Г. И. Вольфсон

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2010

Не так страшна **задача на делимость,** как её малюют!

С6

Г. И. Вольфсон

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2010

НЕ ТАК СТРАШНА ЗАДАЧА НА ДЕЛИМОСТЬ, КАК ЕЁ МАЛЮЮТ!

Издание второе

Санкт-Петербург
СМИО Пресс
2010

В12

Рецензенты:
Б. М. Беккер, к. ф.-м. н., доцент СПбГУ, заслуженный учитель России
В. Б. Некрасов, методист центра математического образования СПбАППО, заслуженный учитель России

Вольфсон Г. И.
В12 Математика. Не так страшна задача на делимость, как ее малюют. Учебное пособие для учащихся 11 классов. СПб: СМИО Пресс, 2010. – 64 с.

С помощью этой книги каждый сможет научиться решать задачи на делимость.

ISBN 978-5-7704-0243-8

Редактор к. ф.-м. н. *Т. Х. Черкасова*
Художественный редактор *Н. Д. Соловьева*
Директор издательства *И. С. Морозова*

Издательство «СМИО Пресс»,
Санкт-Петербург, ул. Седова, д. 97, к. 3, лит. А.
Тел. (812) 976-94-76, (911) 290-90-26 (МТС), (961) 811-17-49 (БиЛайн)
e-mail: smiopress@mail.ru, htpp://www.smio.ru

Подписано в печать 12 мая 2010 г. Печать офсетная.
Усл.-печ. л. 1,6. Формат $84\times108^{1}/_{32}$. Тираж 1000. Заказ 230.

Отпечатано в ОАО «Петроцентр» ОП Пушкинская типография
г. Пушкин, ул. Средняя, д. 3/8.

Глава 0

ЗНАКОМСТВО

С6... как много в этом звуке! Еще недавно это символосочетание было популярно, разве что, у шахматистов и любителей играть в морской бой. Теперь же оно знакомо всем, кто готовится или готовит своих учащихся сдавать ЕГЭ по математике. Причем, чаще всего, С6 упоминается в контексте «За эту задачу вообще лучше не браться, только время потеряешь». Чем же вызваны подобные суждения?

Во-первых, не будем забывать, что задач подобного типа на ЕГЭ еще ни разу не было. А неизвестность всегда пугает.

Во-вторых, нестандартна ожидаемая тематика задач. С одной стороны все знают, что делимость — это школьная программа, с другой стороны — такие задачи в школьном курсе обычно не рассматриваются, даже в сильных матшколах. А жаль, кстати говоря, что такие задачи не рассматриваются — нестандартное мышление очень полезно развивать, оно позволяет находить выход из самых сложных жизненных ситуаций.

В школе урок математики, проходят дроби. Учительница:
— Петя, как разделить четыре картофелины на пять человек?
— Не знаю...
— Садись, два! Леночка! Тот же вопрос!
— Не знаю...
— Двойка! Вовочка, как разделить четыре картофелины на пятерых?
— Нужно сварить пюре!

Но мы немного отошли от темы повествования.

Вообще, когда в первый раз читаешь задачу С6, то кажется, что она не так уж сложна. Ну, например: «Найти все пары натуральных чисел, разность которых 66, а их наименьшее общее кратное равно 360». По крайней мере, все эти слова встречались в школьном курсе, причем классе в шестом. Задача совсем не выглядит убийственно сложной, особенно, если сравнивать с прошлогодними С5. Однако проходит минута, две... А идей все нет. Вроде, все просто, а вроде и не подступиться к решению.

Так может быть, действительно, ребятам из обычных школ лучше и не смотреть на С6, а выпускникам матшкол — смотреть, но далеко не всем? Нет, нет и еще раз нет! Автор вполне убежден, что ЛЮБОЙ школьник, который владеет минимальными знаниями в области математики, способен получить за задачу С6 натуральное число баллов (кстати, вот уже второй повод освежить в памяти понятие «натуральные числа». Если вы не до конца уверены в правильности своего понимания этого термина — загляните в словарик, который находится в конце книги!). Да, решить эту задачу способны очень и очень немногие, но 1–2 балла заработать вполне возможно. А если их можно заработать, то зачем же лишать себя этого шанса? Не лучше ли попробовать-таки взяться за эту задачу?

Каким же арсеналом нужно владеть, чтобы завалить монстра под названием «С6»? Пожалуй, выделим всего три позиции:

1) знание теоретических основ (определения, свойства, теоремы);
2) знание основных приемов решения задач (специфика практического применения знаний, указанных в пункте 1;
3) озарение.

Первому и второму можно и нужно учиться. Третьему научиться гораздо труднее, это приходит только с опытом. Однако наличие первых двух пунктов существенно увеличивает вероятность «озарения» — согласитесь, трудно придумать самолет, если вообще не понимаешь базовых принципов физики.

Эта книга рассчитана на то, чтобы познакомить читателя с основами теории чисел, причем основной упор делается на целые числа и делимость целых чисел (то есть, собственно, те самые темы, задачи по которым составляют львиную долю от всех ныне опубликованных задач типа «С6»). Также будет разобрано много примеров, в которых изложенная теория найдет себе применение. Наконец, будут рассмотрены основные методы и приемы «борьбы» с целыми числами. Ну, и конечно, задачи для самостоятельного решения. К ним будут даны подсказки (они приведены в пятой главе), которые, возможно, наведут вас на правильную идею. Впрочем, не будем настолько забегать вперед.

Книгу рекомендуется читать по порядку, так как в каждой следующей главе будет использоваться рассмотренное в предыдущей. Если вы встретили незнакомый значок или термин — загляните в словарик в конце книги, и неизвестность рассеется.

Эта книга никогда не появилась бы на свет, если бы автора не окружали такие замечательные люди, как Владимир Борисович Некрасов, чья идея и послужила стимулом для появления книги, Владимир Анатольевич Гольдич, чей электронный ящик всегда был открыт для новых безумных идей автора, и Игорь Павлович Вольфсон, чья конструктивная (а порой, не очень конструктивная и даже деструктивная) критика так хорошо мобилизовывала автора на дальнейшую работу.

Желаю вам
приятного прочтения!

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Прежде всего, определим то, с чем мы будем работать в дальнейшем. Натуральные числа — это числа 1, 2, 3, ... Множество натуральных чисел обозначается значком $\mathbb{N}$. Например, запись $a \in \mathbb{N}$ означает, что a — натуральное число. По сути своей натуральные числа используются тогда, когда объекты можно пересчитать (скажем, 3 сестры, 7 цветов радуги, 38 попугаев, 2010 лет). Важно помнить, что **число ноль натуральным не является.**

Далее, целые числа — это числа ..., –2, –1, 0, 1, 2, ... Как видите, если множество натуральных чисел бесконечно только вправо, то множество целых чисел — в обе стороны. Кроме натуральных чисел среди целых есть еще ноль, а также отрицательные числа. Кстати, видно, что натуральные числа – это целые положительные числа. Впрочем, это вы сами знаете.

Зачем же людям вообще понадобились целые числа? Очевидно, чтобы что-то посчитать, указать количественную характеристику объекта. Например, с помощью целых чисел можно отобразить количество голов в стаде, число единиц товара для обмена, температуру воздуха, количество дней в месяце и т. д.

С другой стороны, где количество — там «делёжка». Как разделить 10 бананов между людьми своего племени? Сколько билетов в день нужно учить и за сколько дней стоит начать, чтобы подготовиться к экзамену, содержащему 64 вопроса? Как распределить деньги по неделям, чтобы прожить месяц на стипендию в 1000 рублей? Эти и другие вопросы, связанные с делением одного числа на другое, возникали и возникают каждый день.

Учительница диктует задачу:
— 30 учеников разделили между собой поровну 120 яблок, 150 слив и 180 абрикосов. Вовочка, ответь, что будет у каждого?
— Расстройство желудка!

Словом, практический интерес налицо. Попробуем дать формальное определение понятию делимости. Сразу заметим, что в данном случае речь пойдет о делимости нацело, то есть без остатка.

Определение делимости

Целое число a делится на целое число b (не равное нулю), если существует такое целое число c, что $a = bc$.

Как и у всякого уважающего себя математического понятия, у делимости есть свои свойства. Отметим, что здесь и далее все свойства и теоремы будут приведены без доказательства, однако для интересующихся в конце книжки приведены ссылки на литературу, где можно найти эти и другие интересные факты теории чисел.

Замечание. Чтобы не писать одно и то же в каждом случае, будем считать, что a, b, c (которые фигурируют в определениях и свойствах) — произвольные целые числа, если, конечно, в явном виде не указано что-то другое.

Свойства делимости:

Свойство 1. $0 \vdots c$.
Свойство 2. $c \vdots 1$, $c \vdots c$.

Это свойство кажется совершенно очевидным, однако бывает крайне полезным в задачах. Так, например, если в задаче фигурируют «все делители исходного натурального числа», обязательно нужно иметь в виду само число и единицу.

Вопрос на засыпку. Следует ли из этого свойства, что у любого натурального числа есть хотя бы два делителя?

Свойство 3. $a \vdots b$, $b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$.
Свойство 4. $a \vdots c$, $b \vdots c \Rightarrow (a \pm b) \vdots c$.

Итак, если два числа делятся на третье, то и сумма, и разность исходных двух чисел также делится на третье. Решим пару примеров, использующих это свойство.

Пример 1. Найти все такие $a \in \mathbb{N}$, что $a^2 + 1 \vdots a$.

Решение. Заметим, что a^2 всегда делится на a. По условию, $a^2 + 1$ также делится на a. Следовательно, по свойству 4, разность чисел $a^2 + 1$ и a^2 также делится на a. То есть, получаем, что $1 \vdots a$. Но у числа 1 есть только один натуральный делитель — единица. Значит, $a = 1$ — единственное решение.

Ответ. 1.

Пожалуй, ключевая идея здесь — это «озарение», что a^2 всегда делится на a. Идея несложная, однако ее в полной мере можно назвать озарением. Как же до этого догадаться? Достаточно вспомнить, какие свойства мы знаем. Ведь здесь в условии сразу дана сумма — это повод задуматься, не было ли какого-нибудь свойства у делимости, где фигурирует сумма? И точно, «есть такая буква в этом слове»! В итоге, правда, мы воспользовались свойством про разность, но эти два свойства, по сути, побратимы — недаром в тексте они объединены.

Пример 2. Найти все такие $a \in \mathbb{N}$, что $\dfrac{2a+1}{a-2}$ – целое число.

Решение 1 (через свойства). Переформулируем условие: числитель данной дроби должен делиться на ее знаменатель. Итак, нужно найти все такие $a \in \mathbb{N}$, что $(2a+1) \vdots (a-2)$. Заметим, что $(a-2) \vdots (a-2)$, а значит и $(2a-4) \vdots (a-2)$, потому что $2a - 4 = 2 \cdot (a-2)$. Но если $2a+1$ и $2a-4$ делятся на $(a-2)$, то и их разность также делится на $(a-2)$. Итак, $5 \vdots (a-2)$. У числа 5 есть всего два натуральных делителя — это 1 и 5. Делителю 1 соответствует решение $a = 3$, а делителю 5 — решение $a = 7$.

Все? Нет, не все. Ведь у числа 5 есть еще два отрицательных делителя! Стоп, какие отрицательные? У нас же a – натуральное! Ну да, a – натуральное, но из этого совершенно не следует, что число $(a-2)$ является натуральным! Таким образом, необходимо проверить еще и делители -1 и -5. В первом случае получаем, что $a = 1$ — очень даже натуральное число, между прочим! Во втором же случае имеем $a = -3$, данное число натуральным не является. Итого, решений будет три: 1, 3 и 7.

Ответ. 1, 3, 7.

Решение 2 (выделение целой части). Выделим целую часть у данной нам дроби.

$$\frac{2a+1}{a-2} = 2 + \frac{5}{a-2}.$$

Чтобы это число было целым, необходимо и достаточно, чтобы второе слагаемое было целым, то есть 5 должно делиться на $(a-2)$. Дальше — аналогично первому решению.

Попробуем рассмотреть первое решение этой задачи пошагово. Первым делом нужно переформулировать условие — действительно, не совсем ясно, как проверить целочисленность дроби, а вот про делимость мы кое-что уже знаем. Далее, давайте зададимся вопросом, а как вообще можно найти искомую переменную, опираясь только на некоторую делимость? В принципе, это было бы не трудно, если бы делимое было известным нам числом — скажем, единицей, как в первом примере. Тогда мы просто перебрали бы делители этого числа и нашли бы a. Однако у нас пока что делимое — также выражение, зависящее от a. Значит, надо попробовать сделать из него известное число. А как? Ну, раз надо избавиться от a в делимом, то это самое a надо каким-нибудь образом вычесть. А в каком свойстве мы вычитаем что-то? Ну конечно, Свойство за номером 4! Следовательно, осталось найти выражение, содержащее $2a$, которое будет делиться на $a-2$ при любом натуральном a. Для нахождения этого выражения можно просто домножить число $a-2$ на 2 — и получаем требуемое! Ну, а дальше уже дело техники.

Практический совет. Проверяйте полученные ответы! Подставить число в пример — дело нехитрое, займет секунд 20. Зато появится гарантия, что уж лишних-то корней в ответе точно нет.

Свойство 5. $a \vdots b, \quad a \neq 0 \Rightarrow |a| \geq |b|$.
Свойство 6. $a \vdots b,\ b \vdots a \Rightarrow |a| = |b|$.

Замечание. Свойство 6 следует из свойства 5: действительно, если $a \vdots b$, то $|a| \geq |b|$, если к тому же $b \vdots a$, то $|b| \geq |a|$. Из этих двух неравенств и следует, что $|a| = |b|$.

Эти свойства следует использовать, например, в том случае, когда вам кажется, что делимое не превосходит делителя. Например, разберем такую задачу:

Пример 3. Найти все такие $a \in \mathbb{N}$, что $(a + 1) \vdots a^2$.

Решение. Заметим, что если $(a + 1) \vdots a^2$, то $(a + 1) \geq a^2$ в силу свойства 5 (модули можно убрать, так как рассматриваемые числа — натуральные). С другой стороны, если $a \geq 2$, то $a + 1 < a + a = 2a \leq a^2$. Значит, при $a \geq 2$ поставленная задача не имеет решений. Осталось проверить только число 1. Оно является решением (т. к. $2 \vdots 1$).

Ответ: 1.

Обратите внимание, чем мы пользовались при решении этой задачи. Первое — заметили, что квадрат в правой части, скорее всего, больше, чем левая часть. По крайней мере, он точно больше при достаточно больших a. Второе — вспомнили свойство, согласно которому квадрат не должен быть больше левой части. Третье — доказали, что при всех a, кроме 1, квадрат будет больше. И четвертое — рассмотрели оставшийся случай $a = 1$.

Кстати, какой шаг показался вам наименее тривиальным? Наверное, или третий, или первый. Начнем с первого. Этот шаг как раз и является тем самым озарением, о котором было сказано выше. Но согласитесь, что если рассмотреть первый и второй шаги вместе и предположить, что все свойства (а их, как вы заметили, всего шесть) вам известны — выбрать нужное не так-то сложно, а там и до озарения недалеко!

Что же касается третьего шага, то на нем хочется заострить ваше особое внимание. Может показаться, что он не так важен, и вместо написанного в решении, достаточно указать, что a^2 всегда больше $a + 1$, если $a > 1$. Это действительно верное утверждение, но само по себе оно звучит, увы, бездоказательно. Конечно, доказать его можно по-разному, например, так: $a^2 - a - 1 = a(a - 1) - 1$. Ясно, что если $a > 1$, то первый множитель больше или равен двум, а второй — больше или равен единице, следовательно, их произведение также больше или равно двум, а значит, при вычитании единицы останется положительное число. Помимо предложенных способов доказательства, можно было заняться исследованием параболы или решить квадратное неравенство — это уже на ваш вкус. Самое главное — доказать этот факт. Старайтесь строго доказывать все утверждения, которые вы формулируете!

Замечание. Задачи на целые числа очень часто сводятся к перебору. Конечно, лучше всего постараться минимизировать перебор, но иногда, если он не слишком утомителен, можно разобрать и 10 вариантов. Особенно, если других идей не возникает. Так что если вы сумели свести задачу к перебору конечного и разумно ограниченного количества случаев — считайте, что задача решена! Впрочем, прежде чем приниматься за такой перебор, потратьте еще немного времени — а вдруг перебор можно сократить? В дальнейшем мы не раз столкнемся с перебором и попытками упростить его.

Пример 4. Одно из двух двузначных натуральных чисел в два раза больше другого. Найдите все пары таких чисел, если цифры меньшего из них соответственно равны сумме и разности цифр большего.

Решение. Обозначим цифры большего числа через a (это первая цифра) и b. Тогда большее число можно представить в виде $10a + b$. По условию, цифрами меньшего числа являются сумма и разность цифр большего. Разберем два случая:

Случай 1

$a > b$. Тогда цифры меньшего числа — это $(a - b)$ и $(a + b)$. Ясно, что $(a + b)$ не может быть первой цифрой меньшего числа, так как $(a + b)$ не меньше чем a, а при делении двузначного числа на 2 его старшая цифра уменьшится. Значит, первая цифра меньшего числа равна $(a - b)$, а вторая равна $(a + b)$. Тогда меньшее число можно представить в виде $10(a - b)+(a + b)$. По условию, это выражение вдвое меньше большего числа, имеем уравнение:

$$10a + b = 2(10(a - b) + (a + b)),$$
$$10a + b = 2(11a - 9b),$$
$$10a + b = 22a - 18b,$$
$$19b = 12a,$$
$$b = \frac{12a}{19}.$$

Из последнего равенства следует, что $12a$ делится на 19, чего быть не может, если a является цифрой. Значит, в этом случае решений нет.

Случай 2

$a < b$. Этот случай аналогичен первому с той лишь разницей, что разность цифр большего числа будет не $(a - b)$, а $(b - a)$. Как и в первом случае, сумма цифр первого числа не может быть первой цифрой второго числа, а значит, второе можно записать в виде $10(b - a) + (a + b)$. Используя то, что второе число вдвое меньше первого, имеем уравнение:

$$10a + b = 2(10(b - a) + (a + b)),$$
$$10a + b = 2(11b - 9a),$$
$$10a + b = 22b - 18a,$$
$$28a = 21b,$$
$$4a = 3b,$$
$$a = \frac{3b}{4}.$$

Из этого следует, что цифра b делится на 4, следовательно, она может быть равна 0, 4 или 8. Если $b = 0$, то и $a = 0$, получаем не двузначное число.

Если $b = 4$, то $a = 3$, первое число — 34, а второе — 17. Они нам подходят.

Если $b = 8$, то и $a = 6$, и тогда сумма этих цифр не является цифрой (она больше 9).

Итого, единственное решение задачи — пара (34, 17)

Ответ: (34, 17).

Практический совет. Если в условии задачи дано число, состоящее из одной, двух или трех цифр, а затем есть какое-то условие на эти цифры, чаще всего такая задача решается с помощью введения переменных вместо этих цифр, после чего нужно будет выразить исходное число и все условия задачи через эти переменные. Например, в случае двух цифр a и b, исходное число будет равно $10a + b$, для трех цифр a, b и c, число будет равно $100a + 10b + c$ и т. д. Эта идея работает и для большего количества цифр в числе, но несколько реже.

Итак, задача решена. Но поди придумай это решение самостоятельно, тем более — на экзамене. Да, вроде бы оно не кажется очень сложным, но это когда оно уже прочитано. А что делать, если решение не придумалось? Есть ли альтернативные методы борьбы? Конечно, есть! Порассуждаем вместе!

Попытки решения

Идея № 1. *В лоб!*

Нам даны два двузначных числа. В принципе, никто не мешает нам перебрать 90 вариантов (всего двузначных чисел — аккурат 90) для первого числа, для каждого варианта мы сможем найти второе число и проверить, выполняется ли условие задачи. Долго, конечно, но если есть еще полчаса времени, а остальные задачи либо решены, либо совсем не покоряются — почему бы и нет? И никто не придерется, если все будет правильно посчитано — за нерациональность решения баллов не снижают.

Идея № 2. *В условии было что-то про удвоение...*

Нет, что-то 90 вариантов перебирать неохота. Нельзя ли поменьше сделать? Конечно, можно! Нам ведь дано, что первое число вдвое больше второго. Значит оно уж точно четное! То есть половину вариантов можно сразу не рассматривать. А это уже 45 вариантов. Кстати, можно отбросить еще больше: раз оба числа двузначные, то меньшее число не меньше 10, а значит, большее — не меньше 20. Осталось 40 вариантов!

Эти 40 вариантов можно было получить и по-другому, если рассматривать меньшее из чисел. Оно, очевидно, не меньше 10, но не больше 49, так как в противном случае большее будет уже не двузначным. Итого, 40 случаев.

Идея № 3. *Там же было еще второе условие, вроде бы...*

Хотя, 40 — тоже многовато. К тому же, второе условие мы пока вообще не использовали. А что там сказано? Что цифры меньшего числа получаются при сложении и вычитании цифр большего. А это означает, что и сумма, и разность цифр большего числа лежат в промежутке от 0 до 9! С разностью-то все ясно, она всегда от 0 до 9 (если она неотрицательна, конечно), а вот сумма существенно сократит перебор! Итак, мы знаем, что большее число четно, что оно не меньше 20, не больше 99 и что сумма его цифр меньше 10. Выпишем все такие числа: 20, 22, 24, 26, 30, 32, 34, 36, 40, 42, 44, 50, 52, 54, 60, 62, 70, 72, 80, 90. Этих чисел всего 20. В принципе, их можно перебрать, благо, разбор одного варианта много времени не занимает. Достаточно выписать в таблицу выбранные числа, рядом с каждым записать второе, равное половине от первого, и проверить, будут ли цифры второго являться суммой и разностью первого. Путем перебора (который необходимо полностью указать в чистовике, то есть **выписать все варианты**), получаем единственное решение — (34, 17).

№1	№2	Да/Нет
20	10	Нет
22	11	Нет
24	12	Нет
26	13	Нет
30	15	Нет
32	16	Нет
34	17	Да
36	18	Нет
40	20	Нет
42	21	Нет

№1	№2	Да/Нет
44	22	Нет
50	25	Нет
52	26	Нет
54	27	Нет
60	30	Нет
62	31	Нет
70	35	Нет
72	36	Нет
80	40	Нет
90	45	Нет

Вот и по-другому задача решилась. Кажется ли задача убойной? Да вроде, нет. Ну что ж, спешу обрадовать вас, это была задача С6 из официальной книги [1] разработчиков ЕГЭ этого года... Да-да, С6, та самая ужасная С6! Мы сделали это! А то ли еще будет?!

Практический совет. А что делать, если задача не решается? Ну, скажем, вы вспомнили идею про введение переменных вместо цифр, а дальше — ступор. Не беда! Сделайте хоть что-нибудь! **Введите грамотно обозначения, постарайтесь записать хотя бы одно уравнение из условия с учетом этих обозначений.** Меньше чем ноль баллов вам не поставят, а больше — очень может быть, если указанная вами идея действительно приводит к успеху. **Попробуйте разобрать хотя бы один частный случай:** например, для разобранной выше задачи, вариант, когда первая цифра числа больше чем вторая. **Попробуйте угадать ответ**, обычно это не так уж сложно. Словом, сделайте как можно больше продвижений в сторону возможного решения, запишите их в чистовик — а там, глядишь, и само решение может найтись!

На закуску, попробуйте применить те идеи, которые вы узнали. Вам будет предложено несколько примеров — от самых простых, до «задания С6». Если пример совсем не будет получаться — советы по каждому конкретному примеру ждут вас в главе «На помощь!» Удачи вам!

1. Найти все такие $a \in \mathbb{N}$, что $(a^2 + 2a - 3) \vdots a$.
2. Найти все такие $a \in \mathbb{N}$, что $(a^2 + 3) \vdots (a^2 - 2)$.
3. Найти все такие $a \in \mathbb{N}$, что дробь $\dfrac{3-4a}{2a+1}$ является целым числом.
4. Предположим, что числа $a^2 + 2$ и $a^2 - 7$ имеют общий делитель d, то есть каждое из этих чисел делится на d. Какие значения может принимать число d, если a — натуральное число?
5. Натуральные числа m и n таковы, что и $m^3 + n$ и $m^3 + m$ делятся на $m^2 + n^2$. Найдите m и n.

Глава 2

ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Что мы делаем, когда поставленная задача кажется нам слишком сложной? Некоторые из вас ответят: «выбираем задачу попроще», и будут правы. Другие скажут, что отступаться от задачи — не в их правилах, посему они будут решать и решать ее несмотря ни на что (и тоже будут правы). Но попробуем объединить эти два подхода: если задача слишком сложна — разобьем ее на несколько подзадач, каждая из которых решается проще, чем исходная! То же самое происходит и с натуральными числами.

В теории чисел есть специальное понятие «простые числа». Эти числа являются теми кирпичиками, из которых строится здание под названием «натуральное число». Но кирпичики — кирпичиками, а формальное определение простых чисел, все же, дадим.

Определение простого числа

Натуральное число называют простым, если у него есть ровно два натуральных делителя.

Из первой главы мы знаем, что это за делители — само число и единица. Между прочим, единица не является простым числом, ведь у нее есть только один натуральный делитель!

Какие же числа являются простыми? 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... Кстати, нетрудно доказать, что простых чисел — бесконечно много. Делается это методом «от противного».

Математик и физик доказывают теорему о том, что все нечетные числа — простые.
Математик:
— 3 — простое, 5 — простое, 7 — простое, 9 — не простое. Это контрпример, значит теорема неверна.

Физик:
— 3, 5 и 7 — простые, 9 — ошибка эксперимента, 11 — простое и т.д. Возьмем ещё несколько случайно выбранных нечетных чисел. 17 — простое, 19 — простое, 23 — простое... Теорема доказана.

Составным числом называют натуральное число, не являющееся простым и единицей. Почему составным? Да потому, что это число может быть представлено в виде произведения простых чисел, то есть, *составлено* из тех самых кирпичиков, которые мы только что определили. Утверждение, сформулированное мной в предыдущей фразе можно записать более строго — тогда мы придем к так называемой ОТА — Основной Теореме Арифметики:

Теорема (основная теорема арифметики)
Всякое натуральное число, отличное от единицы, может быть представлено в виде произведения простых сомножителей и притом единственным образом (с точностью до порядка следования сомножителей).

Таким образом, если m — целое положительное число, а p_1, p_2, ... p_n — простые, то
$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n.$$
Если среди чисел p_1, p_2, ... , p_n есть одинаковые, то $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots p_k^{\alpha k}$ — такое представление называют каноническим разложением натурального числа.

Между прочим, подобное разложение полезно не только в задачах на делимость. Представьте себе, что вы решаете квадратное уравнение, и дискриминант равен 9216. Соответственно, надо как-то извлечь корень из этого числа. Нет, можно, конечно, воспользоваться таблицей или калькулятором, но вот беда — на прошедшем в 2009 году экзамене ни того, ни другого не было в распоряжении бедных школьников. Так что уметь извлекать корень своими силами очень полезно, а делается это примерно так.

Пример 1. Чему равен $\sqrt{9216}$?

Решение. Разложим число 9216 на простые сомножители. Заметим, что 9216 — четное число, посему оно точно делится на 2, и тогда можно его разложить как $9216 = 2 \cdot 4608$. Аналогично, так как 4608 также четно, то и в его разложении присутствует двойка. Действуя таким образом, приходим к цепочке равенств:

$$9216 = 2\cdot4608 = 2\cdot2\cdot2304 = 2\cdot2\cdot2\cdot1152 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot576 = \\ = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot288 = 2^6\cdot144 = 2^7\cdot72 = 2^8\cdot36 = 2^9\cdot18 = \\ = 2^{10}\cdot9 = 2^{10}\cdot3^2.$$

Как известно, корень из произведения равен произведению корней, а при извлечении квадратного корня из степени, ее показатель делится на 2. Пользуясь этими свойствами, приходим к ответу:

$$\sqrt{9216} = \sqrt{2^{10}\cdot3^2} = \sqrt{2^{10}}\cdot\sqrt{3^2} = 2^5\cdot3 = 32\cdot3 = 96.$$

Ответ: 96.

Практический совет. Если вы уверены, что данное вам число является точным квадратом (то есть, корень из него можно извлечь, получив в итоге натуральное число), то извлечь корень можно и проще. Взять, к примеру, то же самое число 9216. Давайте поищем квадрат круглого числа, к которому данное число ближе всего. После недолгих поисков, получаем, что $9216 > 8100$, а ближайший квадрат, больший числа 9216 — это число 10000 (квадрат ста). Значит, искомый корень находится в промежутке от 90 до 100. Итак, это двузначное число, первая цифра которого — 9.

Какая же вторая? Несложно доказать такой факт: квадрат числа заканчивается на ту же цифру, на которую заканчивается квадрат последней цифры числа. В нашем случае квадрат заканчивается на 6. Какую же цифру надо возвести в квадрат, чтобы на конце получилась шестерка? Ну, тут одно из двух — либо 4, либо 6.

Осталось понять, 94 или 96? Выбрать из этих вариантов можно, например, с помощью признака делимости на девять. По этому признаку 9216 делится на 9, а значит, корень из этого числа будет делиться на три. Из двух рассматриваемых чисел только 96 делится на 3, так что ответ — 96.

Замечание. Умение раскладывать число на простые сомножители очень полезно, посему используйте любую возможность его развить. Скажем, едете вы в метро, книжку забыли дома, делать нечего. Почему бы это время не потратить с пользой? Берете номер вагона (четырех- или пятизначное число) и раскладываете его на простые сомножители! Можно ввести и соревновательный эффект — раскладывать номер вагона на простые сомножители наперегонки с другом! Вот увидите, остановки пролетят незаметно, главное — не пропустить свою!

Итак, мы знаем определения простых и составных чисел, а это уже кое-что. Попробуем разобрать пару несложных примеров.

Пример 2. При каких натуральных n число $2n$ является простым?

Решение. Заметим, что число $2n$ делится на 2. Если $2n$ не равно 2, то 2 — не само число и не единица, а значит, число $2n$ — составное. Если же $2n$ равно 2, то это число простое, а n в этом случае равно 1.

Ответ: $n = 1$.

Пример 3. При каких натуральных n число $n^2 - 1$ является простым?

Решение. Применим формулу «разность квадратов»: $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$.

Если число $n^2 - 1$ — простое, то его делителями могут быть только оно само и 1. С другой стороны, из формулы следует, что $n - 1$ и $n + 1$ — делители числа $n^2 - 1$. Значит, $n^2 - 1$ может быть простым числом только в том случае, если эти делители равны, соответственно, единице (так как первый сомножитель меньше, то именно он должен равняться 1) и самому числу. Итак $n - 1 = 1$, $n = 2$. Проверяем — в этом случае $n^2 - 1 = 3$, простое число.

Ответ: $n = 2$.

Пример 4. Решить уравнение в натуральных числах: $n^2 - m^2 = 13$.

Решение. И снова воспользуемся формулой «разность квадратов»: $(n - m)(n + m) = 13$.

Заметим, что в правой части стоит простое число. Левая же часть представляет из себя произведение двух целых чисел. Даже натуральных, на самом деле (так как сумма точно положительна, а разность должна быть того же знака, чтобы произведение было положительным). Следовательно, число 13 нужно представить в виде произведения двух натуральных чисел. Так как число 13 — простое, то такое разложение единственно, эти числа могут быть только числами 1 и 13. Причем так как n и m — натуральные, то их разность меньше их суммы. Итого, приходим к системе:

$$\begin{cases} n - m = 1, \\ n + m = 13, \end{cases} \begin{cases} 2n = 14, \\ 2m = 12, \end{cases} \begin{cases} n = 7, \\ m = 6. \end{cases}$$

Ответ: $n = 7,\ m = 6.$

Заметим, что в последних двух примерах мы пользовались одним и тем же соображением: если простое число может быть разложено на натуральные множители, то эти множители могут быть только единицей и самим числом. Собственно, этот несложный факт является прямым следствием из определения простого числа, однако именно он помогает решить львиную долю задач, в которых фигурируют простые числа.

Теперь, вооружившись несколькими полезными идеями, займемся штурмом более сложных задач.

Пример 5. Натуральные числа удовлетворяют условию $ab = cd$. Может ли число $a+b+c+d$ быть простым?

Решение. Выразим переменную a через остальные переменные из равенства $ab = cd$: $a = \frac{cd}{b}$.

Подставим этот результат в выражение $a+b+c+d$:

$$a+b+c+d = \frac{cd}{b} + b + c + d = \frac{cd + b^2 + bc + bd}{b} = \frac{c(b+d) + b(b+d)}{b} =$$
$$= \frac{(b+c)(b+d)}{b}.$$

Заметим, что последняя дробь является целым числом (так как исходно мы преобразовывали целое число $a + b + c + d$). Следовательно, числитель должен нацело делиться на знаменатель, или, иначе говоря, данную дробь можно сократить так, чтобы в знаменателе осталась единица. При сокращении этой дроби, часть делителей числа b (имеются в виду делители, присутствующие в каноническом представлении числа b) сократится с первой скобкой, оставшаяся часть — со второй. Предположим, что после сокращения от первой скобки осталось натуральное число m, а от второй — натуральное число n. В этом случае можно утверждать, что $m, n > 1$ ($m \geq \frac{b+c}{b} > \frac{b}{b} = 1$, аналогично — с n).

Следовательно, число $a + b + c + d = m \cdot n$, где $m, n > 1$. Значит, это число не простое.

Ответ: Это число не может быть простым.

Как же можно было придумать такое решение? Во-первых, следует задаться вопросом: что легче — доказать, что некоторое выражение может быть простым числом, или что оно быть простым числом не может? Рассмотрим обе возможности по порядку.

Пусть надо доказать, что выражение может быть простым числом. Значит, достаточно подобрать такие значения переменных a, b, c и d, чтобы при подстановке этих значений получилось бы простое число. Например, если есть выражение $m+n$, то оно может быть простым — достаточно подставить $m=n=1$. Отметим, что это выражение является простым числом отнюдь не для любых m и n — взять хотя бы обе двойки. Но нас и не спрашивают про все значения — достаточно подобрать только одну подходящую пару, чтобы убедиться, что число *может* быть простым.

А как доказать, что выражение не может быть простым? Тут одного примера будет мало — нам надо доказать, что оно не является простым, какие бы значения переменных мы не выбрали. Следовательно, нужно искать какое-то глобальное противоречие — например, с определением простого числа. Действительно, если выражение разложимо в произведение двух сомножителей, больших единицы, то простым оно уж точно не является. Как пример — рассмотрим выражение $2m + 2n$. Оно раскладывается на множители — $2(m + n)$. Ясно, что при натуральных m, n оба полученных сомножителя будут больше единицы, а значит исходное выражение не является простым.

Словом, либо нам нужно подобрать такие значения для четырех переменных из условия, чтобы их сумма была простым числом, либо нужно попытаться разложить на множители это выражение, доказав тем самым что число не может быть простым.

Какой же путь выбрать? Угадать непросто, а универсальных советов тут нет, каждая задача индивидуальна. А. Н. Колмогоров в подобных случаях (когда нужно либо доказать, либо опровергнуть некоторое утверждение), советовал поочередно то доказывать утверждение, то его опровергать, продвигаясь, таким образом по обоим направлениям сразу.

В нашем случае есть подсказка: мы пока никак не воспользовались равенством, данным нам в условии. Обратимся к нему — не зря же составители задачи включили его в текст условия!

Итак, $ab = cd$. На мой взгляд, это просто замечательное равенство, ведь глядя на него можно как впасть в ступор, так и мгновенно придумать нужную идею. Для того, чтобы в вашей жизни преобладало второе, стоит задаться вопросом — «А где я уже видел что-то похожее?» Действительно, где это теоретически могло встретиться? Есть равенство, в котором четыре переменных. Мне кажется, что такое равенство вполне могло быть... (откроем черный ящик!) одним из уравнений системы с четырьмя неизвестными. Почему бы и нет, действительно? Тем более, нам дано еще одно выражение, зависящее от тех же четырех переменных. Так, хорошо, а как мы обычно решаем системы? Основной метод — метод подстановки, то есть одна переменная выражается через другие, после чего полученное выражение подставляется в оставшиеся уравнения. У нас в задаче других уравнений нет, но есть выражение $a + b + c + d$ — почему бы не попробовать подставить туда? И точно, после несложных преобразований, приходим к выражению $\dfrac{(b+c)(b+d)}{b}$.

Разложили на множители? Разложили. Самое время записывать ответ, что простым данное число быть не может? Боюсь, тогда мы в лучшем случае получим 2 балла из 4 возможных, не больше. Ведь мы не совсем разложили выражение на множители, у нас есть знаменатель, который путает все карты! Действительно, теоретически, он может сократиться с одной из скобок — и тогда никакого разложения на множители нет... С другой стороны, полностью сократить скобку знаменатель не может — в каждой скобке стоит выражение, которое больше b. Следовательно, осталось аккуратно показать, что после сокращения знаменателя со скобками, от каждой из них останется число, большее единицы. Именно это соображение и заканчивает решение. Вот теперь — Ура!

Замечание. Кстати, а как проверить, является ли число простым? По определению, простым мы называем такое число, которое имеет ровно два делителя: себя и 1. Так что можно просто проверить, делится ли данное нам число на 2, на 3, на 4 и т. д. И если мы дойдем до самого числа и выясним, что не делится ни на что — значит, наше число простое, а если в какой-то момент делимость установлена, то можно прекращать процесс и смело заявлять, что число — составное. Правда, это очень долго — скажем, для числа 437 в таком случае придется рассмотреть 435 чисел и проверять делимость на каждое из них... С другой стороны, если число не делится на 2, может ли оно делиться на 4? Нет. А на 6? Тоже нет, ведь чтобы число делилось на 6, нужно чтобы оно делилось на 2 и на 3. А оно на 2 уже не делится. Стало быть, все четные числа рассматривать уже не надо!

Аналогично можно поступить и с тройкой: если число не делится на 3, то на 6, на 9, на 12 и на все остальные числа, делящиеся на 3, оно не делится! Из этого следует, что на самом деле, достаточно проверить только делимость на **простые** числа — если не делится ни на одно простое, то и на составное делиться не может (ибо составное можно представить в виде произведения простых!)

А до какого момента проверять? И здесь можно немного схитрить: если очередное простое число при возведении в квадрат будет больше исходного (которое мы исследуем на простоту), то дальше проверять уже не надо! Почему? Потому что если, начиная с этого момента, у исходного числа n найдется делитель d, то число $\frac{n}{d}$ также будет делителем исходного числа. Причем несложно показать, что $\frac{n}{d} < d$ — это верно в силу того, что $n < d^2$. Но это противоречит тому, что мы вообще дошли до делителя d — мы бы остановили процесс раньше, когда рассматривали число $\frac{n}{d}$.

Резюмируя, имеем готовый алгоритм: рассматриваем по очереди простые числа, не превосходящие корня из исходного числа, и если число не делится ни на одно из них, то оно простое, в противном случае — составное.

Иллюстрация алгоритма. Рассмотрим число 773. Последовательно проверяем, что оно не делится на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. А следующее простое число — 29 — уже рассматривать не надо, так как $29^2 = 841 > 773$. Итого, 773 — простое число.

Математики — крайне забавные люди. Нет, вы только вдумайтесь: число 2 305 843 009 213 693 951 они называют простым, зато число 4 для них — не простое!

Пример 6. На сколько нулей оканчивается число 100! ($100! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 100$)?

Комментарий. Прежде, чем привести правильное решение этой задачи, позволим себе остановиться на нескольких неправильных. С опровержениями, разумеется.

Попытка решения № 1. Число оканчивается на ноль, когда оно делится на 10. Подсчитаем, сколько чисел из данного нам произведения делится на 10 — их 10. Значит, и нулей на конце будет 10.

Опровержение: Число 100 делится на 10, но заканчивается сразу на 2 нуля...

Попытка решения № 2. Число оканчивается на ноль, когда оно делится на 10, на два нуля — если делится на 100, на три нуля — если делится на 1000, и т. п. Подсчитаем, сколько чисел из данного нам произведения делится на 10 (но не делится на 100) — их 9. Да еще одно число делится на 100. Значит, нулей на конце будет 9 + 2 = 11.

Опровержение: В произведении $5 \cdot 2$ ни одно из чисел не делится на 10, но их произведение оканчивается на 0...

Попытка решения № 3. Руководствуясь опровержением к предыдущему «решению», скорректируем формулировку так: число оканчивается на ноль, когда оно имеет в своем разложении на простые сомножители пятерку и двойку; на два нуля — если имеет в своем разложении на простые сомножители пятерку в квадрате и двойку в квадрате и т. п. Подсчитаем, сколько чисел из данного нам произведения делится на 5 (это и даст нам степень пятерки в разложении на) — их 20. Очевидно, степень двойки будет даже больше, так как четных чисел от 1 до 100 — 50. Значит, исходное число оканчивается на 20 нулей.

Опровержение: В произведении $25 \cdot 4$ есть лишь одно число, делящееся на 5, однако произведение этих чисел оканчивается на два нуля...

Правильное решение. Число оканчивается на ноль, когда оно имеет в своем разложении на простые сомножители пятерку и двойку; на два нуля — если имеет в своем разложении на простые сомножители пятерку в квадрате и двойку в квадрате и т. п. Подсчитаем степень пятерки в нашем произведении. Чисел, делящихся на 5, будет действительно 20, однако некоторые из них содержат в своем разложении **две** пятерки! Очевидно, это числа, делящиеся на 25 — 25, 50, 75, 100. Чисел, содержащих в своем разложении три и более пятерки, очевидно, нет (так как минимальное такое число — 125). То есть, пятерка будет входить в наше произведение в степени $20 + 4 = 24$! Ну, а количество двоек, очевидно, больше — их не меньше 50 в силу того, что в произведение входят 50 четных чисел. Значит, 100! оканчивается на 24 нуля.

Ответ: 24.

Замечание. Обратите внимание, что к правильному решению мы пришли не сразу — активно использовался метод «проб и ошибок». Тем не менее, что очень важно с методической точки зрения, если каждое «решение» опровергать примером, не рассказывая при этом правильного решения, то у учащегося возникает ощущение, что он сам решил задачу, без какой-либо помощи со стороны учителя. Хотя на самом деле контрпримеры очень ненавязчиво подталкивают в нужную сторону. Поэтому если ребенок представляет вам на суд решение задачи, в котором вы видите ошибку — не спешите указывать на нее явно! Лучше подберите контрпример (а еще лучше — предусмотрите подобную ситуацию и подберите несколько контрпримеров заранее), чтобы ученик смог а) сам найти свою ошибку и б) сам догадаться, как ее исправить!

Пример 7. Найти такое наименьшее натуральное n, что 2010! не делится на n^n.

(2010! = $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2010$.)

Решение.

1) Пусть $n\le44$. Тогда $n^2\le1936<2010$. Следовательно, в произведении $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2010$ содержатся числа n, $2n$, $3n$, ... , n^2. Каждое из этих чисел делится на n, следовательно, произведение делится на n^n, так как всего нами выбрано n чисел. А из этого следует, что 2010! и подавно делится на n^n.
2) Пусть $n = 47$. Это число является простым. Следовательно, для того чтобы узнать, делится ли число 2010! на 47^{47}, необходимо посчитать, сколько чисел из разложения $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2010$ делится на 47. Что же это за числа? Разумеется, это 47, $47\cdot2$, $47\cdot3$... Но $47\cdot46 = 2162>2010$, значит, таких чисел встретится не более 45. То есть, их меньше 47, и очевидно, что ни одно из них не содержит в качестве делителя 47^2. Значит, 2010! не делится на 47^{47}.
3) Проверим $n = 45, 46$. Пусть $n = 45$. Тогда числа 45, $45\cdot2$, $45\cdot3$, ... , $45\cdot44$ ($45\cdot44 = 1980$) делятся на 45. Значит, произведение этих чисел будет делиться на 45^{44}. Рассмотрим также числа 5 и 9. Они также входят в 2010!, а их произведение делится на 45. Следовательно, 2010! делится на 45^{45}.

   Пусть $n = 46$. Тогда числа 46, $46\cdot2$, $46\cdot3$, ... , $46\cdot43$ ($46\cdot43 = 1978$) делятся на 46. Значит, произведение этих чисел будет делиться на 46^{43}. Рассмотрим пары чисел 2 и 23, 4 и 69, 8 и 115. Первое число в каждой паре делится на 2, а второе — на 23. Значит, произведение чисел в каждой паре делится на 46. Учитывая, что все вышеуказанные числа не повторяются и входят в произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2010$, имеем, что 2010! делится на 46^{46}.

4) Из пп.1,3 следует, что при $n \le 46$ число 2010! делится на n^n. Из п. 2 видно, что при $n = 47$, число 2010! не делится на n^n. Значит, 47 — такое наименьшее натуральное число, что 2010! не делится на n^n.

Ответ: 47.

Когда читаешь такое решение, невольно возникает вопрос — а с какой крыши автор достал число 44? Нет, решение от этого неправильным не становится: ну, захотелось ему выбрать именно 44, вот он и выбрал. Но если рассказать это решение своим ученикам, то наиболее пытливые отреагируют сразу же — мол, почему 44, а не 113 и не 37? В этом как раз и отличается письменное решение от рассказа у доски: если в первом случае необходимо просто привести правильное решение, то во втором самое главное — рассказать, как можно было придумать такое решение. Этим мы сейчас и займемся.

Итак, 2010! не делится на n^n. Первым делом, осознаем, что при малых n, очевидно, делимость будет иметь место: и на 1^1, и на 2^2 и на 3^3 2010! делится без остатка (как минимум потому, что содержит в своем разложении числа 1, 4 и 27, соответственно). С другой стороны, 2010! явно не делится на 3000^{3000} — хотя бы потому, что $2010! < 3000^{3000}$. Правда, очень сомнительно, что 3000 — наименьшее число, удовлетворяющее условию задачи... Итак, дело за малым — найти число n между 3 и 3000, которое будет первым, не удовлетворяющем условию $2010!\,\vdots\,n^n$.

Рассмотрим такую ситуацию (вот оно, озарение № 1!): пусть среди чисел 1, 2, ... , 2010 содержится n чисел, каждое из которых делится на n. Очевидно, что в этом случае их произведение будет делиться на n^n (каждое делится на n, а всего их — n). А значит и 2010! будет делиться на n^n, так как содержит в себе произведение выбранных n чисел.

Какие же числа делятся на n? n, $2n$, $3n$, ... Если требуется, чтобы их было n штук, то это будут числа n, $2n$, $3n$, ... , n^2. Таким образом, сформулированное условие (содержится n чисел, каждое из которых делится на n) выполнится тогда, когда среди чисел от 1 до 2010 будет содержаться число n^2. То есть достаточно убедиться в том, что $n^2 < 2010$. Подберем наибольшее натуральное n, для которого это неравенство выполняется. Да-да, это то самое число 44. Следовательно, числа, не превосходящие 44, нам не подходят (что и показано в первом пункте решения). Стало быть, теперь нас интересуют только числа, большие 44 (для которых $n^2 > 2010$).

Встает резонный вопрос: а верно ли обратное утверждение? Верно ли, что если среди чисел 1, ... , 2010 не найдется n чисел, каждое из которых делится на n, то 2010! не будет делиться на n^n? Очевидно, нет: похожая ситуация была в прошлом примере, когда числа 2 и 5 не делились на 10, но их произведение — делилось. Стоп (озарение № 2!) А если число n — **простое**? Тогда его нельзя разложить в произведение двух отличных от единицы сомножителей, посему на степень вхождения простого числа в произведения влияют только те числа, которые делятся на это простое число! И если таких чисел меньше n (то есть в том случае, когда $n^2 > 2010$), то и степень вхождения простого числа в каноническое разложение будет меньше n. Правда, возможен случай, когда одно из чисел, делящихся на n, будет делиться на n^2 (то есть степень вхождения n в произведение увеличится не на один, а на два). Но такое число должно быть не меньше n^2, а значит, больше 2010. Итого, если число n — простое и оно больше 44, то 2010! не делится на n^n. Ищем наименьшее такое число — это 47. Таким образом, сформировался второй шаг решения.

Итак, 47 — подходит. Является ли оно наименьшим? Мы доказали, что числа, не превосходящие 44, условию не удовлетворяют, стало быть, осталось проверить только числа 45 и 46. Причем проверка осуществляется с помощью комбинирования идеи из первого пункта данного решения (выбрать те числа от 1 до 2010, которые нацело делятся на данное число n) и идеи разложения числа на простые сомножители. Так как числа 45 и 46 не являются простыми, то нетрудно привести пары чисел, не делящихся на n, чтобы произведение чисел в паре делилось бы на 45 или 46, соответственно. Достаточно, чтобы первое число в паре содержало один делитель числа 45 (46), а другое — второй: например, (9; 5), (18; 10) для числа 45, и (23; 2), (69; 4) для числа 46. Далее остается добавить количество найденных пар (их потребуется не так уж много) к количеству чисел, нацело делящихся на 45 (46), после чего становится очевидно, что 2010! делится на 45^{45} и 46^{46} (что и изложено в третьем пункте решения).

Следовательно, 47 — действительно наименьшее число, удовлетворяющее нашему условию. Ура! Задача решена!

Замечание. К идее рассмотрения простого числа и правильному ответу можно было прийти и другим путем. 2010 — очень большое число. Давайте рассмотрим число поменьше — скажем, 4. $4! = 24$, и нетрудно проверить, что наименьшим числом, удовлетворяющим условию «4! не делится на n», будет число 3. Оно же будет ответом и при рассмотрении $5! = 120$, и для $6! = 720$, и даже для 7! и 8! (ведь в каждом из этих случаев на 3 делятся только числа 3 и 6, а их произведение дает только вторую степень вхождения тройки). А вот 9! делится на 3^3. Делится оно и на 4^4 — в этом убедиться также нетрудно. А на 5^5 уже не делится. Итак, здесь ответом будет число 5. Это наводит (по крайней мере, может навести) на следующие мысли:

а) ответом всегда будет нечетное число (а верно ли это утверждение? Увы, не всегда, но никто и не говорил, что те мысли, которые пришли в голову, будут верными!);

б) ответом всегда будет простое число;

в) ответом будет число, квадрат которого больше чем число, факториал которого мы рассматриваем.

Итак, мы провели небольшое **исследование** задачи, которое натолкнуло нас на некоторые интересные соображения. Эти соображения и приведут нас к решению исходной задачи.

С простыми и составными числами мы встретимся еще не один раз. А в заключение этой главы — несколько задач для самостоятельного решения:

1. Является ли простым число 887?
2. Представить в канонической форме число 1234.
3. При каких натуральных n число $n^3 - 1$ является простым?
4. Существует ли такое натуральное число n, при котором число $n^4 + 4$ является простым?
5. Найти такое наименьшее натуральное число n, что $n!$ делится на а) 8^8, б) 5^5.
6. Решить в натуральных числах уравнение с параметром $x^2 - y^2 = p$, если известно, что параметр p — простое число.

Глава 3

НОД И НОК. ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

В нашей жизни мы часто стараемся найти что-то общее, объединяющее двух или более людей. Общность интересов, взглядов на жизнь, пристрастий — все это часто становится поводом для дружбы или простого общения.

Чем натуральные числа хуже? Они тоже могут быть похожими друг на друга, содержать что-то общее. Пожалуй, самый простой пример «похожести чисел» — если в них есть одинаковые цифры. Однако это, скажем так, «внешний» признак, то есть что-то сродни цвету волос у людей. Согласитесь, что вам будет интереснее общаться с человеком, который близок вам по духу, а не по цвету волос, разве не так? Поэтому и в случае с числами, гораздо интереснее «внутренняя похожесть» — то есть общее для двух или более чисел внутреннее содержание.

Эта «похожесть» особенно хорошо видна, когда числа представлены в каноническом виде. Например, рассмотрим числа 14 и 10. $14 = 2 \cdot 7$, $10 = 2 \cdot 5$ — сразу видно, что общая у них — двойка!

Если обобщить этот пример, и записать все более формально, то мы приходим к следующему определению.

Определение

Наибольшим Общим Делителем (НОД) натуральных чисел x, y называется такое наибольшее натуральное число, на которое делятся и x, и y.

А теперь давайте представим себе библиотеку. В ней находится много-много книжек на самые разные темы. Нетрудно заметить, что информация, представленная в одной книге, вполне может повторяться в другой (скажем, если мы берем алгебраическую библиотеку, то редкая книга обходится без формул сокращенного умножения или основного тригонометрического тождества). Таким образом, если бы мы захотели создать одну огромную книгу, которая включала бы в себя всю информацию библиотеки, то глупо было бы переписывать все книги подряд — некоторые факты бы непременно повторялись! Следовательно, гипотетический алгоритм формирования такой «книги» выглядел бы так: берем очередной факт, и если он уже есть в нашей «книге», то переходим к следующему факту, а если нет — вносим этот факт в «книгу» и только потом переходим к следующему.

Похожая ситуация возникает и с числами, когда речь заходит о таком понятии, как Наименьшее Общее Кратное. Это и есть та самая «книга», содержащая в себе всю информацию об исходных числах! Например, если взять те же числа 14 и 10, то Наименьшим Общим Кратным этих чисел будет число, содержащее в себе делители обоих чисел, то есть это будет число 70 $(2 \cdot 5 \cdot 7)$. Впрочем, и в этом случае стоит дать строгое математическое определение.

Определение

Наименьшим Общим Кратным (НОК) натуральных чисел x, y называется наименьшее натуральное число, которое делится и на x, и на y.

Кстати, заметим, что понятие НОД также укладывается в концепцию библиотеки: если нам даны две книжки, то аналогом их НОД будет, разумеется, совпадающая часть этих книжек, то есть те факты, которые встречаются и там, и там.

У НОД и НОК практически нет своих специфических свойств или формул, которые надо знать — достаточно знать лишь определения этих понятий. Исключение составляет единственная формула, использование которой редко бывает жизненно необходимым, но в некоторых случаях может существенно укоротить решение задачи.

Свойство. $\text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОК}(x, y) = x \cdot y$.

Формального доказательства этой формулы мы приводить не будем, но поясним происхождение этой формулы. Для простоты опять вернемся к примеру с книжками:

предположим, что у нас есть две книжки. В каждой из них собрано некоторое множество фактов, роль НОД, как мы уже сказали, играют те из них, которые содержатся в обеих книжках, а НОК — неповторяющаяся совокупность фактов, содержащихся хотя бы в одной из этих книг. В этом случае, что представляет собой правая часть нашего свойства? Не что иное, как объединение неповторяющейся совокупности фактов с теми фактами, которые встречаются в обеих книжках. Таким образом, те факты, которые встречаются в обеих книжках, будут выписаны нами дважды, а те, которые «уникальны» — по одному разу. Аналогично все обстоит и в правой части — там собраны все факты из двух книжек, то есть «уникальные» факты фигурируют один раз, а «пересекающиеся» — два раза. Осталось заметить, что обе части мы описали абсолютно одинаково.

А бывают ли книжки, которые вообще не пересекаются? Пожалуй, да: например, одна — математическая, а другая — о вязании крючком. Та же ситуация и с числами — нетрудно придумать числа, у которых наборы простых сомножителей в каноническом разложении не пересекутся. Такие числа, очевидно, имеют НОД равный единице, а называют их взаимно простыми.

Определение

Если НОД$(x, y) = 1$, то числа x и y называются взаимно простыми.

Но довольно теории: глаза уже устали читать, а руки так и просят задачек!

Пример 1. Найти НОД и НОК чисел 28 и 100.

Решение. Разложим данные в условии числа на простые сомножители: $28 = 2^2 \cdot 7$, $100 = 2^2 \cdot 5^2$. Тогда очевидно, что НОД$(28, 100) = 2^2 = 4$, а НОК$(28, 100) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 700$.

Ответ: 4, 700.

Замечание. В принципе, НОК можно было найти и по-другому: если мы уже нашли НОД и знаем оба исходных числа, то НОК легко находится с помощью того самого единственного свойства, сформулированного чуть выше $\left(\text{НОК}(x, y) = \dfrac{x \cdot y}{\text{НОД}(x, y)}\right)$.

Итак, первый шаг при отыскании НОД и НОК — разложить числа на простые сомножители. Далее, чтобы найти НОД, берем каждый сомножитель в наименьшей встречающейся степени (в нашем примере для сомножителя 2 эта степень — вторая, а для сомножителей 5 и 7 — нулевая). При нахождении НОК поступаем с точностью наоборот — берем каждый простой сомножитель в наибольшей встречающейся степени (в примере это вторая степень для двойки и пятерки и первая для семерки).

Комментарий. А что делать, если числа большие, как искать НОД? Раскладывать их на множители очень непросто. В таких случаях применяют специальный алгоритм — алгоритм Евклида. Суть его очень проста — если вместо любого из наших чисел рассмотреть их разность, то НОД не изменится. Иллюстрация этого нехитрого правила такова:

$$\text{НОД}(2009,\ 3002) = \text{НОД}(2009,\ 993) = \text{НОД}(1016,\ 993) = \text{НОД}(23,\ 993) = 1,$$

так как первое из оставшихся чисел — простое, а значит, общим делителем может быть либо оно само (23), либо 1, но 23 — не подходит, так как 993 не делится на 23.

Внимательный читатель сможет усовершенствовать данное правило: на каждом шаге можно рассматривать не разность $(x - y)$, а сразу $(x - ky)$, где k — натуральное число. Этот подход еще больше ускоряет алгоритм и еще быстрее приводит к ответу.

Но это — цветочки. Ягодки начинаются тогда, когда в задачах появляются переменные.

Пример 2. Какие значения может принимать $\text{НОД}(x, x+2)$, где x — натуральное число?

Решение. Пусть $\text{НОД}(x, x+2) = a$. Так как a — наибольший общий делитель чисел x и $(x + 2)$, то $x \,\vdots\, a$ и $(x + 2) \,\vdots\, a$. Следовательно, по свойству делимости, и разность данных чисел (то есть, 2) делится на a. Из этого следует, что число

a может быть только единицей или двойкой (других делителей у числа 2 нет).

Проверим, что оба этих значения достигаются. При $x=3$, НОД$(3,5)=1$, то есть НОД может принимать значение 1. При $x=2$, НОД$(2,4)=2$, то есть НОД может принимать значение 2.

Ответ: 1; 2.

Замечание. Без проверки данное решение было бы неполным. Казалось бы, почему? Мы доказали, что искомый НОД является делителем двойки, таковых делителей (естественно, натуральных) существует в природе всего два — 1 и 2, зачем же еще что-то надо проверять? А вот зачем. Что мы доказали? Мы доказали, что двойка делится на НОД, то есть, НОД не может принимать никакие другие значения, кроме чисел 1 и 2. А принимает ли он при этом значения 1 и 2? Это пока открытый вопрос! Скажем, верно утверждение, что автора этой книги не зовут никак, кроме «Алексей» и «Георгий», но из этого же не следует, что его зовут и так, и так!

Таким образом, необходимо сделать проверку — подобрать такое x, что НОД действительно принимает значения 1 и 2 (либо доказать, что таких x не существует). Это и завершает решение задачи.

Математик, физик и социолог сидят в поезде и пересекают границу соседнего государства. На первом же поле они увидели двух черных овечек.
Социолог говорит:
— Можно сделать заключение, что в этой стране все овцы черного цвета.
Физик с сомнением покачал головой и возразил:
— Этого нельзя сказать. Самое большее, что можно утверждать — в этой стране есть как минимум две овцы черного цвета.
На это математик, улыбаясь, заметил:
— И этого тоже нельзя утверждать! Однозначно можно сказать, что в этой стране две овцы черного цвета с одной стороны!

Комментарий. Если в условии фигурируют переменные и их НОД, то чаще всего нужно использовать тот факт, что НОД является «ОД», то есть общим делителем данных нам чисел. Таким образом, мы устанавливаем две делимости на одно и то же число, а дальше можно будет использовать свойства делимости из первой главы. Аналогичная ситуация с НОК — обычно достаточно для начала записать условие, что НОК является просто «ОК», то есть делится на оба данных нам числа. Иллюстрацией этого комментария послужит следующий пример.

Пример 3. $x, y \in \mathbb{N}$. НОД$(x, y) = 13$, НОК$(x, y) = 52$. Найти x, y.

Решение. Так как НОД$(x, y) = 13$, то по определению НОД, числа x и y делятся на 13. Следовательно, по определению делимости, найдутся такие целые (а в данном случае — натуральные) числа k и n, что $x = 13k$, $y = 13n$. С другой стороны, по определению НОК, число 52 делится и на x, и на y. С учетом того, что $52 = 13 \cdot 4$, становится очевидно, что числа k и n являются делителями числа 4. Значит, они могут быть равны только 1, 2 и 4. Если $k = 1$, то $x = 13$, а тогда по формуле $y = \dfrac{\text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОК}(x, y)}{x} = 52$. Эта пара подходит. Аналогично, если $k = 4$, то $x = 52$, а $y = 13$ — эта пара также подходит.

Наконец, если $k = 2$, то $x = 26$ и $y = 26$ — НОД этих чисел равен 26, а не 13, имеем противоречие.

Ответ: (13; 52) и (52; 13).

Комментарий. Можно было решать и по-другому, не вводя дополнительных переменных. Заметим, что если x делится на 13, то эта переменная может быть равна 13, 26, 39, 52, ... С другой стороны, так как 52 делится на x, то из данного ряда необходимо выбрать только те числа, которые являются делителями числа 52. По свойству делимости искомые числа не превосходят 52, из оставшихся выбираем подходящие — 13, 26 и 52. Осталось разобрать эти три случая — это можно сделать аналогично тому, как было проведено в конце первого решения.

Отметим еще раз, что ключом к успеху стало использование НОД и НОК как «ОД» и «ОК», то есть мы исходно рассмотрели только делимости, и лишь потом, на стадии отбора ответов «вспомнили», что это не просто общий делитель, а наибольший общий делитель.

Пример 4. Какие значения может принимать НОД(x, y), если известно, что при увеличении числа x на 6, НОД увеличивается в 4 раза?

Попытки решения. После первого взгляда на задачу, ее хочется отложить куда-нибудь. Собственно, после второго — тоже. Нет, ну серьезно — что за бред? Ни уравнений, ни делимостей, увеличение числа на 6 влечет увеличение какого-то НОД в 4 раза... Не знаешь даже, как подступиться к такой задаче. Впрочем, одна идея есть.

Идея № 1. Практически любую текстовую задачу можно свести к решению алгебраических уравнений или неравенств, либо анализу некоторых алгебраических выражений. Попробуем алгебраически интерпретировать условие этой задачи.

Если число x увеличить на 6, то получится число $(x + 6)$. Из условия мы знаем, что НОД при этом станет в 4 раза больше, то есть имеет место следующее равенство:

$$\text{НОД}(x + 6, y) = 4\,\text{НОД}(x, y).$$

Итак, наша задача может быть переформулирована так: какие значения может принимать НОД(x, y), если имеет место равенство: НОД$(x + 6, y) = 4$НОД(x, y).

Турист заблудился в лесу. Он начинает громко кричать: «Ау! Ауууууу!» Из чащи выходит медведь, и говорит ему:
— Мужик, ты чего тут разорался?
— Да вот, заблудился я — теперь, вот, кричу, вдруг кто-нибудь услышит...
— Ну, я услышал — тебе легче?

А действительно, стало ли легче? Да, мы получили какое-то уравнение, только что с ним делать? Не на «НОД» же сокращать. Тоска. А может быть...

Идея № 2. В уравнении фигурируют НОД некоторых чисел. Мы знаем (читали комментарий к примеру № 2), что если дан НОД, то надо использовать, что он является ОД исходных чисел, получив при этом некоторые делимости. Проблема только в том, что НОД в данном случае нам тоже неизвестен. А если он неизвестен, то... (мини-озарение!)

Идея № 3. Введем новую переменную: d = НОД(x, y). Тем более, что в текстовых задачах, как правило, следует вводить новую переменную, обозначая через нее то, что требуется найти. С учетом введенной переменной, имеем две делимости (так как число d является общим делителем для чисел x и y): $x \vdots d$, $y \vdots d$.

С другой стороны, подставляя новую переменную в записанное нами уравнение, получаем следующий результат: НОД$(x + 6, y) = 4d$.

Тогда из определения НОД для чисел $(x + 6)$ и y также выполняются две делимости:

$$(x+6) \vdots 4d,$$
$$y \vdots 4d.$$

Итого, имеем следующую «систему»:

$$x \vdots d,$$
$$y \vdots d,$$
$$(x+6) \vdots 4d,$$
$$y \vdots 4d.$$

Это уже кое-что. Мы получили несколько делимостей, с которыми мы уже умеем работать (если, конечно, внимательно читали первую главу).

Идея № 4. Посмотрим внимательно на эти четыре делимости. Первое, что бросается в глаза — похожесть второй и четвертой строчек. Более того, несложно заметить, что из четвертой строчки следует вторая: действительно, если $y \vdots 4d$, то на d оно делится и подавно. Значит, вторую строчку можно просто убрать из рассмотрения. Пустячок, а приятно. Кстати, из четвертой строчки следует, что число y делится на 4. Запомним это — авось, пригодится!

А что делать с первой и третьей строчками? В подобных случаях мы обычно вычитали из одной делимости другую, после чего переменная сокращалась. Однако сразу вычесть не получится: ведь по свойству мы можем вычитать только тогда, когда делимость рассматривается на одно и то же число, а в нашем случае это разные числа (d и $4d$). Вывод напрашивается: так сделаем их одинаковыми! Что нам стоит дом построить?

Заметим (опять озарение!), что если $(x+6)\vdots 4d$, то $(x+6)\vdots d$ по свойству делимости! А вот теперь уже можно вычитать — из полученной делимости вычитаем первую, и получаем, что $6 \vdots d$. А значит, d может принимать значения 1, 2, 3 или 6. Напомню, что авторов задачи интересовал вопрос, какие значения может принимать d. Значит, мы решили задачу?

Нет, увы, не значит. Вспомним пример 2 из этой главы — там была похожая ситуация. Пока что мы доказали, что искомый НОД не может принимать никаких **других** значений, кроме 1, 2, 3 и 6. А вот может ли он принимать все эти значения — открытый вопрос.

Идея № 5. Значит, по аналогии с примером 2 нужно подобрать такие числа в качестве переменных x и y, чтобы НОД принимал соответствующие значения, и при этом составленное нами уравнение обращалось бы в верное равенство. Но прежде чем проверять — еще одно озарение: число x должно быть четным! Действительно, если $(x + 6) \vdots 4d$, то $(x + 6) \vdots 4$, а значит, $(x + 6)$ — четное число, следовательно, и число x должно быть четным. Но ведь y тоже четно — оно даже на 4 делится! А это значит, что НОД чисел x и y также четен, ведь оба числа четны. Значит, единицу и тройку проверять уже не надо.

Пусть НОД$(x, y) = 2$. Тогда из нашего уравнения следует, что НОД$(x + 6, y) = 8$. Пойдем от второго условия: рассмотрим любые два числа, чей НОД равен восьми. Например, 8 и 8. Тогда $y = 8$ и $x = 2$ — их НОД действительно равен двум. Итак, для пары (2, 8) условие выполняется и достигается значение НОД, равное 2.

Пусть НОД$(x, y) = 6$. Тогда НОД$(x + 6, y) = 24$. Вновь пойдем от второго условия: рассмотрим любые два числа, чей НОД равен 24. Например, 24 и 24. Тогда $y=24$ и $x=18$ — их НОД действительно равен шести. Итак, для пары (18, 24) условие выполняется и достигается значение НОД, равное 6.

Таким образом, варианты 2 и 6 действительно возможны — мы привели соответствующие значения переменных. Вот теперь — самое время писать ответ.

Ответ. 2, 6.

Комментарий. Разумеется, если оформлять решение этой задачи, оно выйдет существенно короче. Однако в данном случае важно было показать, как это решение придумывалось, какие шаги для этого нужно предпринимать. Идеи, рассмотренные в решении, являются в достаточной степени универсальными, то есть их можно адаптировать под различные задачи.

И, как обычно, несколько задач для вас.

1. Доказать, что числа x и (x^2-1) — взаимно простые при всех натуральных x.
2. Найти НОД и НОК чисел 4567 и 7654.
3. Найти все такие пары натуральных чисел x и y, что НОД$(x, y)=13$, а НОК$(x, y)=78$.
4. Найти все пары натуральных чисел, разность которых равна 66, а их НОК равно 360.

Глава 4

ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Зачем вообще нужны признаки? Обычно они помогают выделить нужный объект из ряда похожих. Так, например, признак параллелограмма позволяет нам выделить из всех четырехугольников именно параллелограммы. Признак перпендикулярности прямой и плоскости позволяет быстро доказать, что прямая действительно перпендикулярна плоскости. А уж какие объекты определяет признак вписанного четырехугольника — вот этого я не знаю; полагаю, что для прояснения этого вопроса стоит обратиться к нашим школьникам.

Говоря о целых числах, обычно рассматривают так называемые признаки делимости, то есть правила, с помощью которых можно быстро проверить, делится ли данное нам число на некоторое другое. Признаков делимости существует много, остановимся на некоторых из них.

Признак делимости на 10. Если число оканчивается на ноль, то оно делится на 10.

Пожалуй, это один из первых признаков, которые проходятся в курсе математики. Его стоит давать именно первым потому, что он, во-первых, очень прост в применении, во-вторых, нагляден (не нужно ничего дополнительно вычислять), а в-третьих, его дети могут вывести сами, что очень важно. Учителю достаточно лишь немного навести их на нужную мысль.

Замечание. На этом примере также важно напомнить, чем признак отличается от свойства и определения. По определению делимости:

Число a называют делящимся на 10, *если существует такое целое число b, что* $a = 10b$.

Свойство числа, делящегося на 10, можно записать так: *Если число делится на 10, то оно оканчивается на ноль.*

Обратите внимание на разницу между признаком и свойством: признак говорит, что если выполняется некоторый вспомогательный факт, то верен и главный (делимость на 10), свойство же — строго наоборот: если верен главный, то верен вспомогательный.

Приведем отвлеченный пример — пусть в классе учится блондин Вася Шикин, причем он единственный блондин в этом классе. Тогда признаком Васи Шикина будет следующее утверждение:

Если ученик этого класса — блондин, то он — Вася Шикин.

А свойством, соответственно, такое утверждение:

Если ученик этого класса — Вася Шикин, то он — блондин. Или, в сокращенном виде:

Вася Шикин — блондин.

Едем дальше. Признак делимости на 5 очень похож на признак делимости на 10, так что надолго останавливаться на нем не будем.

Признак делимости на 5. Если число оканчивается на ноль или пятерку, то оно делится на 5.

Теперь — степени двойки. Тут будет уже немного разнообразнее: мы увидим признаки, которые используют не только последнюю цифру. Но увидим мы их не сразу.

Признак делимости на 2. Если число оканчивается на четную цифру, то оно делится на 2.

Замечание. Автору этих строк довелось услышать блестящий ответ на вопрос, как сформулировать признак делимости на 2. «Если число четно, то оно делится на 2!» Кстати, как вы считаете, что это было: признак, свойство, определение или просто забавное утверждение?

Впрочем, вышеперечисленные признаки могут четко сформулировать очень немногие ученики — по той причине, что они (не ученики, конечно) уж слишком очевидны. Следующие два признака также сформулируют немногие — на этот раз потому, что просто не знакомы с ними.

Признак делимости на 4. Если число, составленное из двух последних цифр исходного числа (в том же порядке, что и в исходном числе), делится на 4, то и исходное число делится на 4.

Приведем пример использования данного признака, а заодно покажем идею доказательства этого несложного факта.

Пример 1. Делятся ли числа 863, 362, 99832476212, 8 на 4?

Решение. Число 863 не делится даже на 2 (оно нечетное), значит и на 4 делиться не может.

У числа 362 оставляем две последние цифры — получается 62. Это число не делится на 4, значит и исходное не делится. Две последние цифры числа 9983246212 (кстати, это не номер телефона моего друга, а взятое наугад десятизначное число) образуют число 12, чью делимость на 4 мы знаем еще по таблице умножения. Стало быть, это число делится на 4. Что же касается восьмерки, то здесь она приведена не для того, чтобы проверить делимость на 4 (все та же таблица умножения нам в помощь), а для иллюстрации признака: если цифра всего одна, то будем считать ее же тем самым числом, составленным из двух последних цифр. Так что признак работает и в этом случае.

Ответ: Нет, нет, да, да.

Откуда же берется этот признак? Все дело в разложении числа по степеням десятки! Имеется в виду, что если нам дано число, скажем, 12345678, то его можно представить как $1\cdot10^7+2\cdot10^6+3\cdot10^5+4\cdot10^4+5\cdot10^3+6\cdot10^2+7\cdot10+8$.

С другой стороны, все степени десятки, начиная со второй, делятся на 4. Следовательно, первые 6 слагаемых данной суммы будут делиться на 4, а тогда если мы их добавим к числу 78, делимость не поменяется (78 делится на 4, то и полученное после сложения число будет делиться на 4 по свойству делимости). Следовательно, осталось проверить, делится ли 78 на 4 — нет, не делится. Значит и исходное число также не делится на 4.

Нетрудно заметить, что если рассматривать степени десятки, начиная с третьей, то все они будут делиться не только на 4, но и на 8. А следовательно, можно сформулировать аналогичный признак делимости на 8:

Признак делимости на 8. Если число, составленное из трех последних цифр исходного числа (в том же порядке, что и в исходном числе), делится на 8, то и исходное число делится на 8.

Упражнение. Действуя в том же ключе, придумайте признаки делимости на 16, 32, 64 и вообще, любую степень двойки.

Перейдем к другим признакам. Признаки делимости на 3 и на 9 очень похожи друг на друга, поэтому приведем сразу оба.

Признак делимости на 3. Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3.

Признак делимости на 9. Если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на 9.

Замечание. Когда в первый раз видишь эти признаки, то очень хочется продолжить этот ряд для всех степеней тройки (по аналогии со степенями двойки). Увы, эта гипотеза не верна — уже для числа 27 существует множество контрпримеров: 1899, 1989, 9981 — у всех этих чисел сумма цифр равна 27, но на 27 они, увы, не делятся...

Эти признаки имеют очень широкое применение. Начать хотя бы с простейшего математического фокуса:

Задумайте любую цифру. Умножьте ее на 9. Посчитайте сумму цифр в полученном числе. Спорим, я угадаю, что у вас получилось?!

Есть и чуть более сложные ситуации, в которых признаки делимости на 3 и 9 бывают уместны.

Пример 2. Докажите, что для любого натурального n, число $10^n - 1$ делится на 9.

Решение. Рассмотрим число $10^n - 1$. Несложно заметить, что 10^n — это число, состоящее из одной единицы и n нулей после нее. Значит, если из этого числа вычесть 1, то получится число, состоящее из n девяток. Соответственно, сумма цифр данного числа равна $9n$, а значит, это число делится на 9 по признаку.

Пример 3. Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равно 2430. Чему может быть равно исходное число?

Комментарий. Прежде всего, возникает вопрос: а как выглядит число, записанное цифрами в обратном порядке, если исходное число равно, скажем, 220? Будет ли тогда второе число — 22? Или такой случай (когда исходное число оканчивается на ноль) невозможен? Полагаю, что авторы сборника [1], из которого взята задача, имели в виду именно это дополнительное условие. Так или иначе, мы будем решать задачу в предположении, что исходное число на ноль не оканчивается.

Решение. Зададимся вопросом: а сколько цифр в исходном числе? Нетрудно заметить, что с учетом нашего дополнительного предположения, число, записанное цифрами в обратном порядке, состоит из такого же количества цифр. Но какого? В условии этого не дано, но найти искомое количество цифр несложно. Действительно, исходное число не может состоять из одной цифры, так как в этом случае произведение бы не превосходило произведения двух максимальных однозначных чисел (то есть, 81). Не может число быть и трех- (и более) значным — в этом случае произведение было бы не меньше, чем произведение двух наименьших трехзначных чисел (равных 100, разумеется), то есть оно было бы не меньше 10000. Снова получили противоречие, следовательно, в искомом числе ровно две цифры.

Далее, заметим, что произведение наших двух чисел делится на 5 (ибо 2430 делится на 5 по признаку). Следовательно, хотя бы одно из них делится на 5, ведь 5 — простое число, а значит, этот сомножитель может появиться в произведении двух чисел только в том случае, если он присутствует в разложении хотя бы одного из этих чисел. А если число делится на 5, то оно оканчивается на 0 или на 5 (а это уже не признак, это свойство!) На ноль наши числа не оканчиваются (про исходное мы так предположили, а про второе — оставим доказательство для вас), следовательно, хотя бы одно из них оканчивается на 5. А раз так, то второе число, очевидно, на 5 начинается.

Дальше можно рассуждать по-разному. Можно, например, обозначить оставшуюся искомую цифру через x, после чего нетрудно заметить, что одно из чисел равно $(10x + 5)$, а другое — $(50 + x)$. Перемножая эти выражения и приравнивая полученное произведение числу 2430, имеем квадратное уравнение, решить которое не представляет труда. Можно, кстати, просто перебрать все возможные значения для второй цифры — но это 9 вариантов...

Эти решения слишком громоздкие. Но не зря же у нас есть признаки делимости, в конце концов! Ведь 2430 делится на 3 (Озарение? Озарение!) по признаку. Следовательно, по аналогии с рассуждением про пятерку, хотя бы одно из наших чисел должно делиться на 3. А тогда его сумма цифр должна делиться на 3. То есть, вторая цифра должна в сумме с пятеркой делиться на 3 — нам подходят только цифры 1, 4, 7. Перебор свелся к трем вариантам, которые нетрудно проверить.

Но и это решение можно упростить, убрав перебор вовсе. Заметим, что 2430 делится на 243, то есть на 3^5. Тогда нетрудно доказать, что одно из наших двух чисел делится на 27. Делается это от противного: пусть ни одно из них не делится на 27, тогда степень вхождения тройки в каждое из канонических разложений данных нам чисел не больше второй, а значит в произведении она не больше четвертой — противоречие, там пятая степень. Ну, а если число делится на 27, то оно делится и на 9, а значит, сумма его цифр также делится на 9. Так как одна из цифр — пятерка, то другой ничего не остается, кроме как быть четверкой... Итак, возможны два варианта ответа: 45 и 54.

Ответ: 45, 54.

Замечание. Кстати, если мы доказали, что одно из чисел делится на 27, то можно просто перебрать такие двузначные числа, не доказывая в начале ничего про пятерку, ведь таких чисел всего три: 27, 54 и 81. Разобрав эти три случая, приходим к правильной паре ответов.

В последнем разобранном примере мы использовали несколько признаков — и делимость на 5, и делимость на 3. Идея использования нескольких признаков очень часто встречается в задачах, где нужно проверить делимость на некоторое составное число. В этом случае это самое составное число раскладывается канонически, после чего отдельно доказываются делимости на каждое из простых чисел разложения.

Пример 4. Докажите, что при любом натуральном n, число $(n^3 - n)$ делится на 6.

Решение. Докажем, что это число делится на 2 и на 3. Из этого будет следовать и делимость на 6, так как из первой делимости следует, что в разложении числа присутствует число 2, а из второй, что там есть и число 3. Так как это разные числа, то исходное число будет делиться на произведение этих простых чисел, то есть на 6.

Прежде всего, преобразуем выражение.

$$(n^3 - n) = n \cdot (n^2 - n) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1).$$

Теперь докажем делимость на 2: заметим, что среди чисел $(n - 1)$ и n есть четное число (так как эти два числа идут подряд). Из этого следует, что и произведение будет четным, что и требовалось.

Что касается делимости на 3, то здесь все аналогично: среди трех последовательных чисел $(n - 1)$, n и $(n + 1)$ найдется одно, которое делится на 3, а тогда и все произведение будет делиться на 3. Следовательно, наше число делится и на 2, и на 3, а значит, оно делится на 6.

Следующий признак гораздо менее популярен, но тем не менее, он встречается в задачах, посему разберем и его.

Признак делимости на 11. Если сумма цифр числа, стоящих на четных местах дает тот же остаток при делении на 11, что и сумма цифр числа, стоящих на нечетных местах, то исходное число делится на 11.

Пример 5. Делятся ли числа 132, 407, 5565, 12331 на 11?

Решение. Применим признак делимости на 11. В числе 132 сумма цифр на четных местах равна 3 (это и есть одна цифра 3, стоящая на втором месте), на нечетных сумма тоже 3 (1+2). Суммы равны, а значит и остатки при делении на 11 дают одинаковые. Следовательно, по признаку данное число делится на 11.

В числе 407 сумма цифр на четных — 0, а на нечетных — 11 (4 + 7). Эти числа дают одинаковые остатки при делении на 11 (и там, и там остаток ноль), а значит, исходное число делится на 11.

В числе 5565 сумма цифр на четных местах — 10 (5 + 5), а на нечетных — 11 (5 + 6). Эти суммы дают разные остатки при делении на 11 (10 и 0 соответственно), а значит, исходное число не делится на 11.

В числе 12331 сумма цифр на четных местах равна 5 (1+3+1), на нечетных — тоже 5 (2+3). Значит и остатки эти суммы дают одинаковые, а значит исходное число делится на 11.

Ответ: да, да, нет, да.

Задачи, в которых используется признак делимости на 11, встречаются редко и выглядят весьма необычно. Приведем пример такой задачи.

Пример 6. Найдется ли десятизначное число, делящееся на 11, в записи которого использованы все цифры от 0 до 9?

Решение. Отметим, что если в числе 10 цифр и встречаются все цифры от 0 до 9, то каждая цифра встречается ровно по одному разу, так как цифр как раз 10. Значит, можно посчитать общую сумму цифр в числе — она равна 45 (как сумма чисел от 0 до 9).

Предположим, что искомое число нашлось. Тогда сумма цифр на четных местах в этом числе (обозначим ее через x) дает такой же остаток при делении на 11, что и сумма цифр на нечетных местах (ее обозначим через y). В этом случае нетрудно заметить, что если остатки при делении на 11 у введенных переменных одинаковые, то их разность будет делиться на 11. Кроме того, сумма всех цифр равна 45, а ведь она складывается из суммы цифр на четных местах и суммы цифр на нечетных местах. Таким образом, имеем своеобразную систему (не теряя общности, считаем, что $x > y$, в противном случае — обозначим переменные наоборот) : $\begin{cases} x - y \vdots 11, \\ x + y = 45. \end{cases}$

Несложно заметить, что раз разность искомых чисел делится на 11, то она может быть равна 0, 11, 22, 33... Решая эти системы, получаем, что первая (когда разность равна нулю) решений в целых числах не имеет, а вот вторая имеет решение (28; 17).

Теперь постараемся подобрать такое число, чтобы сумма цифр на четных местах была равна 28, а на нечетных — 17. Очевидно, четных и нечетных мест будет по пять, поэтому достаточно найти пять цифр, сумма которых будет равна 28 — их-то мы и поставим на четные места, а нечетные займут оставшиеся цифры. После недолгого подбора, получаем требуемое: $9 + 8 + 7 + 3 + 1 = 28$, $6 + 5 + 4 + 2 + 0 = 17$. Значит, одно из искомых чисел — 6958472301. Примеров можно придумать очень много (например, в приведенном числе можно в произвольном порядке «перетасовать» цифры, стоящие на местах одной четности), однако вопрос был «найдется ли», посему даже одного подходящего примера достаточно для получения ответа.

Ответ: Да, найдется.

Последний признак, который мы рассмотрим — это признак делимости на 7. Тут — без комментариев.

Признак делимости на 7. Для того, чтобы натуральное число делилось на 7 необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма чисел, образующих нечётные группы по три цифры (начиная с единиц) взятых со знаком «+» и чётных со знаком «−» делилась на семь.

Комментарий. Нет, все-таки совсем без комментариев не получается. Так и хочется задать вопрос: ну, и кому этот признак кажется проще, чем просто попробовать разделить исходное число на 7 в столбик?! По крайней мере, за 10 лет активного решения олимпиадных задач (в частности, огромного количества задач на целые числа), автор ни разу не встречал задачу, в которой бы понадобился этот признак. Посему, автор предпочел не запоминать его, а делить при случае в столбик. Чего и вам желает!

На закуску — последняя серия задач.

1. Наташа придумала четырехзначный пароль для своей электронной почты, состоящий из двоек и троек. Гоша случайно узнал, что задуманное четырехзначное число делится на 4 и на 3. Помогите Гоше узнать пароль Наташи!
2. Может ли число, составленное из цифр от 0 до 7 (каждая цифра используется ровно по разу) делиться на 9?
3. Может ли число, составленное из ста двоек, ста единиц и ста нулей быть точным квадратом натурального числа?
4. Докажите, что число $(n^5 - 5n^3 + 4n)$ делится на 120 при любом натуральном n.

Глава 5

НА ПОМОЩЬ!

Подсказки к задачам

Глава 1

1. Левая часть слишком громоздка. А как ее сделать покороче? Конечно, что-то вычесть. Что-то, заведомо делящееся на a...
2. Как и в первой задаче, напрашивается что-нибудь вычесть из левой части. Что? По-видимому, некоторое выражение, которое точно делится на $(a^2 - 2)$.
3. Залог успеха — вспомнить, когда дробь является целым числом. Аналогичный пример разбирался в первой главе, так что вспомнить будет нетрудно. А дальше — по стандартной схеме.
4. Неужели и тут придется вычитать? Автор что, не мог более разнообразных задач подобрать?!
5. Во-первых, запишите две делимости. Далее обратите внимание на похожесть двух строчек. После этого нужное действие придет в голову само! Кстати, для успешного завершения решения стоит вспомнить свойство делимости за номером 5.

Глава 2

1. Кажется, придется перебирать простые числа в качестве потенциальных делителей. Алгоритм из второй главы вам в помощь!
2. Без комментариев.
3. Данное в условии выражение до боли напоминает некую формулу. Не воспользоваться ли ей, а также определением простого числа?
4. Попробуем доказать, что число не простое. Для этого можно разложить данное нам выражение на множители. Например, это делается путем выделения полного квадрата (надо что-то добавить и вычесть!).

5. Задача отдаленно напоминает уже разобранную задачу про 2010!. Перечитайте ее решение, возможно, вопросы отпадут?
6. И снова формула сокращенного умножения и определение простого числа помогут нам! Главное — не испугаться слова «параметр»!

Глава 3

1. Совсем не получается? А «от противного» доказывать пробовали?
2. НОД вычислить несложно — алгоритм у вас есть. НОК считается по формуле. И да, НОК должен получиться достаточно большим.
3. См. пример 3 этой главы, идея похожая.
4. А много ли делителей числа 360 может отличаться на 66? Один из них должен быть никак не меньше 66, а таких делителей у 360 совсем немного...

Глава 4

1. Собственно, используйте соответствующие признаки!
2. Где делимость на 9, там сумма цифр. А какая сумма цифр будет у этого числа?
3. Тут уже поинтереснее. А на что точно делится и на что не делится данное число?
4. Похожий пример был разобран в этой главе. Перечитайте доказательство еще раз и сделайте «по образу и подобию».

СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

1. Математические значки (их вообще полезно знать — во-первых, без них трудно читать специализированную математическую литературу, во-вторых, их использование при письме существенно сокращает ваши записи и позволяет писать быстрее, и в-третьих, насколько это солиднее — пользоваться значками, которые используют самые-самые математики!)

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел (1, 2, 3, ...).

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел (..., –2, –1, 0, 1, 2, ...).

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел (числа вида $\frac{a}{b}$, где a — целое число, а b — натуральное).

$\mathbb{R}$ — множество вещественных (действительных) чисел.

$\vdots$ — делится (без остатка).

$\in$ — принадлежит.

$\exists$ — существует.

$\forall$ — любой, каждый, для любого, для всех.

$\cap$ — пересечение множеств.

$\cup$ — объединение множеств.

$\varnothing$ — пустое множество.

$n!$ — «Эн факториал» — число, равное произведению всех натуральных чисел от 1 до n.

На заметку

Если значок перечеркнут — значит, его нужно рассматривать с частицей «не», например: $\nexists$ — не существует, $\notin$ — не принадлежит и т. п.

2. Математический лексикон.

Каноническое разложение — разложение на простые сомножители.

Контрпример — пример, опровергающий некоторый факт.

Кратно a — делится на a.

ОТВЕТЫ

Глава 1

1. 1; 3.
2. 1.
3. 2.
4. 1; 3; 9.
5. (1; 1).

Глава 2

1. Да.
2. $2 \cdot 617$.
3. 2.
4. Да ($n = 1$).
5. а) 28; б) 25.
6. При $p = 2$ решений нет.
   При остальных p: $\left(\frac{p+1}{2}; \frac{p-1}{2}\right)$.

Глава 3

3. (13; 78), (26; 39), (39; 26), (78; 13).
4. (90; 24).

Глава 4

1. 2232.
2. Нет.
3. Нет.

Список источников

1. ФИПИ. Единый Государственный Экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. М., Интеллект-Центр, 2010.
2. ФИПИ. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач. М., Интеллект-Центр, 2010.
3. Д. В. Фомин. Санкт-Петербургские математические олимпиады. СПб., Политехника, 1994.
4. Д. В. Фомин. Ленинградские математические кружки. СПб., Политехника, 1994.

Содержание