получилось число большее или равное Р, то его представляют в виде *Рk+b*, где *k* — частное, а *b* — остаток от деления полученного числа на основание системы счисления. Число b является количеством единиц в данном разряде, а число к — количеством единиц переноса в следующий разряд.

Для выполнения этой операции используют таблицы сложения. По вертикали и по горизонтали откладываются числа алфавита. На пересечении строки и столбца получается результат операции.

Примеры:

$$\frac{+\begin{matrix}1010111\_{2}\\0000101\_{2}\end{matrix}}{ 1011100\_{2}} \frac{+\begin{matrix}1011,01\_{2}\\1000,11\_{2}\end{matrix}}{ 10100,00\_{2}} \frac{+\begin{matrix}53\_{8}\\47\_{8}\end{matrix}}{ 122\_{8}} \frac{+\begin{matrix}46,02\_{8}\\12,10\_{8}\end{matrix}}{ 60,12\_{8}} $$

### Вычитание

Для двоичной системы счисления действуют правила вычитания:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | – | 0 | = | 0 |
| 0 | – | 1 | = | 11 |
| 1 | – | 0 | = | 1 |
| 1 | – | 1 | = | 0 |

При вычитании чисел в Р-ичной системе счисления цифры вычитают­ся поразрядно. Если в рассматриваемом разряде необходимо от меньше­го числа отнять большее, то занимается единица следующего (большего) разряда. Занимаемая единица равна Рединицам этого разряда (аналогич­но, когда занимают единицу в десятичной системе счисления, то зани­маемая единица равна 10).

Для вычитания также используется таблица сложения. Предположим, нужно вычесть цифру b из числа a. Алгоритм действий в таком случае:

1. Найти строку, именованную цифрой b.
2. В этой строке найти цифру a.
3. Посмотреть, какой цифрой именован столбец, на пересечении которого с цифрой получается результат a.

Эта схема работает, если a≥b. В противном случае, следует занять единицу старшего разряда.

Примеры:

$$\frac{-\begin{matrix}1001\_{2} \\0110\_{2} \end{matrix}}{ 0011\_{2} } \frac{-\begin{matrix}100,10\_{2}\\ 01,00\_{2}\end{matrix}}{ 11,00\_{2}} \frac{-\begin{matrix}43,50\_{8}\\ 11,44\_{8} \end{matrix}}{ 32,04\_{8} }$$

### Умножение

Для двоичной системы счисления действуют правила умножения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | ∙ | 0 | = | 0 |
| 0 | ∙ | 1 | = | 0 |
| 1 | ∙ | 0 | = | 0 |
| 1 | ∙ | 1 | = | 1 |

При умножении чисел в Р-ичной системе счисления каждая цифра вто­рого множителя умножается последовательно на цифру каждого из раз­рядов первого множителя (так же, как и в десятичной системе счисления).

При этом необходимо учитывать, что если при сложении чисел получилось число большее или равное Р, то его представляют в виде *Рk+b*, где *k* — частное, а *b* — остаток от деления полученного числа на основание системы счисления. Число *b* записывают в едини­цы данного разряда, а число *k* запоминают и добавляют его к результату произведения в следующем разряде.

Полученные результаты умножения складывают и отделяют количество знаков после запятой, рав­ное сумме знаков после запятой у сомножителей.

По сути, это то же самое умножение столбиком, которое применяется в десятичной системе счисления. Единственное отличие – для проведения этой операции в P-ичной системе необходимо использовать  таблицы сложения для этой P-ичной системы счисления.

Примеры:

$$\frac{×\begin{matrix}1011101\_{2}\\ 101\_{2}\end{matrix}}{\frac{+\begin{matrix}1011101\_{2}\\ 1011101\_{2} \end{matrix}}{ 111010001\_{2} }} \frac{×\begin{matrix}101,01\_{2}\\ 101,1\_{2}\end{matrix}}{\frac{+\begin{matrix}\begin{matrix} 10101\_{2} \\10101\_{2} \end{matrix}\\\begin{matrix}00000\_{2} \\10101\_{2} \end{matrix}\end{matrix}}{11100,111\_{2} }}$$

### Деление

Для двоичной системы счисления операция деления выполняется по алгоритму, подобному алгоритму выполнения операции деления в десятичной системе счисления.

Деление чисел в Р-ичной системе счисления производится так же, как и десятичных чисел, при этом используются правила умножения, сложения и вычитания чисел в Р-ичной системе счисления. Делить следует также «столбиком», однако, как и в случае умножения, использовать таблицы умножения и сложения для P-ичной системы счисления.

Примеры:

$$\begin{matrix}1000101\_{2}|\frac{11\_{2}}{10111\_{2}}\\\frac{-11 }{\begin{matrix}0101 \\\frac{-11 }{\begin{matrix}100 \\\frac{-11 }{\begin{matrix}011 \\\frac{-11 }{0}\end{matrix}}\end{matrix}}\end{matrix}}\end{matrix}\begin{matrix}105\_{8}|\frac{3\_{8}}{27\_{8}}\\\frac{-6 }{\begin{matrix}25 \\\frac{-25 }{0}\end{matrix}}\end{matrix}$$

В качестве альтернативы можно выделить и другой подход. Перед началом выполнения операций можно перевести все слагаемые в десятичную систему счисления, выполнить в привычной форме необходимые расчеты, а результат перевести обратно в системы с основанием P.

### Таблицы сложения и умножения

### (для двоичной и восьмеричной систем счисления)

Таблица . Таблица сложения в двоичной системе счисления

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **+** | **0** | **1** |
| **0** | 0 | 1 |
| **1** | 1 | 10 |

Таблица . Таблица умножения в двоичной системе счисления

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **\*** | **0** | **1** |
| **0** | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 |

Таблица 4. Таблица сложения в восьмеричной системе счисления

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **+** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
| **0** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 |
| **2** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 |
| **3** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 |
| **4** | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| **5** | 5 | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| **6** | 6 | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| **7** | 7 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

Таблица 5. Таблица умножения в восьмеричной системе счисления

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **\*** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 11 | 14 | 17 | 22 | 25 |
| **4** | 0 | 4 | 10 | 14 | 20 | 24 | 30 | 34 |
| **5** | 0 | 5 | 12 | 17 | 24 | 31 | 36 | 43 |
| **6** | 0 | 6 | 14 | 22 | 30 | 36 | 44 | 52 |
| **7** | 0 | 7 | 16 | 25 | 34 | 43 | 52 | 61 |

Составить таблицу умножения или сложения для любого основания можно самостоятельно. Для этого нужно:

1. В крайних левом вертикальном столбце и верхней горизонтальной строке записать алфавит  (цифры записываются по возрастанию). В ячейке, основанной на пересечении *i*-й строчки и *j*-го столбца, будет записан результат операции.
2. Сосчитать значения i \* j или i + j  как в обычной десятичной системе. Перевести результат в систему счисления с исходным основанием.

**ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**

 Практическая часть по исследуемой теме, как правило, представлена задачами на выполнение арифметических операций в позиционных системах счисления с различными основаниями. Такие задачи встречаются в вариантах ГИА, ЕГЭ. В них предлагается сложить 2 или 3 числа, заданных в родственных системах счисления.

 Задачи можно решать, используя перевод исходных чисел в десятичную систему счисления. Однако в некоторых случаях можно использовать перевод и сложение чисел в двоичной системе счисления.

 Наиболее простыми являются задания, в которых варианты ответов заданы в двоичной форме, так как решение в этом случае можно свести к сложению двоичных чисел и сразу получить нужный ответ. Некоторые задания требуют приведения и исходных данных, и вариантов ответа либо к двоичной, либо к десятичной системе счисления.

Рассмотрим решение некоторых из них.

**Задача 1.**

Вычислить сумму чисел X и Y, если X=10101112, Y=1528. Результат представить в двоичном виде.

Решение.

Поскольку результат нужно представить в двоичной системе счисления, наиболее удобно и быстро решить данную задачу путем перевода всех чисел в двоичную систему счисления.

Число X уже представлено в двоичной системе счисления: X=10101112. Переведем число Y из восьмеричной в двоичную систему счисления, разбив его на триады:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 5 | 2 |
| 001 | 101 | 010 |

Получили Y=1528=11010102.

Сложим двоичные числа X и Y столбиком:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| + | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 12 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 02 |
| **1** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **12** |

Результатом решения задачи является число 110000012.

Ответ: 110000012.

**Задача 2.**

Чему равна сумма чисел 528 и А916 в двоичной системе счисления?

Задачу можно решить двумя способами.

Способ 1.

Переведем исходные числа в десятичную систему счисления путем разложения по степеням:

528 = 5\*81 + 2\*80 = 40 + 2 = 4210,

А916 = 10\*161 + 9\*160 = 160 + 9 = 16910.

Находим сумму десятичных чисел: 4210 + 16910 = 21110.

Переводим полученное десятичное число в двоичную систему счисления путем деления и выделения остатков:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| – | 211 | 2 |  |  |  |  |  |  |
| 210 | 105 | 2 |  |  |  |  |  |
|  | **1** | 104 | 52 | 2 |  |  |  |  |
|  |  | **1** | 52 | 26 | 2 |  |  |  |
|  |  |  | **0** | 26 | 13 | 2 |  |  |
|  |  |  |  | **0** | 12 | 6 | 2 |  |
|  |  |  |  |  | **1** | 6 | 3 | 2 |
|  |  |  |  |  |  | **0** | 2 | **1** |
|  |  |  |  |  |  |  | **1** |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

21110 = 110100112.

Ответ: 110100112.

Способ 2.

Переведем исходные числа в двоичную систему счисления путем разбиения на триады и тетрады:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5 | 2 |  |  |  | А | 9 |
| 101 | 010 |  |  |  | 1010 | 1001 |

528 = 1010102,

А916 = 101010012.

Сложим полученные двоичные числа столбиком:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| + |  |  | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 02 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 12 |
|  | **1** | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** | **1** | **12** |

В результате сложения получили двоичное число 110100112.

Ответ: 110100112.

**Задача 3.**

Из разности двух восьмеричных чисел 100100 и 61556 вычесть сумму двух шестнадцатеричных чисел FAD и CDC, а затем для числа, полученного в результате, выяснить, в какой системе счисления это число будет иметь вид 1001001?

Решение.

Найдем разность восьмеричных чисел:

1001008 – 615568 = 163228

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| – | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 08 |
|  | 6 | 1 | 5 | 5 | 68 |
|  |  | **1** | **6** | **3** | **2** | **28** |

Найдем сумму шестнадцатеричных чисел:

FAD16 + CDC16 = 1C8916

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| + |  | F | A | D16 |
|  | C | D | C16 |
|  | **1** | **С** | **8** | **916** |

Для выполнения вычитания переведем полученное шестнадцатеричное число в восьмеричную систему счисления с помощью триадно-тетрадного метода:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | С | 8 | 9 | (16) |
|  | 0001 | 1100 | 1000 | 1001 | (2) |
| 1 | 110 | 010 | 001 | 001 | (2) |
| **1** | **6** | **2** | **1** | **1** | **(8)** |

Найдем разность восьмеричных чисел:

168 – 615568 = 163228

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| – | 1 | 6 | 3 | 2 | 28 |
| 1 | 6 | 2 | 1 | 18 |
|  |  |  | **1** | **1** | **18** |

Определим основание системы счисления, в которой восьмеричное число 111 будет иметь вид 1001001 методом перебора. По значению чисел примем гипотезу о двоичной системе счисления. Разобьем восьмеричное число 111 на триады:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 |
| 001 | 001 | 001 |

Получаем, что 1118 = 10010012, что и требовалось выяснить.

Ответ: 1118 = 10010012.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Тема, рассмотренная в данной работе, посвящена ключевому понятию математики, а вместе с тем и информатики, – числу, а также системам счисления – способам записи чисел в виде, удобном для прочтения и выполнения арифметических операций.

С понятием «система счисления» учащиеся впервые встречаются в 5 классе основной школы, когда знакомятся с десятичной системой счисления, и в дальнейшем по школьной программе более подробно изучается именно эта система счисления (арифметические действия, признаки делимости).

Учащиеся вновь обращаются к этой теме и встречаются с понятием «системы счисления» при изучении базового курса информатики. К сожалению, на ее изучение отводится мало часов, и по программе рекомендуется рассматривать те системы счисления, которые используются в компьютере (двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную). На арифметику в этих системах счисления, включая арифметические действия, признаки делимости, разнообразные текстовые и игровые задачи, времени практически не остается.

Однако, работая на компьютере, учащиеся видят «внешние» результаты этой работы, и вопрос, как и что происходит внутри компьютера, всегда их интересует.

Содержание темы рассматривает вопросы истории числа, системы счисления с различными основаниями, арифметические операции и признаки делимости в этих системах, смешанные системы счисления, перевод числа, включая дробные числа, из одной системы счисления в другие.

Задачи, разбираемые в теме, интересны и часто непросты в решении, что позволяет повысить учебную мотивацию учащихся, и дает им возможность проверить свои способности к математике и информатике.

По мере изучения темы появляются следующие учебные эффекты:

* расширяются знания учащихся о числе, способах его
записи;
* складывается представление о многообразии систем счисления, их
классификации и истории возникновения;
* формируются навыки перевода чисел из одной позиционной системы счисления в другую и выполнения арифметических операций в них;
* создаются условия для развития у учащихся интереса к изучению математики и информатики;
* раскрывается умение самостоятельно приобретать и применять знания;
* развиваются логическое и алгоритмическое мышление, творческие способности и коммуникативные навыки.

После изучения материала учащиеся овладевают следующими знаниями, умениями и навыками:

* умеют представлять числа и выполнять арифметические действия в различных системах счисления;
* умеют устанавливать связь между системами счисления;
* умеют осуществлять перевод чисел из одной системы счисления в другую;
* умеют находить оптимальный и рациональный способ решения поставленной задачи.

Важным результатом изучения темы «Арифметические операции в Р-ичных системах счисления» становится углубление имеющихся знаний по предмету, формирование основы научного мировоззрения в области информатики и развитие интереса к информатике, как науке.

**СОДЕРЖАНИЕ**

Введение 3

Теоретическая часть 5

Системы счисления: основные понятия 5

Арифметические операции в Р-ичных системах счисления 6

Таблицы сложения и умножения (для двоичной и восьмеричной систем счисления) 9

Практическая часть 11

Задача 1 11

Задача 2 11

Задача 3 13

Заключение 14

Список литературы 15

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Информатика и ИКТ. Профильный уровень: учебник для 10 класса / Н.Д. Угринович. – 6-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 387 с.: ил.
2. Радюк Л. Алгоритм перевода в двоичную и из двоичной системы счисления.// Наука и жизнь. 2005, №1.
3. С. Б. Гашков. Системы счисления и их применение. М.: МЦНМО, 2004. — 52 с.: ил.
4. Сидоров В.К. Системы счисления.// Наука и жизнь, 2008, №2.
5. Технология разработки элективных курсов / А.А. Зубрилин, И.С. Паркина // Информатика и образование. – 2006. – №1.