Введение в комбинаторику.

Комбинаторные задачи в программировании.

**Содержание**

[Введение 3](#_Toc257486063)

[Перестановки. Правило умножения 3](#_Toc257486064)

[Перестановки. Правило сложения. Понятие факториала 6](#_Toc257486065)

[Сочетания 8](#_Toc257486066)

[Теорема 5. Правило Паскаля 10](#_Toc257486067)

[Перестановки с повторениями 11](#_Toc257486068)

[Циклы с заранее известным числом повторений 13](#_Toc257486069)

[Заключение 15](#_Toc257486070)

[Приложение №1. Задачи. 16](#_Toc257486071)

[Приложение №2. Задачи 17](#_Toc257486072)

[Приложение №3. Задачи 18](#_Toc257486073)

[Приложение 5. Поурочное планирование. 21](#_Toc257486074)

[Список литературы 21](#_Toc257486075)

## Введение

Известно, что теме «комбинаторика» в курсе математики уделяется недостаточно внимания, между тем комбинаторные задачи имеют огромное практическое применение при решении прикладных задач, особенно в условиях рыночной экономики. Комбинаторные методы используются для решения задач линейного программирования, для составления и декодирования шифров, для решения маркетинговых задач и задач прикладной статистики, для составления биржевых прогнозов.

Решение с учащимися комбинаторных задач на уроках информатики способствует значительному повышению их математической и алгоритмической культуры: развивается динамичность мышления, его гибкость, формируется умение разделить сложный объект на простые составляющие и определить взаимосвязи между ними. Все это необходимо для изучения и построения формальных моделей и позволяет научиться такому подходу к любой задаче, при котором решение задачи выступает как объект конструирования и изобретения. В условиях рынка важно уметь выбирать из многих возможностей наиболее приемлемые, просчитывать варианты.

Комбинаторные задачи предоставляют богатый материал для изучения основных конструкций, методов и приемов программирования, позволяют показать не только красоту математики, но и возможности новых компьютерных технологий при решении практических математических задач.

Опыт проведения уроков, посвященных этому классу задач, подтвердил роль комбинаторных задач в развития мышления учащихся, формировании умения ставить проблему, выдвигать гипотезу решения и проверять её. В результате укрепляются межпредметные связи и учащиеся понимают, что информатика – это не только умение нажимать нужные кнопки в определенной ситуации, но и наука, тесно связанная с математикой.

## Перестановки. Правило умножения

Многие поколения людей интересовали задачи, в которых необходимо было найти количество способов расположения множества объектов. Сколькими способами можно поставить 10 человек в очередь к билетной кассе? Сколько существует различных автомобильных номеров? Сколько «счастливых» трамвайных билетов? Сколько способов выбора маршрута из пункта А в пункт Б ? и т.п.

Рассмотрим пример 1. Сколькими способами можно расставить на полке 3 книги ? (Обозначим их А, В, С ).

*Решение 1.* На первое место мы можем поставить любую из трех книг, следовательно это можно сделать тремя способами, поставив книгу А, или В, или С. Остаются две книги. На второе место можно поставить любую из двух оставшихся, т.е. имеем две возможности заполнить второе место на полке. На третье место ставим оставшуюся одну книгу:

книга на 1 книга на 2 книга на 3 Возможные размещения

месте месте месте

В С АВС

А

С В АСВ

А С ВАС

О В

С А ВСА

А В САВ

С

В А СВА

Получили граф (в математике графами называют геометрические фигуры, состоящие из точек-вершин, и линий, их соединяющих, - рёбер), называемый деревом. Точка О – вершина графа. Двигаясь от вершины к правым крайним точкам дерева, получаем все шесть возможных размещений.

Основным различием этих размещений служит ***порядок объектов***; изменение порядка дает другое размещение.

*Решение 2.* Будем рассуждать так: требуется заполнить три места на полке. Изобразим их так:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

На первое место мы можем поместить А, либо В, либо С. Следовательно, первое место на полке может быть заполнено тремя способами:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3 |  |  |

( На дереве этот факт иллюстрируется тремя ветвями, исходящими из т.О).

Для каждого из этих трех способов заполнения первого места есть 2 варианта заполнения второго места, т.к. можно поставить любую из оставшихся 2-х книг:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3 | 2 |  |

После заполнения первого и второго места остается одна книга, следовательно, для каждого из шести вариантов заполнения 1-го и 2-го места остается один вариант заполнения 3-го места:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3 | 2 | 1 |

Общее число размещений находится умножением: 3\*2\*1=6

**Определение.** Подобные размещения называются линейными, т.к. они подобны упорядочению точек на прямой. (В отличие, например, от расположения цветов в вазе).

Для описанного типа размещений введем специальное название.

**Определение**. ***Перестановкой*** некоторого количества объектов называется подобное размещение объектов в определенном линейном порядке.

Т.О., «переставить» множество объектов – значит расположить их в каком-то выбранном порядке.

Рассмотрим пример 2. Пусть имеется три экземпляра книги А, три экземпляра книги В и три экземпляра книги С. Сколькими различными способами можно расставить на полке три книги ? (Экземпляры считаем неразличимыми между собой).

*Решение.* Вспомним второй способ решения предыдущей задачи. Теперь на первое место мы можем поставить любую из трех книг, на второе – тоже любую из трех книг, на третье – также любую из трех:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 3 | 3 | 3 |

Как и раньше, общее количество перестановок найдем умножением: 3\*3\*3=27.

Когда число объектов велико, практически невозможно выписать все перестановки этих объектов и сосчитать их количество. Приведенный выше способ рассуждения допускает обобщение, и мы получаем удобный универсальный метод решения задач на перестановки. В основе этого метода лежит следующее утверждение:

**Правило умножения*.***

*Пусть необходимо выполнить одно за другим какие-то k действий.*

*Если первое действие можно выполнить n1  способами, после чего второе действие можно выполнить n2 способами, после чего третье действие можно выполнить n3 способами, и так далее до k-го действия, которое можно выполнить nk способами, то все k действий вместе могут быть выполнены*

|  |  |
| --- | --- |
| n1\*n2\*n3\*...\*nk | способами |

Пример 3. Номер автомобиля состоит из пяти мест, на первом – буква, затем – три цифры, за ними еще две буквы. Сколько существует автомобильных номеров ?

Могут быть использованы любые из 33 букв русского алфавита, кроме «ь», «ъ» и «й».

*Решение.* На первое место можно поставить любую из 30 букв. На второе – любую из 10-ти цифр, на третье – также любую из 10 цифр. На 4-е место можно поставить любую из 30-ти букв, на 5-е – также любую из 30 букв. По правилу умножения имеем:

30\*10\*10\*10\*30\*30=27\*106

Такое количество номеров автомобилей может быть выдано ГАИ в Саратовской области!

Задача. (самостоятельно). Сколько пятибуквенных «слов» можно составить из букв русского алфавита ?(«словом» будем называть любую комбинацию из букв)(подсказка: учесть, что «слово» не может начинаться на «ь», «ъ» и «й»).

*Решение*. Т.к. количество букв условием задачи не ограничено, то по правилу умножения имеем: 30\*33\*33\*33\*33= 35577630

**Вывод.** *Пусть имеются два действия, первое из которых может быть выполнено m способами, а второе – n способами****. Правило умножения*** *утверждает: если, после того, как первое действие выполнено любым из* ***m*** *способов, второе можно выполнить* ***n*** *способами, то оба действия вместе могут быть выполнены* ***mn*** *способами. Т.о., это такая ситуация, когда мы можем выполнить сначала первое действие, а затем второе.*

Задачи для самостоятельного решения в приложении №1

При решении этих задач следует использовать правило умножения.

## Перестановки. Правило сложения. Понятие факториала

Рассмотрим следующую задачу. Имеются три различных флага. На флагштоке поднимается сигнал, состоящий не менее чем из двух флагов. Сколько различных сигналов можно поднять на флагштоке, если порядок флагов в сигнале учитывается ?

Условимся первым действием считать подъем на флагштоке двух флагов, а вторым действием – трех флагов. По правилу умножения два флага можно поднять **3\*2**, или шестью, способами. Три флага **– 3\*2\*1** , т.е. шестью способами.

Т.к. требуется поднять только один сигнал, то это может быть либо сигнал из двух флагов, либо сигнал из трех флагов. В данном случае надо выполнить либо первое действие, либо второе, но не первое, а затем второе.

Эти действия взаимно исключают одно другое: они не могут быть выполнены одновременно. Поэтому общее количество способов равно

**6+6=12.**

*Правило сложения*. Если два действия взаимно исключают одно другое, причем одно из них можно выполнить m способами, а другое – n способами, то какое-либо одно из них можно выполнить m+n способами.

Решим еще одну задачу. Сколько сигналов можно поднять на мачте, имея четыре флага различных цветов, если каждый сигнал должен состоять не менее чем из двух флагов ?

*Решение*. Из условия задачи следует, что каждый сигнал может состоять либо из двух, либо из трех, либо из четырех флагов. Из двух флагов можно поднять 4\*3=12 сигналов, а из трех 4\*3\*2=24 сигнала и из четырех 4\*3\*2\*1=24 сигнала . Итого по правилу сложения 12+24+24=60 сигналов.

Правило умножения дает общий метод нахождения числа перестановок множества объектов. Например, 5 человек могут стать в очередь 5\*4\*3\*2\*1 способами.

**Определение.** Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначается n! (читается «n факториал»).

Вычислить n! при больших n трудно, т.к. с увеличением n факториалы очень быстро растут. Так, 10! – число порядка 3.5 миллионов, а число перестановок букв русского алфавита, равное 33! Больше, чем 4\*1033 .

Т.о., из предыдущих рассуждений следует

**Теорема 1.** *Число перестановок из n элементов по n равно n!. Оно обозначается* *******.*

*Поэтому*

***=n!***

Рассмотрим еще одну задачу. Сколькими способами из семи книг можно отобрать три и расставить их на три места на полке ?

*Решение.* По правилу умножения все три места можно заполнить 7\*6\*5 способами. Запишем это выражение, используя символ факториала:

7\*6\*5==

Число перестановок из семи объектов по три обозначается  и равно 7\*6\*5.

Поэтому

=

**Определение**. ***Размещением*** *из* ***n*** *элементов по* ***m*** *называется произвольная перестановка* ***m*** *элементов, которые принадлежат множеству, содержащему всего* ***n*** *элементов*.

Из предыдущих рассуждений следует:

**Теорема 2**. *Число размещений из* ***n*** *элементов по* ***m*** *равно (при условии, что* ***n<m****)*

Доказательство. Применим правило умножения: предположим, что надо заполнить m мест, используя n элементов. На первое место можно поставить любой из n элементов, на второе – любой из оставшихся (n-1) элементов, на третье – любой из оставшихся (n-2) элементов, и т.д. По правилу умножения все m мест можно заполнить

**= n(n-1)(n-2)…(n-m+1)** способами.

Это выражение содержит m сомножителей.

Из этой формулы следует, что 

Приняв 0!=1, получаем число перестановок из n элементов по n.

Решим задачу 1:

Сколько четырехбуквенных слов можно составить из слова «четырехугольник» ?

(Под «словом» будем понимать любое размещение из букв, составляющих слово «четырехугольник»).

*Решение.* Задача состоит в том, чтобы найти число перестановок из 15 букв по 4.

Это число равно

=15\*14\*13\*12=1 073 217 600

Усложним задачу:

Задача 2. Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из всех букв слова «четырехугольник» ? Сколько среди них таких, в которых буквы «г» и «и» стоят рядом ?

В которых эти буквы не стоят рядом ?

*Решение.* Согласно теореме 1, количество перестановок из 15 букв по 4 равно .

Если же в них буквы «г» и «и» должны стоять рядом, то разумно рассмотреть их как одну букву «ги». Теперь нам надо составить трехбуквенные слова из заданного слова «четырехугольник», только количество букв будет на одну меньше = 14. Их будет . Однако порядок «ги» можно заменить на «иг», поэтому таких слов будет в два раза больше: 2\*. Число слов, в которых «г» и «и» не стоят рядом, будет равно разности

-2\*.

Задачи для самостоятельного решения в приложении №2

При решении этих задач следует использовать правило умножения.

## Сочетания

Чтобы понять, в чем разница между перестановками и сочетаниями, решим следующую задачу.

Задача 1. Сколькими способами можно отобрать три книги из четырех, обозначенных A, B, C и D без учета их порядка.

*Решение.* Из предыдущих уроков известно, что число перестановок из четырех различных книг по три равно

=4\*3\*2=24

В этих перестановках (размещениях) учитывается порядок книг.

Если порядок не учитывать, то существует только четыре возможных выбора:

ABC, ABD, ACD, BCD. (1)

Здесь нет, например, ACB и BCA, т.к. для данной задачи такой выбор совпадает с ABC.

Каждый выбор трех книг в списке (1) называется ***сочетанием*** из четырех книг по три.

Общее число таких сочетаний обозначается , или  и читается «число сочетаний из четырех по три».

Таким образом, ***в перестановках порядок элементов учитывается, а в сочетаниях не учитывается.***

Понятно, что необходимость учитывать или нет порядок элементов диктуется условиями поставленной задачи. Если мы расставляем книги на полке, то естественно порядок их учитывать. Но если эти же книги мы отбираем для того, чтобы взять с собой на дачу для чтения, то учитывать порядок не имеет смысла. Если несколько человек становятся в очередь к кассе, то порядок важен, а если эти же люди собираются в приемную комиссию вуза, то порядок не важен, если все члены комиссии равноправны.

**Определение***.* ***Сочетание*** – *это набор объектов, рассматриваемый без учета их порядка.* ***Сочетанием*** *из* ***n*** *элементов по* ***r*** *называется произвольное неупорядоченное* ***r****-элементное подмножество множества, содержащего* ***n*** *различных объектов. Общее число таких сочетаний обозначается через  или  ; здесь* ***r <= n.***

Вычислим ** . Рассмотрим список (1), в котором представлены все возможные наборы из четырех книг по три. Переставляя всеми способами книги в каждом наборе, мы получим, что любому набору из трех книг соответствует шесть перестановок этих книг, т.е. 3! . В результате получаются 4\*3!, или 24 перестановки. Выпишем их в таблицу:

|  |  |
| --- | --- |
| Сочетания | Перестановки |
| ABC  ABD  ACD  BCD | ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA  ABD, ADB, BAD, BDA, DBA, DAB  ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA  BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB |

Ясно, что 24 перестановки из четырех книг по три получены всевозможными перестановками в сочетаниях из четырех книг по три. Иными словами,

(число сочетаний)\*3!=(числу перестановок) или

 \*3!= .

Поэтому \* 3!=4\*3\*2.

Эти рассуждения можно обобщить:

**Теорема 3**. Число сочетаний из n элементов по r равно

****=  =** 

**Следствие 4**. *Число сочетаний из* ***n*** *элементов по* ***(n-r)*** *равно числу сочетаний из* ***n*** *элементов по* ***r*** *:*

*** = =***

Задача 2. Колода игральных карт насчитывает 52 различные карты. Сколькими способами можно сдать 13 карт на руки одному игроку? По 13 карт двум игрокам?

*Решение*. поскольку порядок карт не играет роли, то 13 карт одному игроку можно сдать

 способами. По 13 карт двум игрокам:  способами.

Задача 3. Сколькими способами можно отобрать несколько книг (не менее одной) из пяти одинаковых учебников алгебры и четырех одинаковых учебников геометрии?

*Решение*. Так как учебники алгебры все одинаковые и учебники геометрии тоже одинаковые, то можно взять либо один, либо два, либо три, либо четыре, либо пять, либо ни одного учебника алгебры. Следовательно учебники алгебры можно отобрать 6 способами. Рассуждая так же, придем к выводу, что учебники геометрии можно отобрать пятью способами. Итого 6\*5 способов. Но среди них будет один, когда мы не отберем ни одного учебника, и его надо исключить, поэтому: 6\*5-1 способов.

## Теорема 5. Правило Паскаля

=+

Доказательство.

Количество сочетаний без повторений по r элементов, которые можно выбрать из n+1 объектов, равно . Рассмотрим некоторый определенный объект этого множества. Если этот определенный объект *входит* в сочетание, то остальные r-1 объектов можно отобрать среди оставшихся n объектов способами. Если же этот объект *не входит* в сочетание, то r объектов можно отобрать среди оставшихся n объектов  способами. Общее число сочетаний получается сложением числа сочетаний, содержащих рассматриваемый объект, с числом сочетаний, в которых он не содержится, поскольку никакой другой случай невозможен. Поэтому общее количество сочетаний из n+1 элементов по r равно

+=

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

В этом доказательстве применяется правило сложения, а не умножения. В решении представлены два действия, которые не могут быть выполнены одновременно, т.е. *или* это действие, *или* то действие. Такие действия взаимно исключают одно другое; их нельзя выполнить вместе.

Правило Паскаля дет простой способ построения таблицы значений , известной как треугольник Паскаля. В таблице 1 показана часть этого треугольника для значений n от 0 до 10. Строки таблицы соответствуют значениям n, а столбцы – значениям r.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| r  n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 2 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |  |  |  |  |  |  |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |  |  |  |  |  |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |  |  |  |  |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 |  |  |  |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |  |  |
| 9 | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 |  |
| 10 | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |

Первые и последние элементы любой строки равны 1, потому что ==1.

Любой другой элемент таблицы, согласно правилу Паскаля, равен сумме элемента, который стоит непосредственно над ним , и элемента, стоящего над ним слева. Например, элемент отвечающий значениям n=3 и r=2, стоит в четвертой строке и третьем столбце таблицы; он равен сумме элемента, стоящего в третьей строке и третьем столбце, и элемента, стоящего в третьей строке и во втором столбце, поскольку =+

Задачи для самостоятельного решения в приложении №3

При решении этих задач следует использовать правило умножения.

## Перестановки с повторениями

Выше были рассмотрены размещения множеств таких объектов, которые отличались один от другого. Чему будет равно число возможных перестановок множества объектов, если в этом множестве некоторые объекты одинаковы? Ясно, что если какие-то объекты множества невозможно отличить друг от друга, то число всех возможных перестановок объектов этого множества уменьшается. Так например, из трех букв А, В, С можно образовать 3! трехбуквенных слов, а из букв А, А, А – только одно.

Решим задачу 1. Сколько различных слов можно образовать из всех букв слова «атака»? Решение. Если бы буквы а различались между собой, то, как уже известно, существует 5! перестановок пяти различных букв. Сведем эту задачу к известной, а именно будем временно считать, что все буквы а разные. Обозначим неизвестное нам число перестановок х. Обозначим три буквы а так: а1, а2, а3. Переставляя эти три буквы, получим 3! перестановок. Так как пять букв теперь все различны, то х\*3!=5!, следовательно, х=.

Так же мы рассуждали, когда находили . Обобщая вышесказанное, получим следующую теорему:

***Теорема 6.*** *Перестановки объектов с повторениями. Пусть дано множество из n элементов, в котором n1 элементов принадлежат к первому типу, n2 элементов принадлежат к n2 типу, n3 элементов принадлежат к третьему типу, и так далее до nк элементов к-го типа, причем элементы одного и того же типа не различимы между собой. Тогда общее число перестановок данного множества n элементов равно*

******

*где*

*n1+n2+n3+…+nk=n.*

***Следствие 7****. Число перестановок в случае двух типов объектов. Если множество из n элементов состоит из r элементов одного типа и n-r элементов другого типа, то число перестановок данного множества из n объектов равно*

***=*=**

Доказательство. (а) Доказательство немедленно следует из теоремы 6, если мы положим n1=r и n2=n-r. Можно дать другое доказательство этой теоремы.

(б) Предположим, что надо расставить по порядку r одинаковых объектов, которые мы обозначим А, и n-r одинаковых объектов, отличных от предыдущих, которые мы обозначим В. Количество способов, которыми можно отобрать r мест для размещения объектов А из всех n мест, равно , после чего эти объекты можно расположить на выбранных местах одним способом. Далее, объекты типа В можно расположить на оставшихся n-r местах \*1, или одним, способом. Следовательно, общее число размещений равно .

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Т.о., из предыдущего доказательства следует, что число перестановок данного множества из n объектов, где r объектов относятся к одному типу, а остальные – к другому типу, совпадает с числом сочетаний из n различных объектов по r.

Задача 2. Сколько различных перестановок можно образовать из всех букв слова «Миссисипи»?

Решение. В данном слове 9 букв, в том числе одна буква «м», три – «с», четыре буквы «и» и одна «п». Следовательно, n1=1, n2=3, n3=4 и n4=1. По теореме 6 общее число перестановок из этих букв будет равно

=2520

Задача 3. Сколько различных перестановок можно образовать из всех букв слова «удобрения», если все гласные буквы должны идти друг за другом в следующем порядке: у, о, е, и, я?

Решение 1. Так как порядок гласных не может быть изменен, то гласные нельзя переставлять между собой; поэтому в этой задаче их можно считать неразличимыми. Таким образом задача сводится к нахождению числа всех возможных перестановок из девяти букв по девяти, причем пять из этих букв совпадают. В силу теоремы 6 это число равно

=3024

Решение 2. Надо разместить 9 букв на 9 подряд идущих мест. Места для гласных можно выбрать способами, и, после того как это сделано, их можно поставить на выбранные места одним способом – в заранее указанном порядке. Согласные можно расставить на оставшихся 4-х местах 4! Способами. Следовательно, общее число перестановок этих букв равно

\*1\*4!=\*4!==3024.

Задача 4. Дано n букв А и r букв Б. Сколько различных слов можно образовать из этих букв так, чтобы каждое слово содержало все n букв А?

Решение. Можно составить слово из n букв А и совсем не брать буквы Б, можно составить слово из n букв А и одной Б, можно из n букв А и двух Б, и т.д. Итого будем иметь r+1 взаимно исключающих друг друга случаев. Соответствующие количества слов будут:

n букв А, 0 букв Б — 

n букв А, 1 буква Б —

n букв А, 2 буквы Б —

n букв А, 3 буквы Б — 

…………………………………

n букв А, r букв Б — 

Количество слов в каждом случае вычислено по формуле следствия 7.

Так как эти случаи взаимно исключают друг друга, то по правилу сложения имеем общее число слов равным такой сумме:

++++ … +

Замечание. Эта сумма равна, что можно показать последовательным применением правила Паскаля:

+=+=

+=

и т.д. Окончательно на r шаге получим

**+=**

## Циклы с заранее известным числом повторений

Оператор цикла является важнейшим оператором любого языка программирования. Цикл позволяет многократно выполнить некоторую последовательность действий, задаваемых операторами, составляющими тело цикла.

Оператор цикла For..do имеет следующую структуру:

For I:=N1 to N2 do

< тело цикла>;

Здесь

I - переменная цикла перечисляемого типа (целая, символьная и т.д.)

N1 - начальное значение переменной цикла

N2 - конечное значение переменной цикла

Рассмотрим наиболее простой случай, когда I - переменная целого типа, N1<N2. N1, N2 – целые константы. Цикл будет выполняться (N2-N1+1) раз с шагом 1, т.е. с каждым следующим выполнением тела цикла переменная I будет увеличиваться на 1.

Другой цикл

For I:=N1 Downto N2 do

< тело цикла>;

аналогичен предыдущему, за исключением того, что в нем переменная цикла на каждом шаге выполнения не увеличивается, а уменьшается на 1.

Тело цикла может содержать либо один оператор, либо последовательность операторов, заключенных в операторные скобки Begin..End.

Решим несколько задач.

Задача 1. Вычислим сумму натуральных чисел от 1 до n. Число n зададим в разделе описания констант.

Program Pr\_1;

Const

n=20;

var

i, summa: word; { тип word позволяет задать числа от 0 до 65535 без знака}

{ под число отводится 2 байта }

Begin

{ переменной summa присвоим начальное значение 0}

summa:=0;

For i:=1 to n do

summa:=summa + i;

writeln(‘Сумма натуральных чисел от 1 до ’,n,’ равна ’,summa);

writeln(‘нажмите клавишу <Enter>’);

readln;

end.

Из математики известно, что сумма эта равна n(n+1)/2. Проверьте результат работы программы.

Задание 1. Измените программу так, чтобы число n вводилось с клавиатуры.

Задание 2. Измените программу так, чтобы сумма вычислялась с помощью цикла For..Downto..do.

Задача 2. Вычислим количество перестановок из n элементов, которое, как известно, равно n!. Число n зададим в разделе описания констант.

Program Pr\_2;

Const

n=10;

var

i,: word;

p: Longint; { тип Longint позволяет задать целые числа от –2\*109 до 2\*109}

{ под число отводится 4 байта }

Begin

{ переменной p присвоим начальное значение 1}

p:=1;

For i:=1 to n do

p:=p \* i;

writeln(n,‘!= ’,p);

writeln(‘нажмите клавишу <Enter>’);

readln;

end.

Задание 3. Измените программу так, чтобы число n вводилось с клавиатуры и n! вычислялось с помощью цикла For..downto.. do.

Задача 3. Вспомним популярную когда-то телеигру «Звездный час». Из букв заданного слова, состоящего из N букв, надо было составить слова. Выигрывал тот, кто составит больше слов. Напишем программу, которая формирует «слова» из трех букв, т.е. все возможные перестановки по 3 буквы из букв данного слова. Количество таких перестановок по правилу умножения равно N3. Составим программу:

Program Pr\_3;

Var

S: string:

S1: string[3];

i, j, k, N,q: integer;

Begin

Writeln(‘введите слово’); Readln(S); q:=1;

N:=Length(S);

For i:=1 to N do

For j:=1 to N do

For k:=1 to N do

Begin

S1:=S[i] + S[j] + S[k];

Write(S1,’ ‘); q:=q+1;

End:

Write(‘ количество слов – ‘,q)

End.

Теперь осталось выбрать среди этих «слов» те, которые на русском языке имеют смысл. Точно также можно поступить при поиске слов из 4-х букв и т.д.

## Заключение

Данная работа представляет собой первый этап изучения комбинаторики, предваряющий освоение большого раздела вероятностных задач, предполагающих знание основ комбинаторики. Опыт показывает, что большинство учащихся хорошо усваивают понятия комбинаторики и успешно решают предложенные задачи.

В дальнейшем автор считает возможным проведение курсов «Введение в теорию вероятностей. Решение вероятностных задач комбинаторными методами» и «Некоторые задачи математической статистики и составление программ для их решения».

## Приложение №1. Задачи.

1. Сколькими способами могут стать 8 человек к театральной кассе?

*Решение.* Поскольку количество человек ограничено, то по правилу умножения количество способов равно: (8\*7\*6\*5\*4\*3\*2\*1)

2. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 4, 6, 7, 8, если никакую цифру не использовать более одного раза ? Сколько среди этих чисел будет четных ? Сколько нечетных ?

*Решение*. Так как имеется всего 6 цифр, то из них можно составить (по правилу умножения) 6\*5\*4\*3\*2 чисел.

Так как четными будут те числа, которые оканчиваются на 2,4,6 и 8, то будем рассуждать так: начнем составлять числа с последней цифры: на последнее место можно поставить любую из указанных четырех, на четвертое – любую из оставшихся 5, на третье – любую из оставшихся четырех, на второе – любую из оставшихся трех, на первое – любую из оставшихся двух. Т.о., получаем: 4\*5\*4\*3\*2 .

Рассуждая таким же образом, получаем количество нечетных чисел: 2\*5\*4\*3\*2

3. В пассажирском поезде девять вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде четырех человек при условии, что все они поедут в разных вагонах ?

*Решение*. По правилу умножения имеем: 9\*8\*7\*6

4. В классе тридцать одноместных парт. Сколькими способами можно рассадить на них шестерых школьников?

*Решение*. По правилу умножения: 30\*29\*28\*27\*26\*25.

5. Энциклопедия состоит из девяти томов – с первого по девятый. Сколькими способами её можно поставить на полке в беспорядке, т.е. так, чтобы тома не следовали один за другим в порядке их номеров ?

*Решение*. По правилу умножения: 9\*8\*7\*6\*5\*4\*3\*2\*1-1, так как в порядке возрастания номеров книги можно поставить только одним способом.

6. Сколько существует пятизначных чисел ? Сколько среди них таких, которые начинаются цифрой 2 и заканчиваются цифрой 4 ? Которые не содержат цифры 5 ? Которые делятся на 5 ?

*Решение*. Так как на первое место нельзя поставить цифру «0», то всего существует 9\*10\*10\*10\*10 пятизначных чисел.

Таких, которые начинаются цифрой 2 и заканчиваются цифрой 4 (согласно правилу умножения:

1\*10\*10\*10\*1 .

Таких, которые не содержат цифры 5: 8\*9\*9\*9\*9, так как на первое место нельзя поставить две цифры – 0 и 5, а на другие – любую цифру кроме 5.

Таких чисел, которые делятся на 5: 9\*10\*10\*10\*2 .(Для последней цифры всего два варианта: 5 или 0)

7. Из города А в город В ведут пять дорог, а из города В в город С – три дороги. Сколько путей, проходящих через В, ведут из А в С ?

*Решение*. По правилу умножения: 5\*3=12 (путей).

8. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «экзамен» ?

*Решение*. Т.к. в этом слове три гласных буквы и четыре согласных, то по правилу умножения имеем: 3\*4=12.

9. Бросают игральную кость с шестью гранями и запускают волчок, имеющий 8 граней. Сколькими различными способами могут они упасть ?

*Решение*. По правилу умножения: 6\*8=48

10. На вершину горы ведут семь дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься с неё? Решить задачу при условии, что спуск и подъем выполняются по разным дорогам.

*Решение.* Всего существует 7\*7 способов. Если же выполнить условие, то для спуска будет на одну дорогу меньше, поэтому: 7\*6 способов.

## Приложение №2. Задачи

При решении этих задач следует использовать правила умножения и сложения.

1. Сколько слов можно образовать из букв слова «фрагмент», если слова должны состоять а) из восьми букв ?

б) из семи букв ?

в) из трех букв ?

*Решение*. а) Т.к. все буквы разные, то: 8! б)= 8\*7в)  = 8\*7\*6\*5\*4\*3

2. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из пяти цифр, если первая из них не равна нулю ?

*Решение*. По правилу умножения, учитывая, что первая цифра не равна 0, получаем: 9\*10\*10\*10\*10

3. Сколько существует различных автомобильных номеров, если номер состоит из одной буквы, за которой следуют четыре цифры, отличные от нуля ?

Решение. Буквы «й», «ь», «ъ» не используются в автомобильных номерах, поэтому всего букв 30. Тогда по правилу умножения количество номеров: 30\*9\*9\*9\*9=1 771 470

4. Сколько существует различных автомобильных номеров, если номер состоит из одной русской буквы, за которой следует три цифры, а за ними еще две буквы ? Учесть, что первая цифра не должна быть «0», а буквы «й», «ь», «ъ» не используются ?

*Решение*. По правилу умножения: 30\*9\*10\*10\*30\*30=24 300 000

5. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг, если две определенные книги должны всегда стоять рядом?

*Решение.* Две книги, которые должны стоять рядом, будем считать одной книгой. Тогда

количество способов=6!

6. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг, если две определенные книги не должны стоять рядом?

*Решение*. Так как всего возможностей 7!, то 7!-6!=6!(7-1)=6\*6!

7. Три дороги соединяют города А и В, четыре дороги соединяют В и С. Сколькими способами можно совершить поездку из А в С через В и вернуться в А тоже через В?

*Решение.* По правилу умножения: (3\*4)\*(4\*3)

8. Сколько различных трехбуквенных слов можно образовать, используя буквы, составляющие Вашу фамилию?

9. Сколько различных трехбуквенных слов можно образовать, используя буквы, составляющие Вашу фамилию, причем эти слова должны начинаться согласной буквой?

10. Сколько различных трехбуквенных слов можно образовать, используя буквы, составляющие Вашу фамилию, причем эти слова должны начинаться и оканчиваться согласными, а в середине должна быть гласная буква?

11. У нас есть три письма, каждое из которых можно послать по шести различным адресам. а) Сколькими способами можно осуществить рассылку писем, если никакие два письма нельзя посылать по одному адресу?

б) Сколькими способами можно разослать письма, если по одному адресу можно послать более одного письма?

*Решение*. а) Первое письмо можно отправить по любому адресу, т.о. возможностей всего шесть. Второе – по любому из пяти оставшихся, а третье по одному из оставшихся четырех. Всего, по правилу умножения, рассылку можно сделать 6\*5\*4 способами.

б) Рассуждая так же, получим: 6\*6\*6 способов.

## Приложение №3. Задачи

1. Сколькими способами их восьми человек можно отобрать комиссию, состоящую из пяти членов?

*Решение.* Так как в комиссии порядок её членов не играет роли, то способов - .

2. Работодателю нужны пять сотрудников, а к нему с предложением своих услуг обратились десять человек. Сколькими способами он может выбрать среди них пятерых?

*Решение.* При отборе сотрудников порядок не играет роли, поэтому количество способов отбора - .

3. Сколькими способами можно отобрать несколько фруктов из семи яблок, четырех груш и девяти бананов?

*Решение.*  Яблоки мы можем отобрать так: либо одно, либо два, либо три, либо четыре, либо пять, либо шесть, либо семь, либо ни одного: возможностей всего восемь. Рассуждая так же, для груш возможностей выбора – 5, для бананов – 10. По правилу умножения имеем: 8\*5\*10-1=399. Вычли 1, т.к. выбор, при котором не отобрано ни одного фрукта, надо исключить.

4. Сколько «слов», содержащих не менее одной буквы, можно составить из двух букв «а», пяти «б» и девяти «в» ?

*Решение.* Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, имеем: 3\*6\*10-1=179

5. На окружности выбраны десять точек. Сколько можно провести хорд с концами в этих точках? Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках? Сколько выпуклых десятиугольников?

*Решение.* Так как порядок выбора двух точек в качестве концов хорд и трех точек – вершин треугольников, не важен, то хорд - , а треугольников -. Выпуклых десятиугольников – один.

6. а) Сколькими способами из девяти книг можно отобрать четыре?

б) Сколькими способами это можно сделать, если в число отобранных должна входить некая определенная книга?

в) Сколькими способами можно отобрать четыре книги так, чтобы в число отобранных не входила определенная книга?

*Решение.* Рассуждая так же, получим: а) 

б) так как определенная книга всегда должна входить в выбор, то недостающие три книги выбираем из восьми оставшихся, поэтому: 

в) выбор будет осуществляться из восьми оставшихся книг, поэтому - 

7. Десять кресел поставлены в ряд. а)Сколькими способами на них могут сесть два человека?

б) Сколькими способами эти два человека могут сесть рядом?

*Решение.* а) Так как неважно, в каком порядке сядут два человека, то способов – .

б) Поскольку эти двое должны сидеть рядом, то будем считать их за одного, сидящего на двух креслах . Пар кресел, расположенных рядом, (1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8, 8-9, 9-10) – 9 . Следовательно, способов выбора тоже 9. По другому, .

8. Сколько чисел, заключающихся между 1000 и 9999, содержат цифру 3?

*Решение.* Переформулируем задачу: сколько существует четырехзначных чисел, содержащих в своей записи цифру 3? Всего четырехзначных чисел – 9\*10\*10\*10. Таких, в записи которых тройка стоит на первом месте – 10\*10\*10, на втором месте – 9\*10\*10 (т.к. «0» не может стоять на первом месте), на третьем – 9\*10\*10, на четвертом – 9\*10\*10. Всего 10\*10\*10+9\*10\*10+9\*10\*10+9\*10\*10 чисел.

9. Сколько четырехбуквенных «слов» можно образовать из слова «сердолик»? Сколько среди них таких, которые не содержат букву «р»? Сколько таких, которые начинаются с буквы «е» и оканчиваются буквой «р»?

*Решение.* Слово содержит 8 букв. Порядок букв в словах важен, поэтому всего четырехбуквенных слов – 8\*7\*6\*5.

Таких, которые не содержат букву «р», - 7\*6\*5\*4, поскольку выбор делается из семи оставшихся букв.

Таких, которые начинаются с буквы «е» и оканчиваются буквой «р», - 6\*5, так выбор второй буквы делается из шести оставшихся, а третьей – из пяти оставшихся.

10. Сколько шестизначных цифр можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, если каждое число должно состоять из трех чётных и трёх нечётных цифр, причём никакая цифра не входит в число более одного раза?

*Решение*. Выбираем три четных составляющих: поскольку четных цифр – 4, то возможностей – 4\*3\*2, а нечетных – 5, поэтому выборов – 5\*4\*3; Всего, согласно правила умножения – (4\*3\*2)\*(5\*4\*3) выборов.

11. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из неё яблоко или апельсин, после чего Надя берет и яблоко, и апельсин. В каком случае Надя имеет большую свободу выбора, если Ваня взял яблоко или если он взял апельсин?

*Решение.* Надя имеет большую свободу выбора, если у неё больше вариантов выбора. Поэтому считаем варианты:

если Ваня взял яблоко, то остается 11 яблок и 10 апельсинов и для Нади, по правилу умножения, есть 11\*10 вариантов выбора;

если Ваня взял апельсин, то остается 12 яблок и 9 апельсинов и для Нади есть 12\*9 вариантов. Остается сравнить эти числа: ясно, что 12\*9 < 11\*10, следовательно Надя имеет большую свободу выбора, если Ваня взял яблоко.

**Приложение №4. Задачи.**

1.Найти число перестановок, образованных из всех букв слова ***комиссия****.*

*Решение.* В слове 8 букв, причем повторяются две буквы: "***и***" – два раза и "***с***" – два раза.

Поэтому, применяя теорему 6, получим, что количество слов равно



2. Сколько различных десятизначных чисел можно получить, используя в их написании цифры 2233344455?

*Решение.* По теореме 6 имеем: 

3. Сколько различных перестановок можно образовать из всех букв слова ***перестановка*** ? Сколько из них начинается с буквы ***п*** и оканчивается буквой ***а***?

*Решение.* а) в слове 12 букв, из них 2 – ***е*** и 2 – ***а***. Поэтому общее количество перестановок, по теореме 6, равно 

б) Т.к. первая и последняя буквы не переставляются, то остается переставлять 10 букв, из которых две - повторяюшиеся (а). Поэтому по теореме 6 число перестановок равно

4.Сколькими способами можно разложить в один ряд 13 различных карт, если определенные 10 карт должны идти в заранее выбранном порядке?

*Решение*. Поскольку 10 карт должны идти в определенном порядке, то в данной задаче их можно считать неразличимыми. Поэтому количество перестановок по теореме 6 равно



5. Найти число различных способов, которыми можно выписать в один ряд шесть плюсов и четыре минуса.

*Решение*. Так как один из этих знаков повторяется 5 раз, а второй – 4 раза, то по теореме 6 имеем: 

6. Найти число всех возможных перестановок букв слова ***зоология***. Сколько среди них таких, в которых три буквы ***о*** стоят рядом? Сколько среди них таких, в которых в точности две буквы ***о*** стоят рядом?

*Решение.* В слове 8 букв. Среди них три буквы повторяются. Поэтому, по теореме 6, имеем общее количество перестановок: =

Если три буквы стоят рядом, то их можно считать одной буквой. Поэтому количество слов, где три буквы ***о*** стоят рядом, равно 6!.

Если только две буквы ***о*** стоят рядом, то эти две можно считать одной буквой ***о***. Поэтому повторений будет 2 и количество перестановок равно 

7. Сколько чисел, больших 3000000, можно написать при помощи цифр 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 ?

*Решение.* Условие задачи означает, что числа должны начинаться с цифры 3. Поэтому, по теореме 6, количество перестановок будет:

, так как единиц – 3, двоек 2, троек, без учета первой, - одна.

8.Сколькими способами можно расположить в один ряд пять красных мячей, четыре черных мяча и пять белых мячей так, чтобы мячи, лежащие по краям, были одного цвета?

Решение. 1) Способов, когда по краям красные мячи, будет: , т.к. два красных мяча не переставляются.

2) Способов, когда по краям черные мячи, будет:  ,т.к. два черных мяча не переставляются.

3) Способов, когда по краям белые мячи, будет: , т.к. два белых мяча не переставляются.

Всего способов будет: ++

## Приложение 5. Поурочное планирование.

1. Перестановки. Правило умножения*.* Решение задач. – 2 часа

2. Перестановки. Правило сложения. Понятие факториала.

Решение задач. - 2 часа

3. Сочетания. Решение задач. - 2 часа

4. Перестановки с повторениями. Решение задач. - 2 часа

5. . Циклы с заранее известным числом повторений. - 2 часа

## Список литературы

1. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М., Наука, 1969

2. Савельев Л.Я. Комбинаторика и вероятность. Новосибирск, Наука, 1975

3. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической

статистике. М., Высшая школа, 1991

4. Ф. Мостеллер, Р.Рурке, Дж. Томас. Вероятность. М., Мир, 1969