Два иг­ро­ка иг­ра­ют в сле­ду­ю­щую игру. Перед ними лежат две кучки кам­ней, в пер­вой из ко­то­рых 3, а во вто­рой — 6 кам­ней. У каж­до­го иг­ро­ка не­огра­ни­чен­но много кам­ней. Иг­ро­ки ходят по оче­ре­ди. Ход со­сто­ит в том, что игрок или удва­и­ва­ет число кам­ней в какой-то куче, или до­бав­ля­ет 2 камня в какую-то кучу. Вы­иг­ры­ва­ет игрок, после хода ко­то­ро­го общее число кам­ней в двух кучах ста­но­вит­ся не менее 24 кам­ней. Кто вы­иг­ры­ва­ет при без­оши­боч­ной игре обоих иг­ро­ков — игрок, де­ла­ю­щий пер­вый ход, или игрок, де­ла­ю­щий вто­рой ход? Каким дол­жен быть пер­вый ход вы­иг­ры­ва­ю­ще­го иг­ро­ка? Ответ обос­нуй­те.

**По­яс­не­ние.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вы­иг­ры­ва­ет пер­вый игрок, своим пер­вым ходом он дол­жен до­ба­вить 2 камня в первую кучу. Для до­ка­за­тель­ства рас­смот­рим не­пол­ное де­ре­во игры, оформ­лен­ное в виде таб­ли­цы, где в каж­дой ячей­ке за­пи­са­ны пары чисел, раз­делённые за­пя­той. Эти числа со­от­вет­ству­ют ко­ли­че­ству кам­ней на каж­дом этапе игры, в пер­вой и вто­рой кучах со­от­вет­ствен­но. | | | | | |
|  | 2 ход | 3 ход | 4 ход | 5 ход |  |
| По­зи­ция после пер­во­го хода | II-й игрок (все ва­ри­ан­ты хода) | I-й игрок (вы­иг­рыш­ный ход) | II-й игрок (все ва­ри­ан­ты хода) | I-й игрок (один из ва­ри­ан­тов) | По­яс­не­ние |
| 5,6 | 5,8 | 7,8 | 14,8 | 28,8 | Пер­вый игрок вы­иг­ры­ва­ет на пятом ходу, после лю­бо­го от­ве­та вто­ро­го иг­ро­ка, на­при­мер, удво­ив число кам­ней в самой боль­шой куче. |
| 9,8 | 18,8 |
| 7,16 | 7,32 |
| 7,10 | 7,20 |
| 7,6 | 7,8 | Те же ва­ри­ан­ты четвёртого-пято- го ходов. | | |
| 5,12 | 5,24 | Пер­вый игрок вы­иг­рал. | | |
| 10,6 | 20,6 | Пер­вый игрок вы­иг­рал. | | |
| Таб­ли­ца со­дер­жит все воз­мож­ные ва­ри­ан­ты ходов вто­ро­го иг­ро­ка. Из неё видно, что при любом от­ве­те вто­ро­го иг­ро­ка у пер­во­го име­ет­ся ход, при­во­дя­щий к по­бе­де. | | | | | |

Два иг­ро­ка, Петя и Ваня, иг­ра­ют в сле­ду­ю­щую игру. Перед иг­ро­ка­ми лежит куча кам­ней. Иг­ро­ки ходят по оче­ре­ди, пер­вый ход де­ла­ет Петя. За один ход игрок может до­ба­вить в кучу один ка­мень или уве­ли­чить ко­ли­че­ство кам­ней в куче в пять раз. На­при­мер, имея кучу из 10 кам­ней, за один ход можно по­лу­чить кучу из 11 или 50 кам­ней. У каж­до­го иг­ро­ка, чтобы де­лать ходы, есть не­огра­ни­чен­ное ко­ли­че­ство кам­ней.

Игра за­вер­ша­ет­ся в тот мо­мент, когда ко­ли­че­ство кам­ней в куче ста­но­вит­ся более 100. По­бе­ди­те­лем счи­та­ет­ся игрок, сде­лав­ший по­след­ний ход, то есть пер­вым по­лу­чив­ший кучу, в ко­то­рой будет 101 или боль­ше кам­ней.

В на­чаль­ный мо­мент в куче было S кам­ней, 1 ≤ S ≤ 100.

Го­во­рят, что игрок имеет вы­иг­рыш­ную стра­те­гию, если он может вы­иг­рать при любых ходах про­тив­ни­ка. Опи­сать стра­те­гию иг­ро­ка — зна­чит опи­сать, какой ход он дол­жен сде­лать в любой си­ту­а­ции, ко­то­рая ему может встре­тить­ся при раз­лич­ной игре про­тив­ни­ка.

Вы­пол­ни­те сле­ду­ю­щие за­да­ния. Во всех слу­ча­ях обос­но­вы­вай­те свой ответ.

1. а) При каких зна­че­ни­ях числа S Петя может вы­иг­рать пер­вым ходом? Ука­жи­те все такие зна­че­ния и вы­иг­ры­ва­ю­щий ход Пети.

б) Ука­жи­те такое зна­че­ние S, при ко­то­ром Петя не может вы­иг­рать за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может вы­иг­рать своим пер­вым ходом. Опи­ши­те вы­иг­рыш­ную стра­те­гию Вани.

2. Ука­жи­те два зна­че­ния S, при ко­то­рых у Пети есть вы­иг­рыш­ная стра­те­гия, причём Петя не может вы­иг­рать пер­вым ходом, но Петя может вы­иг­рать своим вто­рым ходом не­за­ви­си­мо от того, как будет хо­дить Ваня. Для ука­зан­ных зна­че­ний S опи­ши­те вы­иг­рыш­ную стра­те­гию Пети.

3. Ука­жи­те такое зна­че­ние S, при ко­то­ром у Вани есть вы­иг­рыш­ная стра­те­гия, поз­во­ля­ю­щая ему вы­иг­рать пер­вым или вто­рым ходом при любой игре Пети, и при этом у Вани нет стра­те­гии, ко­то­рая поз­во­лит ему га­ран­ти­ро­ван­но вы­иг­рать пер­вым ходом.

Для ука­зан­но­го зна­че­ния S опи­ши­те вы­иг­рыш­ную стра­те­гию Вани. По­строй­те де­ре­во всех пар­тий, воз­мож­ных при этой вы­иг­рыш­ной стра­те­гии Вани. Пред­ставь­те его в виде ри­сун­ка или таб­ли­цы. Для каж­до­го ребра де­ре­ва ука­жи­те, кто де­ла­ет ход, для каж­до­го узла — ко­ли­че­ство кам­ней в по­зи­ции.

**По­яс­не­ние.**

1. а) Петя может вы­иг­рать, если S = 21, ..., 100. При мень­ших зна­че­ни­ях S за один ход нель­зя по­лу­чить кучу, в ко­то­рой боль­ше 100 кам­ней. Пете до­ста­точ­но уве­ли­чить ко­ли­че­ство кам­ней в 5 раз. При S < 21 по­лу­чить за один ход боль­ше 100 кам­ней не воз­мож­но.

1. б) Ваня может вы­иг­рать пер­вым ходом (как бы ни играл Петя), если ис­ход­но в куче будет S = 20 кам­ней. Тогда после пер­во­го хода Пети в куче будет 21 ка­мень или 100 кам­ней. В обоих слу­ча­ях Ваня уве­ли­чи­ва­ет ко­ли­че­ство кам­ней в 5 раз и вы­иг­ры­ва­ет в один ход.

2.  Воз­мож­ные зна­че­ния S: 4, 19. В этих слу­ча­ях Петя, оче­вид­но, не может вы­иг­рать пер­вым ходом. Од­на­ко он может по­лу­чить кучу из 20 кам­ней (при S = 4 он уве­ли­чи­ва­ет ко­ли­че­ство кам­ней в 5 раз; при S = 29 — до­бав­ля­ет 1 ка­мень). Эта по­зи­ция разо­бра­на в п. 1 б). В ней игрок, ко­то­рый будет хо­дить (те­перь это Ваня), вы­иг­рать не может, а его про­тив­ник (то есть Петя) сле­ду­ю­щим ходом вы­иг­ра­ет.

3. Воз­мож­ное зна­че­ние S: 18. После пер­во­го хода Пети в куче будет 19 или 90 кам­ней. Если в куче ста­нет 90 кам­ней, Ваня уве­ли­чит ко­ли­че­ство кам­ней в 5 раз и вы­иг­ра­ет своим пер­вым ходом. Си­ту­а­ция, когда в куче 19 кам­ней, разо­бра­на в п. 2. В этой си­ту­а­ции игрок, ко­то­рый будет хо­дить (те­перь это Ваня), вы­иг­ры­ва­ет своим вто­рым ходом.

В таб­ли­це изоб­ра­же­но де­ре­во воз­мож­ных пар­тий при опи­сан­ной стра­те­гии Вани. За­клю­чи­тель­ные по­зи­ции (в них вы­иг­ры­ва­ет Ваня) подчёрк­ну­ты. На ри­сун­ке это же де­ре­во изоб­ра­же­но в гра­фи­че­ском виде (оба спо­со­ба изоб­ра­же­ния до­пу­сти­мы).



