**Применения принципа двойственности в школьном курсе геометрии**

« Главная и первая из наук –

это наука о зарождении понятий

«чет» и «нечет» и том значении,

которое они имеют по отношению

к природе вещей».

Платон. Послезаконие 1.

Двойственные понятия широко используются в философии и различных отраслях специальных наук (в физике, математике, химии и других).

Это философский принцип, сформулированный французским ученным Понселе, находит свое применение во многих областях высшей математике ( проективной геометрии, дифференциальной, аналитической, векторной геометрии и так далее). Тесней всего принцип двойственности примыкает к проективной геометрии и теории полюсов и поляр.

Открытие принципа двойственности облегчило изучение разделов геометрии. Так как при одновременном рассмотрении двойственных понятий изложение стало более ясным и экономным, то стали появляться попытки перенести этот принцип в элементарную геометрию и даже построить на нем школьный курс геометрии.

Данная тема актуальна и в наше время, так как использование принципа двойственности в школьном курсе геометрии позволит самостоятельно ученикам получать новые теоремы применяя к уже известным принцип двойственности.

Идея двойственности - очень старая идея, которая дошла до нас в различных мифах древних народов Геб и Нут у египтян, Инь и Янь у китайцев, Ки и Ан у шумеров и так далее – все это название богов или активных двойственных начал, взаимодействие которых, по мнению древних приводит в движение мир.

Двойственность порождена в первичном порядке как акт чистого различения из которого появляются двойные принципы: небеса и земля, день и ночь, мужской и женский.

В принятой у пифагорейцев символике каждая из десяти пар состояний (предел – беспредельное , четное - нечетное, единое - множество, правое - левое, мужское - женское, покой- движение, прямое - кривое, свет- тьма, продолговатое - квадратное) фиксирует какую - то одну определенную сторону противостоянию жизни и смерти, причем один полюс всегда преобладает над другим (жизнь над смертью).

Одно из достижений пифагорийцев - выделение четырех базисных элементов или четверицы ( тетраклиды ) . Такими элементами являются точка, отрезок, треугольник, тетраэдр. В современной топологической терминологии они носят название симплексов, посредством которых выражают «мерность» пространства: нуль- мерное, одномерное, характеризующееся длиной; двумерное-«плоскостью», трехмерное- объемностью.

Совокупность «точечных единиц» (1, 2, 3, 4), используемых для построения всех базисных элементов, в сумме дает десять. Это число называлось пифагорийцами четверицей. Отметим ассеметрию базисных элементов: один из них- точка, не существует в реальном мире, и в отличии от остальных является обстракцией.

Цитируя Б. Беллюстина (Беллюстин, 1923) Сорока пишет, что единица , по Пифагору, обозначала дух, из которого протекает весь видимый мир. Из единицы происходит двойка, символ материального атома.

Принимая в единицу двойка становится тройкой или подвижной частицей. Это символ живого мира. Живой мир плюс единица, образуют целое, то есть видимое и невидимое. Так как 10=1+2+3+4,то она выражает собой «Все». В проведенной трактовки базисные элементы попарно имеют общую природу, а именно: единица и тройка обозначают подвижное, живое, а двойка и четверка нечто более застывшее неподвижное. Это принципиальное значение всегда проявляется при более глубоком рассмотрении двойственности, как явление, имеющее более сложную, четырехэлементную структуру, вместо обычной, двусторонней. Здесь также можно выделить пары: количество- отношение, качество- сущность, характеризуемые особым единством их природы. Сороко приводит фрагмент, приписываемый видимому пифагорейцу Фитоланию – «Гармония вообще возникает из противоположностей. Ибо гармония есть соединение разнообразной смеси и согласие разногластного».

Можно только удивляться прозорливости и интуиции древних мыслителей, идеи которых через толщину тысячелетий дошли до нас, чтобы вновь получить развитие на пути интеграции различных наук на основе принципа двойственности.

Принцип двойственности впервые сформулированный в работе Ж. В. Понселе « Трактат о проективных свойствах фигур» ( 1822г ) достаточно быстрозавоевал популярность среди математиков уже в первой половине 19 века и нашел свое применение не только в проективной геометрии, но и в других областях математики .

Ж. В. Понселе не только открыл принцип двойственности, но и применил его до приделов возможного, демонстрируя его простоту в применение и прозрачность самой идеи, заложенной в этом принципе с его легкой руки стало принято записывать теоремы в два столбца: в одном столбце пишут доказанную теорему, в другой- двойственную ей, уже не требующую доказательства. Таким образам с открытием принципа двойственности стало возможно удвоить число теорем проективной геометрии, не затратив при этом особого труда.

Это открытие обеспечило изучение и систематизацию разделов проективной геометрии, очевидными стали его методические и дидактические преимущества.

Так как при одновременном рассмотрении двойственных теорем и понятий изложения становится более понятным , ясным и доступным ,то уже к концу 19 века стали появляться попытки перенести этот принцип в элементарную геометрию и даже построить школьный курс по геометрии с использованием принципа двойственности.

Одна из первых таких попыток бала предпринята в Германии в учебнике элементарной геометрии Генрици и Трейтлейна 260. В этом учебнике авторы достаточно успешно попытались учесть результаты новейших по тому времени исследований излагая элементы проективной и аналитической геометрии в органической связи с классическим евклидовым содержанием геометрического учебника.

Подразделение материала в учебнике происходит по классом геометрических преобразований, в изложении материала четко проводится принцип двойственности. Страница разделена пополам: направо –теорема, налево- ей взаимная.

Ф. Клейна в статье «О преподавании геометрии» отмечает оригинальность учебника Генрици- Трейлейна и считает, что эта книга «в высшей степени заслуживает внимания». Несмотря на это замечание великого реформатора математического образования, насколько нам известно, идея использования принципа двойственности при построении курсов элементарной геометрии не прослеживается в следующих учебных пособиях, вышедших за рубежом.

В начале 20 века, идея использования принципа двойственности при обучении геометрии получила свое развития в России. Первые работы ,посвященные данному вопросу принадлежат перу Д. Д. Мордухай- Болтавского. Идеи, в них содержащиеся, очень важны и в наше время.

Первую публичную апробацию этих идей для широких масс методической общественности Д. Д Мордухай-Болтовского предпринял на втором всероссийском съезде преподавателей математике в Москве в 1913 году. Ввиду принципиально нового подхода к построению курса геометрии и отсутствия достаточного количества методических разработок по этому вопросу, идея не получила массовой поддержки и дальнейшего развития.

В 1916 году в журнале московского математического кружка «Математического образования» (№8) вышла статья ученика Мордухай-Болтовского М. М. Пистрака «Этюды по геометрии». В этой работе, используя терминологию и понятие, введенные Мордухай-Болтавским, Пистрак рассматривает конкретные примеры возможностей использования принципа двойственности для получения теорем, взаимных теоремам курса геометрии средней школы. Основное внимание уделено теоремам о треугольнике и окружности. В этой же статье Пистрак описывает метод и иллюстрирует на примерах возможность изучения теории кривых второго порядка с использованием принципа двойственности.

Спустя 19 лет появляется работа другого ученика Д. Д. Мордухай- Болтовского, М. П. Черняева «Принцип двойственности при школьном преподавании геометрии» вышедшая в достаточно авторитетном и популярном методическом журнале «Математика и физика в средней школе» (№2) автор рассматривает некоторые теоремы связанные с теорией полюсов и поляр и затем на их базе демонстрирует двойственность теорем Чевы и Менелая.

Подобным образом вводятся теоремы Дезарга и ей взаимная, а также теоремы Паскаля и Брианшона. Затем Черняев рассматривает двойственные свойства фигур имеющих ось симметрии (угол, равнобедренный треугольник, равнобедренная трапеция, прямоугольник, ромб). Завершает статью рассмотрение двойственных фигур графической статистики примеры проявления принципа двойственности в номографии.

Достаточно большое количество двойственных теорем элементарной геометрии и задач, решаемых с применением принципа двойственности, приводится во второй части И. М. Яглома «Геометрические преобразования», изданной в Москве в 1956 году в серии « Библиотека математического кружка». Автор подчеркивает, что эта книга адресована в первую очередь читателям, так или иначе связанным со средней школой,- учащимися и учителем». И. М. Яглом также пользуется двойственными понятиями, введенными Мордухаем- Болтавским, и рассматривает с их помощью более 30 видов теорем и задач, приводя по тексту их доказательства и решения, сопровожденные подобными разъяснениями.

Но если перечисленные выше работы были посвящены исследованию в элементарной геометрии сугубо математического аспекта, содержащегося в принципе двойственности, то в последующих работах, авторы, на ряду с математическим содержанием, не меньше внимания уделяют и методической компоненте, в нем содержащейся.

Так в работе Т. Т. Фискович «Общее и специфическое понимание сущности геометрии» (1970год) исследуется вопрос о целесообразности и методическом значении принципа двойственности студентами педагогического вуза - будущими учителями математике. Методическую ценность изучения принципа двойственности Т. Т. Фискович видит в «формировании более абстрактных, но необходимых учителю обобщений понятий математических вообще и геометрии в частности».

В этой работе автор на примере полярных преобразований и связного с ними принципа двойственности показывает, как взаимно действуют в обучении «общее» и «специфическое», выявляет педагогическую ценность этого взаимодействия, заключающегося в лучшем усвоении основного содержания элементарной геометрии, и вместе с тем показывает на примерах практическую роль полярных преобразований для преподавателей геометрии.

Работа В. М. Манахова и Т. В. Маяковой исследующая методический аспект принципа двойственности в применении к обучению математики, вышла в 1979 году в журнале «Математика в школе» (№3). Статья «О некоторых общеобразовательных аспектах принципа двойственности» представляет собой описание эксперимента по использованию принципа двойственности при изучении в школе раздела «Линейное программирование». В качестве одного из методических достоинств принципа двойственности, авторы указывают возможность формирования на его базе у школьников обобщенного умения преобразования математических моделей путем построения двойственной модели, радикальным преобразованием исходной. Такую трактовку метода двойственности они предлагают рассматривать как «дальнейшее качественное развитие линии тождественных преобразований»,отмечая его универсальное и широкое применение в математике и ее приложениях. В статье приводится примеры решения экономических задач программирования иллюстрирующие, как с помощью применения принципа двойственности решение задач с числом уравнений большим, чем число переменных, заменить решением двойственной задачи с меньшим числом уравнений.

Наконец в 1977 году материал косвенно связанный применением принципа двойственности в элементарной геометрии и касающихся теории полюсов и поляр, представлен в учебном пособии для учащихся школ и классов с углубленным изучением математике « Геометрия. Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса» написанным авторским коллективом, в который входят Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадамцев, И. И. Юдина. К сожалению авторы ограничивались лишь рассмотрением двойственных теорем Чевы и Менеля, используя при их доказательстве понятие гармонической четверки точек и не называя сами теоремы двойственными, введением понятия полюса и поляры, не выделяя их двойственную природу и решением задачи на построение касательных с помощью одной линейки опираясь на свойства полюсов и поляры.

Таким образом, учителям работающим по данному учебнику, трудно самостоятельно выявить в этом материале принцип двойственности.

Тем не менее, возможности использования принципа двойственности даже в рамках программы существующего курса геометрии основной школы имеются.

О построении школьного курса геометрии на основе принципа двойственности, еще говорить рано, так как отсутствует четко разработанный методический и математический аппарат для такого использования.

**Внедрение двойственных преобразований в**

**школьный курс геометрии.**

**Принцип двойственности на плоскости.**

Принцип двойственности на плоскости заключается в следующем. Если справедливо утверждение ∆, в котором говорится о точках, прямых на проектив- ной плоскости и об их взаимной принадлежности, то справедливо и так называемое двойственное предложение ∆\*, которое получается из ∆ заменой слова «точка» словом «прямая» и слова «прямая» словом «точка». Слова, выражающие отношение принадлежности, сохранены без изменения. Важно подчеркнуть, что если справедливо предложение ∆, то справедливо предложение ∆\*. Поясним это утверждение на примере.

Пусть ∆-предложение: «Каковы бы ни были две точки, существует одна и только одна прямая, принадлежащая этим точкам». Мы имеем верное утверждение , сформулированное для элементов множества F , состоящего из двух точек. Преобразование w множество F, переводит во множество F\*, состоящее из двух прямых. В силу существования отображения w мы можем принять без доказательства следующее утверждение ∆\* для элементов множества F\*: «Каковы бы ни были две прямые, существует одна и только одна точка, принадлежащая этим прямым». В самом дели, если предположить, что ∆\* не имеет места , то это бы означало , что для каких-то двух прямых не существует точки, принадлежащей им. Но тогда, очевидно, через прообразы этих прямых ни проходит ни одна прямая, то есть не имеет место предложение ∆.

Приведем другие примеры двойственных предложений.

1 Каждой прямой принадлежит бесконечное множество точек.

1\* Каждой точке принадлежит бесконечное множество прямых (то есть через каждую точку проходит бесконечное множество прямых).

1. Существует по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.

2\* Существуют по крайней мере три прямые, не принадлежащие одной точке (то есть не проходящие через одну точку).

Тема: «Принцип двойственности. Малый принцип двойственности».

Цели урока:

1. ввести понятие двойственности;
2. способствовать формированию представления о математике, как форме отражения устройства бытия;
3. показать примерами проявление двойственности в окружающем мире и в математике.

Объяснение нового материала.

Суть принципа двойственности заключается в том, что из одного верного высказывания путем замены входящих в него понятий на так называемые двойственные понятия можно получить другое ,так же высказывание .

Все мы не раз встречались с двойственными понятиями в повседневной

жизни :

Рассмотрим рисунок №1 на доске

Небо ночь

День нечетное

Воздух смерть

Жизнь четное

Четное земля

Здесь даны двойственные понятия , например для слова «небо» двойственным будет слово «земля», а для слова «воздух»- «огонь».

- А как вы думаете, для слова «день» какое будет двойственное слово? Жизнь? Четное?

Так и в математике есть двойственные понятия, так как математика изучает законы природы устройства мировоззрения.

В геометрии имеет место два принципа двойственности. Сегодня на уроке мы познакомимся с малым принципом двойственности. Он заключается в следующем, мы слово «точка» заменяем словом «прямая», а слово «прямая» словом «точка». При этом слова, выражающие отношение принадлежности, сохранены без изменения.

Малый принцип двойственности гласит:

«Каждому предложению относительно элементов (точек и прямых) на плоскости соответствует второе, двойственное предложение, которое может быть получено из первого заменой в нем слова «точка» словом «прямая» и слова «прямая» словом «точка». Оба взаимодвойственных предложения справедливы, если доказано одно из них».

Например, рассмотрим следующее утверждение:

« Каковы бы ни были две точки, существует одна и только одна прямая, принадлежащая этим точкам».

Мы имеем верное утверждение. Применим малый принцип двойственности для данного утверждения, и что мы получим?

- «Каковы бы ни были две прямые, существует одна и только одна точка, принадлежащая этим прямым».

- В самом деле, если предположить , что полученное утверждение не имеет смысла, то это бы означало, что для каких-то двух прямых не существует точки, принадлежащей им . Но тогда , очевидно , через прообразы этих прямых не проходит ни одна прямая , то есть не имеет место первое предложение .

Составим двойственные предложения .

1 Каждой прямой принадлежит бесконечное множество точек. 1\*. Каждой точке принадлежит бесконечное множество прямых (т.е. через каждую точку проходит бесконечное множество прямых ) 2 .Существует по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.

2\* Существует по крайней мере три прямые, не принадлежащие одной точке (то есть не проходящей через одну точку).

-Ребята, рассмотрим теперь двойственные друг другу фигуры.

Начертим в тетрадях отрезок.

1 Отрезок- это фигура, состоящая из двух точек, соединенных по прямой.

- Применим малый принцип двойственности к данному определению и получим.

1\* Фигура, состоящая из двух прямых, соединенных в точке- угол.

-То есть «отрезку» будет двойственной фигурой «угол». (начертите рядом с отрезком угол).

2 Прямоугольник- это параллелограмм, у которого все углы равны.

2\* Ромб- это параллелограмм, у которого все стороны равны.

-Ребята, а давайте определим, какая фигура будет двойственна треугольнику.

Кто может сказать, какая фигура называется треугольником.

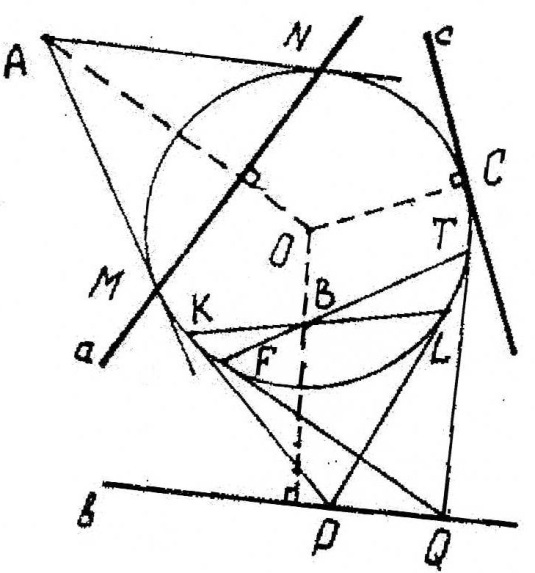
- Треугольник- это фигура, образованная тремя точками не лежащими на одной прямой, которые соединены тремя отрезками.

Применим малый принцип двойственности и получим точно такое же определение, то есть треугольник является двойственным сам себе.

Практическая часть.

1. Рассмотрим в плоскости окружность S , радиус которой равен единице. Всякой точке плоскости (полюсу) можно относительно окружности S отнести определенную прямую (поляру) и обратно. Построение прямой, двойственной данной точке, или, как мы будем говорить «взаимной данной точке», производится следующим образом: а) Точка (А, рис. 2) лежит внутри S. Проводим из А касательные AN и AM к S, MN есть искомая прямая а.

б) Точка (B, рис. 2) лежит внутри S. Проводим хорды KL, FT. Через K и L проводим касательные к S до встречи их в точке P; через F и T до встрече в Q. PQ - есть искомая прямая b.

 рис. 2

в) Точка (C, рис. 2) лежит на S. Искомая прямая есть касательная c к S в этой точке.

2. Отсюда, легко видеть, как по данным прямым (полярам) найти взаимные им точки (полюсы).

3. В дальнейшем нам потребуются следующие два замечания:

1) Точке O –центру S взаимна бесконечно удаленная прямая и обратно; назовем поэтому O «особенной точкой».

Всякой прямой, проходящей через особенную точку (диаметру S) взаимна бесконечно - удаленная точка.

2) Прямая (OA, OB, OC), соединяющая O с данной точкой (A, B, C), перпендикулярна взаимной ей прямой (a, b, c) и обратно.

Бесконечно- удаленная точка, взаимная данному диаметру лежит на луче, перпендикулярном этому диаметру.

4. Рассмотрим две прямые a и b и взаимные им точки A и B. Очевидно, что OAa,

OB b. Следовательно AOB или равен (a, b), или дополняет его до π.

Если O лежит вне (a,b), то (a, b)= AOB.

Если O лежит внутри (a,b), то (a,b) = π - AOB.

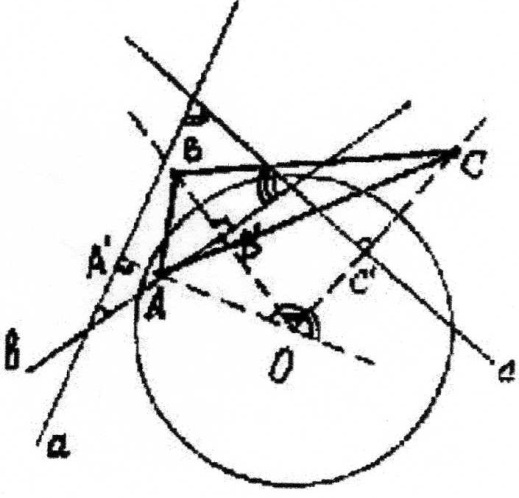
Понятие «угла между двумя точками» определим следующим образом: угол между двумя точками A и B назовем угол, под которым расстояние AB видно из особенной точки (или угол с ним смежный).

Нетрудно в каждом случае определить, какой именно угол принять за угол между двумя точками (рис. 3- углы между A и B, B и C, C и A)

 (A,B)= AOB

(B,C)=BOC

 (A,C)=π- AOC

Рис.3

Таким образом решение задач по данной теме способствуют воспитанию навыков логического (отвлеченного) мышления: наблюдая отдельные факты, учащиеся приходят к общему выводу.

При изучении данной теме воспитываются волевые качества, настойчивость в доведении дела до конца самостоятельность, сообразительность, инициатива.

Точное и аккуратное выполнение заданий, хорошее их оформление на бумаге вырабатывает постепенно у учащихся аккуратное отношение ко всякой работе, ко всякому заданию.

Опыт использования двойственных преобразований на уроке геометрии вызывает интерес к математике, побуждает детей к самостоятельному творчеству, проявлению инициативы и смекалки,

**Литература.**

Александров А. Д. Геометрия БСЭ, Издательство 2-е т. 10, 1952 с.546 «Наука» - Москва.

Александров П. С Лекции по аналитической геометрии. 1968 г. Издательство «Наука»- Москва.

Александров А. Д. Геометрия 1990 г. Издательство «Наука»- Москва

Кусраев А. Г. Векторная геометрия и ее приложения. 1985г. Издательство «Наука»- Новосибирск

Монахов В. М., Малкова Т. В. О некоторых общеобразовательных аспектах принципа двойственности // Математика и информатика: 1979 г. №3

Князева Л. Е. Курс аналитической геометрии в наследии Д. Д. Мордухай- Болтавского // Наука и техника: Вопросы истории и теории. 2001г.

Погорелов А. В. Геометрия. 1984 «Наука»- Москва

Пырков В. Е. О возможности применения принципа двойственности в школьном курсе геометрии // Практические советы учителю: Метадический журнал РОИПК и ПРО, 2003г. №8