ЕГЭ

Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

готовимся к ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ»

ЛЕГИОН ТМ

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

™

ЛЕГИОН

Ростов-на-Дону

2013

ББК 22.14
К 65

Рецензент:
Резникова Н.М. — учитель высшей категории

Коннова Е.Г., Дрёмов А.П.

К 65 **Математика. Подготовка к ЕГЭ. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств:** учебно-методическое пособие / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2013. — 32 с. — (Готовимся к ЕГЭ.)

ISBN 978-5-9966-0328-2

В учебном пособии представлен материал для подготовки к успешному решению **задания С3** единого государственного экзамена по математике. Рассмотрены некоторые нестандартные методы решений уравнений и неравенств, связанные со свойствами функций, которые применимы и к другим задачам ЕГЭ (типа **С1, С5, С6**).

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Книга является частью **учебно-методического комплекса «математика. Подготовка к ЕГЭ»**, включающего такие пособия как «Математика. Подготовка к ЕГЭ — 2013». Учебно-тренировочные тесты», «Математика. Повышенный уровень ЕГЭ — 2013 (С1, С3). Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы » и др.

ББК 22.14

ISBN 978-5-9966-0328-2

Оглавление

От авторов

Известно, что при решении практически любой математической задачи приходится производить преобразование числовых, алгебраических или функциональных выражений. Однако бывают случаи, когда стандартные преобразования не позволяют получить ответ. Кроме того, часто специальными, так называемыми **«нестандартными» методами** можно значительно уменьшить необходимый объём выкладок.

Понятие *«нестандартные» методы* довольно неоднозначно. Поясним, как мы понимаем это определение.

Например, если область допустимых значений уравнения или неравенства — конечное множество, то решение можно свести к проверке чисел, входящих в ОДЗ.

Если же левая часть уравнения не больше некоторого числа, а правая не меньше этого числа, то можно сделать вывод, что решение есть, только если обе части равны этому числу.

Ограничить, другими словами «оценить» значение выражения можно разными способами, например, опираясь на свойство функции или известное неравенство или исследовав функцию с помощью производной.

Сказанное выше относится прежде всего к задачам **на решение уравнений и неравенств**. Следует отметить, что «нестандартные» методы опираются на вполне стандартные, более того — общеизвестные свойства функций, такие как ограниченность, монотонность, периодичность и другие.

В каждом параграфе пособия приведены **примеры решения задач** определенным способом и **задачи для самостоятельного решения**. В конце книги предлагается список литературы для подготовки к экзамену.

Издание дополняет **учебно-методический комплекс пособий** под редакцией Ф.Ф. Лысенко и С.Ю. Кулабухова, посвященный подготовке к ЕГЭ по математике.

Желаем успеха!

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать по почте или на электронный адрес: `legionrus@legionrus.com`.

Обсудить пособия, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на официальном форуме издательства `http://legionr.rossite.org`.

Следите за бесплатными дополнениями и методическими рекомендациями на сайте издательства `http://legionr.ru` в связи с возможными изменениями спецификаций экзаменационных работ, разрабатываемых ФИПИ. (Доступ к материалам сайта свободный.)

Введение

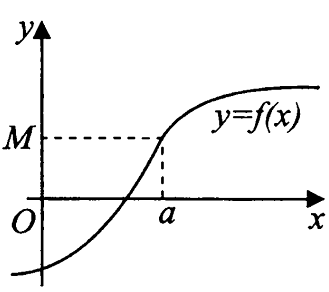
Уравнение или неравенство может содержать выражения нескольких видов: тригонометрические, степенные, логарифмические, многочлены и т.д. Такое уравнение или неравенство называют комбинированным. Иногда после замены неизвестной задача приобретает стандартный вид. Если же никакая замена не помогает, можно попробовать решить задачу, опираясь на специфические свойства функций: ограниченность, монотонность, чётность или нечётность, периодичность и т.п. Очень часто при решении комбинированных уравнений и неравенств используется метод оценки. Кроме того, можно использовать ограниченность области допустимых значений уравнения или неравенства.

Если эти методы не помогают, можно попытаться использовать монотонность функции. Исследовать функцию на ограниченность или монотонность можно с помощью производной или с помощью некоторых известных неравенств.

Сформулируем утверждения, позволяющие решать некоторые уравнения или неравенства.

1) Строго монотонная на всей области определения функция не может принимать одинаковых значений в разных точках.

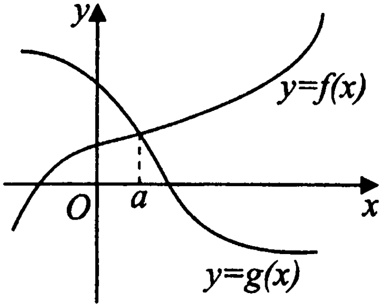
Если $f(a) = f(b)$ и $f(x)$ монотонна, то $a = b$.



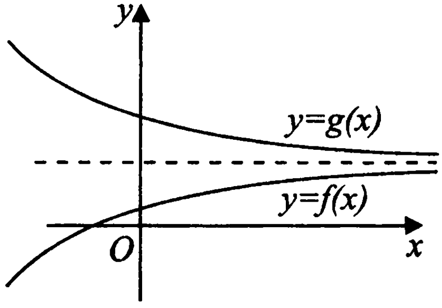
2) Строго монотонная функция принимает каждое свое значение ровно один раз.

Если $f(a) = M$ и функция $f(x)$ монотонна, то в уравнении $f(x) = M$ единственный корень $x = a$.

3) Графики возрастающей и убывающей функции могут иметь не более одной точки пересечения.



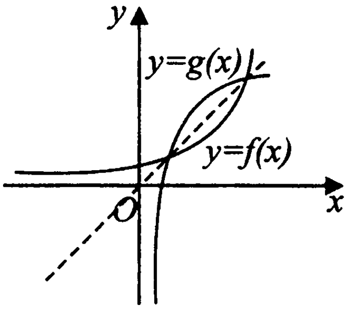
одна общая точка

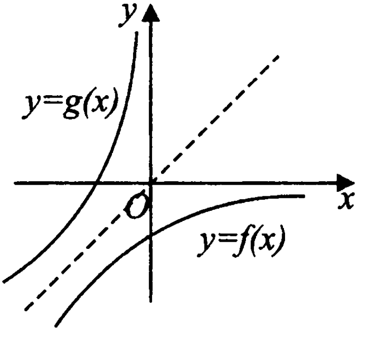


нет общих точек

Если функция $y = g(x)$ убывает, функция $y = f(x)$ возрастает, то уравнение $g(x) = f(x)$ может иметь не более одного корня (то есть, либо в уравнении нет корней, либо корень единственный).

4) Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$, поэтому такие графики могут пересекаться только в точках этой прямой.





Метод оценки

Метод оценки связан с ограниченностью разных частей уравнения или неравенства и основан на следующих утверждениях:

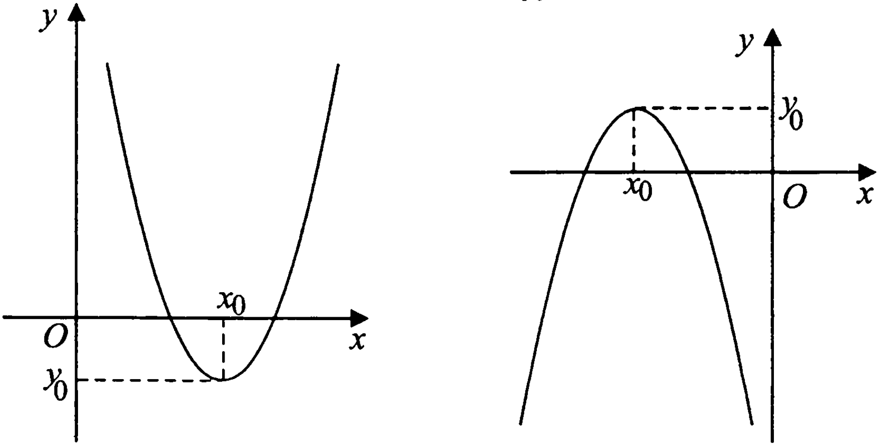
если все значения левой части — не больше, а правой — не меньше некоторого числа, то левая часть — не больше правой, при этом их равенство возможно только тогда, когда они одновременно равны этому числу;

если одно выражение не больше некоторого числа, а второе — не больше некоторого другого числа, то их сумма не больше суммы этих двух чисел.

Этот метод решения уравнений и неравенств основан на оценке значений выражений и (или) на нахождении множества значений функции на промежутке. Вспомним свойства некоторых функций.

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$.

Найдем множество значений этой функции



1) на области определения $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Если $a > 0$; $y \in [y_0;\ +\infty)$, где $y_0 = y(x_0)$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Если $a < 0$; $y \in (-\infty;\ y_0]$;

2) на промежутке $x \in (-\infty;\ x_1]$, $x_1 < x_0$.

Если $a > 0$, $y \in [y(x_1);\ +\infty)$.

Если $a < 0$, $y \in (-\infty;\ y(x_1)]$;

3) на промежутке $x \in (-\infty;\ x_2]$, $x_2 > x_0$.

Если $a > 0$, $y \in [y(x_0);\ +\infty)$.

Если $a < 0$, $y \in (-\infty;\ y(x_0)]$.

Остальные случаи можно разобрать аналогично, пользуясь графиком функции.

Линейная функция $y = kx + b$.

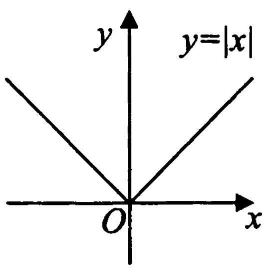
Если $k = 0$; $y = b$; $E(y) = \{b\}$.

Если $k \neq 0$; $E(y) = R$.

Если $x \in [x_1;\ x_2]$, то $y \in [y(x_1);\ y(x_2)]$.

При $k > 0$ функция возрастает, при $k < 0$ функция убывает.

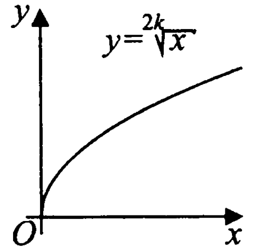
Функция $y = |x|$.



$x \in (-\infty;\ +\infty)$, $y \in [0;\ +\infty)$. Функция чётная.

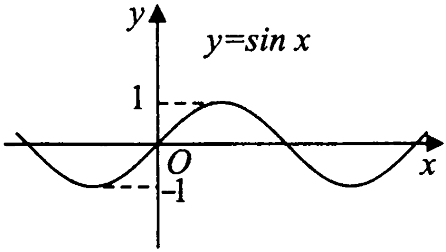
Функция $\sqrt[2k]{x}$, $k \in N$.

$x \in [0;\ +\infty)$; $y \in [0;\ +\infty)$. Функция возрастающая .



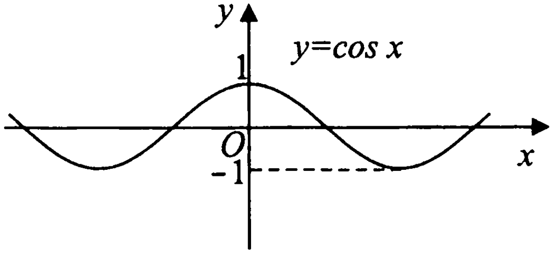
Функция $y = \sin x$.

$x \in (-\infty;\ +\infty)$, $y \in [-1;\ 1]$.
Функция периодическая, нечетная.



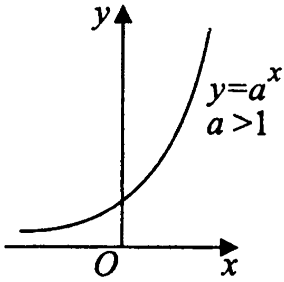
Функция $y = \cos x$.

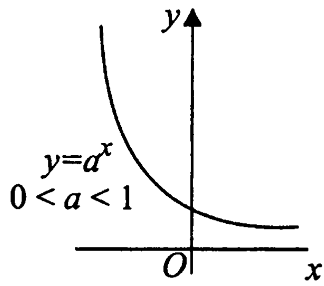
$x \in (-\infty;\ +\infty)$, $y \in [-1;\ 1]$.
Функция периодическая, четная.



Функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

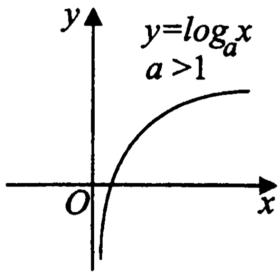
$x \in (-\infty;\ +\infty)$; $y \in (0;\ +\infty)$. Функция возрастает при $a > 1$, убывает при $0 < a < 1$.

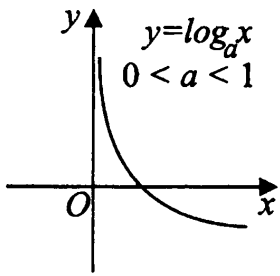




Функция $y = \log_a x$, $a > 0$; $a \neq 1$.

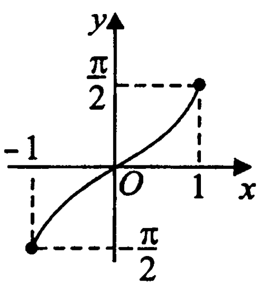
$x \in (0;\ +\infty)$; $y \in (-\infty;\ +\infty)$. Функция возрастает при $a > 1$, убывает при $0 < a < 1$.



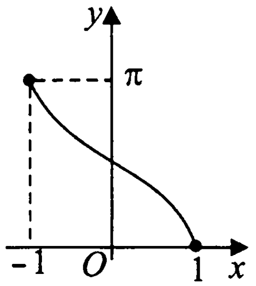


Функция $y = \arcsin x$, $a > 0$; $a \neq 1$.

$x \in [-1;\ 1]$; $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$. Функция возрастает, нечетная.



Функция $y = \arccos x$, $a > 0$; $a \neq 1$.



$x \in [-1;\ 1]$; $y \in [0;\ \pi]$. Функция убывает.

Рассмотрим некоторые примеры применения этого метода.

1. Решите неравенство

$\log_5^2(3x-3) + \sqrt{3x-4} + |8x-6x^2| \leqslant 0.$

Решение.

$\log_5^2(3x-3) \geqslant 0$; $\sqrt{3x-4} \geqslant 0$; $|8x-6x^2| \geqslant 0 \Longrightarrow$ левая часть неравенства неотрицательна. Исходное неравенство выполняется, если каждое слагаемое равно нулю.

$$\begin{cases} \log_5^2(3x-3) = 0, \\ \sqrt{3x-4} = 0, \\ |8x-6x^2| = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-3 = 1, \\ x = \dfrac{4}{3}, \\ x = 0; x = \dfrac{4}{3}; \end{cases} \quad x = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $x = \dfrac{4}{3}$.

2. Решите уравнение

$\log_3(x^2+9) = \sqrt{4-|x|}.$

Оценим левую часть уравнения.

Решение.

$x^2 \geqslant 0$; $x^2+9 \geqslant 9$; $\log_3(x^2+9) \geqslant \log_3 9$; $\log_3(x^2+9) \geqslant 2$.

Оценим правую часть уравнения.

$|x| \geqslant 0$; $-|x| \leqslant 0$; $4-|x| \leqslant 4$; $\sqrt{4-|x|} \leqslant 2$.

Левая часть уравнения не меньше двух, правая — не больше двух. Равенство возможно только при условии, что обе части равны 2. Решим систему:

$$\begin{cases} \log_3(x^2+9)=2, \\ \sqrt{4-|x|}=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ x=0; \end{cases} \quad x=0.$$

Ответ: 0.

3. Решите неравенство

$$\log_7(6-x^2-2x) \geqslant 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi x}{2}\right).$$

Решение.

$$\log_7(7-(x+1)^2) \leqslant \log_7 7 = 1.$$

Левая часть неравенства при $x=-1$ равна 1, при других допустимых значениях x меньше одного. Оценим правую часть неравенства.

$$-1 \leqslant \sin\frac{\pi x}{2} \leqslant 1; \quad -\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi x}{2} \leqslant \frac{\pi}{3};$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi x}{2}\right) \leqslant 1;$$

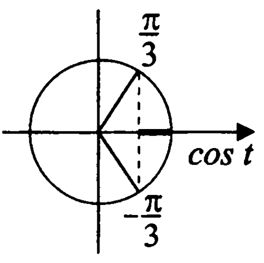


Рис. 1.

$$1 \leqslant 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi x}{2}\right) \leqslant 2.$$

Получим, что правая часть неравенства изменяется в пределах от 1 до 2. Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \log_7(7-(x+1)^2)=1, \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi x}{2}\right)=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1, \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi x}{2}\right)=1; \end{cases}$$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}\sin\frac{-\pi}{2}\right)=2\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)=1.$$

Значит, $x=-1$ является решением.

Ответ: -1.

4. Решите уравнение

$$|x^2-2x|+\sqrt{x^3-3x^2+2x}=\sin\left(\frac{17\pi}{2}+x-2\right)-1.$$

Решение.

Оценим левую часть уравнения.

$|x^2-2x|\geqslant 0$; $\sqrt{x^3-3x^2+2x}\geqslant 0$;

$|x^2-2x|+\sqrt{x^3-3x^2+2x|}\geqslant 0$,

причем равенство нулю возможно, только если

$|x^2-2x|=0$ и $\sqrt{x^3-3x^2+2x}=0$ одновременно.

Оценим правую часть уравнения.

$$-1\leqslant\sin\left(\frac{17\pi}{2}+x-2\right)\leqslant 1;$$

тогда $-2\leqslant\sin\left(\frac{17\pi}{2}+x-2\right)-1\leqslant 0$.

Видим, что левая часть уравнения неотрицательна, а правая — неположительна. Равенство возможно только в том случае, если они равны нулю. Таким образом, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} |x^2-2x|=0, \\ \sqrt{x^3-3x^2+2x}=0, \\ \sin\left(\frac{17\pi}{2}+x-2\right)-1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-2x=0, \\ x^3-3x^2+2x=0, \\ \sin\left(\frac{17\pi}{2}+x-2\right)=1. \end{cases}$$

Заметим, что нам нужно найти общие корни трёх уравнений системы. Для этого достаточно решить одно из них и подставить его корни в другие уравнения.

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$, $x_1=0$; $x_2=2$. Подставив числа 0 и 2 во второе уравнение системы, выясним, что они являются корнями второго уравнения системы.

Проверим, оба ли числа являются корнями третьего уравнения системы.

При $x=0$ $\sin\left(\frac{17\pi}{2}+0-2\right)\neq 1$, значит, $x=0$ не является корнем исходного уравнения.

При $x=2$ $\sin\left(\frac{17\pi}{2}+2-2\right)=\sin\frac{17\pi}{2}=\sin\frac{\pi}{2}=1$, значит, $x=2$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 2.

5. При каких значениях параметра a уравнение $2^{x^4-18x^2+84}=8-x^2-2xa(a-2)-a^4+4a^3-4a^2$ имеет хотя бы один корень?

Решение.

$2^{(x^4-18x^2+81)+3}=8-(x^2+2x(a^2-2a)+(a^4-4a^3+4a^2))$,

$2^{(x^2-9)^2+3}=8-(x^2+2x(a^2-2a)+(a^2-2a)^2)$,

$2^{(x^2-9)^2+3}=8-(x+a^2-2a)^2$,

$(x^2-9)^2\geqslant 0$, $(x^2-9)^2+3\geqslant 3$; $2^{(x^2-9)^2+3}\geqslant 8$.

$-(x+a^2-2a)^2\leqslant 0$; $8-(x+a^2-2a)^2\leqslant 8$.

Исходное уравнение равносильно системе

$\begin{cases} 2^{(x^2-9)^2+3}=8, \\ 8-(x+a^2-2a)^2=8; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-9=0, \\ x+a^2-2a=0; \end{cases}$

$\begin{cases} x_1=3;\ x_2=-3, \\ x+a^2-2a=0. \end{cases}$

Система имеет решения, если 3 или -3 является корнем второго уравнения.

$x=3$, $3+a^2-2a=0$, корней нет.

$x=-3$, $-3+a^2-2a=0$; $a_1=-1$; $a_2=3$. При таких a число -3 является корнем. При других a в исходном уравнении нет корней.

Ответ: $a=-1$; $a=3$.

6. Решите уравнение

$$\sqrt{7x^2+2\sqrt{7}x\sin(\pi y)\cos(\pi z)+1+}$$
$$+\sqrt{14x^2+4y^2+z^2+2\sqrt{7}x+12y-4z+13}=0.$$

Решение.

Сумма неотрицательных выражений равна нулю, если каждое из них равно нулю.

$$\begin{cases} 7x^2+2\sqrt{7}x\sin(\pi y)\cos(\pi z)+1=0, \\ 14x^2+4y^2+z^2+2\sqrt{7}x+12y-4z+13=0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} (\sqrt{7}x+\sin(\pi y)\cos(\pi z))^2+1-\sin^2(\pi y)\cos^2(\pi z)=0, \\ 14x^2+2\sqrt{7}x+(2y+3)^2+(z-2)^2=0. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы.

$$(\sqrt{7}x+\sin(\pi y)\cos(\pi z))^2\geqslant 0;$$
$$1-\sin^2(\pi y)\cos^2(\pi z)\geqslant 0\Longrightarrow$$
$$\begin{cases} \sqrt{7}x+\sin(\pi y)\cos(\pi z)=0, \\ 1-\sin^2(\pi y)\cos^2(\pi z)=0; \end{cases}$$

1) $\sin(\pi y)\cos(\pi z)=-1\Longrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

Подставим $x=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ во второе уравнение системы. Полученное уравнение $4+(2y+3)^2+(z-2)^2=0$ не имеет решений.

2) $\sin(\pi y)\cos(\pi z)=1\Longrightarrow x=-\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. Из второго уравнения системы получим $0+(2y+3)^2+(z-2)^2=0$, $\begin{cases} y=-\dfrac{3}{2}, \\ z=2; \end{cases}$

$\sin\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cos 2\pi=1$, поэтому $x=-\dfrac{1}{\sqrt{7}}$; $y=-\dfrac{3}{2}$; $z=2$ — решение исходного уравнения.

Ответ: $x=-\dfrac{1}{\sqrt{7}}$; $y=-\dfrac{3}{2}$; $z=2$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнение или неравенство.

1) $\log_5(x^2+\frac{1}{5}) = 2\cos\Big(2\pi - x) - 3$.

2) $(x-5\pi)^2 + 2 = \sqrt{3}\sin x - \cos x$.

3) $\arcsin(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-(x+1)^2} - \pi$.

4) $|x^2+2x-15| + \sin\frac{65\pi}{6}\log_2(16+|x^2-5x+6|) \leqslant$ $\leqslant 2 - (x^2-x-6)^2$.

5) Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $5\cos(2x-7a) = 5 + (2x^2 - 13\pi x + 6\pi^2)^2$ имеет хотя бы один корень.

Решите уравнение или неравенство.

6) $17\sin x = |4x^2 - 25\pi^2| + 17$.

7) $17\sin x < |4x^2 - 25\pi^2| + 17$.

8) $(\lg x + 1)^2 + 2 \geqslant \sqrt{4-40x}$.

9) $(\lg x + 1)^2 + 2 = \sqrt{4-40x}$.

10) $|x-4|\log_2^2(2x^2-7) + \sqrt{x^2-6x+8} = 0$.

11) Решите уравнение $\sqrt{3x^2 - 2\sqrt{3}x\cos\frac{\pi y}{2}\cos\frac{\pi z}{2} + 1} +$ $+\sqrt{3x^2+2y^2+z^2-\sqrt{3}x-24y+20z+172} = 0$.

Учёт ОДЗ

Иногда, прежде чем решать уравнение или неравенство, полезно найти область допустимых значений переменных или учесть некоторые условия, которые следуют из свойств функций.

1. Решите неравенство
$\sqrt{8x^2-3x-5} \geqslant \log_2(-x+1) - \sqrt{8x+5}$.

Решение.

Найдём ОДЗ.

$$\begin{cases} 8x^2-3x-5 \geqslant 0, \\ 1-x>0, \\ 8x+5 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leqslant -\frac{5}{8};\ x \geqslant 1, \\ x<1; \\ x \geqslant -\frac{5}{8}; \end{cases} \quad x=-\frac{5}{8}.$$

Получилось единственное допустимое значение переменной $x=-\frac{5}{8}$.

Проверим, является ли оно решением неравенства.

$\sqrt{0} \geqslant \log_2\left(1\frac{5}{8}\right) - \sqrt{0}$; так как $\log_2\left(1\frac{5}{8}\right) \leqslant 0$.

Неравенство неверно, $x=-\frac{5}{8}$ не является решением. Значит, неравенство не имеет решений.

Ответ: $\varnothing$.

2. Решите уравнение
$\sqrt{8-2x-x^2} = (x-2)^3$.

Решение.

ОДЗ: $8-2x-x^2 \geqslant 0$; $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

С другой стороны, $\sqrt{8-2x-x^2} \geqslant 0$ по определению квадратного корня, значит, $(x-2)^3 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant 2$.

Мы получили, что корень уравнения должен удовлетворять системе $\begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 2, \\ x \geqslant 2; \end{cases}$ отсюда $x = 2$ — единственное возможное значение x.

Проверим, является ли $x = 2$ корнем уравнения.

$\sqrt{8 - 2 \cdot 2 - 2^2} = (2-2)^3$, $0 = 0$, равенство выполняется, поэтому $x = 2$ — корень уравнения.

Ответ: $x = 2$.

3. Решите неравенство

$\sqrt{\log^2_{0,5}(x-3) - 4} \leqslant 6x - 2 + \sqrt{11x - x^2 - 28}.$

Решение.

Найдем ОДЗ.

$$\begin{cases} \log^2_{0,5}(x-3) - 4 \geqslant 0, \\ 11x - x^2 - 28 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы

$\log^2_{0,5}(x-3) \geqslant 4;$

$$\left[\begin{array}{l} \log_{0,5}(x-3) \geqslant 2, \\ \log_{0,5}(x-3) \leqslant -2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 3 > 0, \\ x - 3 \leqslant \frac{1}{4}; \end{cases} \\ \begin{cases} x - 3 > 0, \\ x - 3 \geqslant 4; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 3, \\ x \leqslant 3\frac{1}{4}; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3, \\ x \geqslant 7; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 3 < x \leqslant 3\frac{1}{4}, \\ x \geqslant 7. \end{array}\right.$$

Решим второе неравенство системы.

$-x^2 + 11x - 28 \geqslant 0;$ $x^2 - 11x + 28 \leqslant 0;$ $4 \leqslant x \leqslant 7.$

ОДЗ определяется системой $\begin{cases} 4 \leqslant x \leqslant 7, \\ \left[\begin{array}{l} 3 < x \leqslant 3\frac{1}{4}, \\ x \geqslant 7; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = 7.$

Проверим, является ли число 7 решением исходного неравенства.

$$\sqrt{\log^2_{0,5}(7-3)-4} \leqslant 6\cdot 7-2+\sqrt{11\cdot 7-7^2-28};\ \ 0\leqslant 40.$$

Получили верное числовое неравенство, поэтому $x = 7$ — решение.

Ответ: 7.

4. Решите неравенство

$\sqrt{6-x^2} \geqslant \log_6(x-1) - \log_6(\sqrt{6}-1)$.

Решение.

Найдём ОДЗ.

$$\begin{cases} 6-x^2 \geqslant 0, \\ x-1>0; \end{cases} \quad 1 < x \leqslant \sqrt{6}.$$

Преобразуем неравенство $\sqrt{6-x^2} \geqslant \log_6 \dfrac{x-1}{\sqrt{6}-1}$.

Заметим, что при $1 < x \leqslant \sqrt{6}$ выполняется

$\log_6 \dfrac{x-1}{\sqrt{6}-1} \leqslant 0$.

Если $\log_6 \dfrac{x-1}{\sqrt{6}-1} \leqslant 0$; то исходное неравенство верно при всех допустимых значениях переменной.

Решением неравенства будут $x \in (1;\ \sqrt{6}]$.

Ответ: $x \in (1;\ \sqrt{6}]$.

5. Решите неравенство

$$\arccos\left(\sqrt{x^2-9}+\frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{\pi}{3} + \sqrt{4x^2-37} + x.$$

Решение.

Найдём ОДЗ.

$$\begin{cases} 4x^2-37 \geqslant 0, \\ -1 \leqslant \sqrt{x^2-9}+\dfrac{1}{2} \leqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant \dfrac{\sqrt{37}}{2}, \\ x \leqslant -\dfrac{\sqrt{37}}{2}, \end{array}\right. \\ 0 \leqslant x^2 - 9 \leqslant \dfrac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant \dfrac{\sqrt{37}}{2}, \\ x \leqslant -\dfrac{\sqrt{37}}{2}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\sqrt{37}}{2} \leqslant x \leqslant -3, \\ 3 \leqslant x \leqslant \dfrac{\sqrt{37}}{2}. \end{array}\right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\sqrt{37}}{2}, \\ x = \dfrac{\sqrt{37}}{2}, \end{array}\right.$$

Проверим, являются ли полученные значения решениями исходного неравенства.

$x = -\dfrac{\sqrt{37}}{2}$, $\arccos 1 \geqslant \dfrac{\pi}{3} + \sqrt{0} - \dfrac{\sqrt{37}}{2}$,

$0 \geqslant \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{37}}{2}$, верно.

$x = \dfrac{\sqrt{37}}{2}$, $\arccos 1 \geqslant \dfrac{\pi}{3} + \sqrt{0} + \dfrac{\sqrt{37}}{2}$,

$0 \geqslant \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{37}}{2}$, неверно.

$x = -\dfrac{\sqrt{37}}{2}$ решение неравенства.

Ответ: $-\dfrac{\sqrt{37}}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнение или неравенство.

1) $\sqrt{\log_{0,5}(x^2 - 3x - 1)} = 6x^2 - 18x + 9.$

2) $\sqrt{6x^2 + 5x - 1} + 18x^2 = 1 - 3x.$

3) $\sqrt{8 - x^2} \geqslant \log_{0,5}(x - 4).$

4) $2^x - 8 = \sqrt{27 - 3^x}.$

5) $\sqrt{2 - \log_2(x^2 + 3x)} \geqslant$
$\geqslant 3 \cdot 5^x \cdot x^2 - 15x^2 + 5^{x+1} \cdot 2x - 50x + 15 \cdot 5^{x-1} - 15.$

6) $\arcsin(0{,}5x - 5) + 5 > \arccos(47 - 6x).$

7) $\arcsin\left(\sqrt{x^2 - 4} - \frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{5\pi}{6} - \sqrt{4x^2 - 25}.$

8) $\sqrt{\frac{x^2 - 9}{x^3 - 27} - \frac{1}{x + 2}} \leqslant \frac{3 - 0{,}5x - x^2}{(x - 1)^2}.$

Использование производной.

1. Решите неравенство
$3x^3 + 3^{3-x^2} \leqslant 18x^2 + 27 + \log_{-x} 1.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} -x > 0, \\ -x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$

При $\begin{cases} x < 0, \\ x \neq -1 \end{cases}$ $\log_{-x} 1 = 0.$

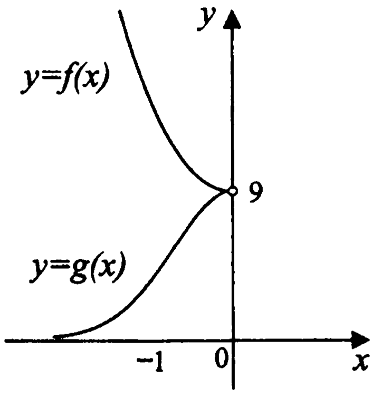


Рис. 2.

Преобразуем неравенство $x^3 + 3^{2-x^2} \leqslant 6x^2 + 9$;
$3^{2-x^2} \leqslant -x^3 + 6x^2 + 9.$

Пусть $g = 3^{2-x^2}$; $g(x) > 0$; $g(x) \leqslant 3^2$; $0 < g(x) < 9$, $g(0) = 9$.

Пусть $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 9$; $f'(x) = -3x^2 + 12x$; $f'(x) = 0$ при $-3x^2 + 12x = 0$; $-x(x-4) = 0$; $x = 0$; $x = 4$.

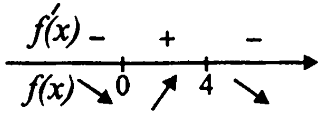


Рис. 3.

$f(0) = 9.$

Построим эскиз графиков при $x < 0$ (см. рис. 2). Видим, что общих точек при $x < 0$ нет, причем при допустимых значениях x $g(x) < f(x)$. Значит, $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1; 0)$.

Ответ: $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1; 0)$.

2. Решите неравенство $5x - \sin 5x + \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}} \leqslant 1$.

Решение.

ОДЗ: $x + 3 > 0;\ x > -3$.

Упростим неравенство на ОДЗ.

$5x - \sin 5x + 1 \leqslant 1;\ 5x - \sin 5x \leqslant 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = 5x - \sin 5x$.

$f'(x) = 5 - 5\cos 5x,\ f'(x) \geqslant 0$, так как $5\cos 5x \leqslant 5$.

$f(x)$ возрастает, $f(0) = 0$, значит, при $x > 0$ $f(x) > f(0)$, то есть $f(x) > 0$. При $x < 0$, $f(x) < 0$. То есть $f(x) \leqslant 0$ при $x \leqslant 0$. С учетом ОДЗ $x \in (-3;\ 0]$.

Ответ: $x \in (-3;\ 0]$.

3. При каких значениях параметра a ($a > 0,\ a \neq 1$) уравнение $\dfrac{x^2+2}{x^2+1} = 3\log_a(x^2 + a)$ имеет корни?

Решение.

Пусть $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+1}$; $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$; $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$; $f'(x) = 0$ при $x = 0$; $f(0) = 2$.

При любом x $f(x) > 1$, так как $\dfrac{1}{x^2+1} > 0$. График $y = f(x)$ представлен на рисунке 5.

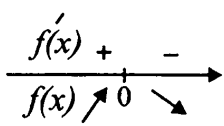


Рис. 4.

Пусть $g(x) = 3\log_a(x^2 + a)$.

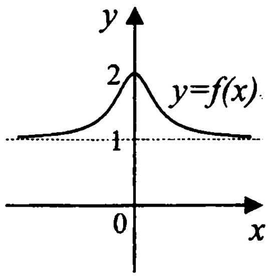


Рис. 5.

ОДЗ: $x \in R$. $g(x)$ — четная. Рассмотрим $x \geqslant 0$.

$$g'(x) = 3 \cdot \frac{2x}{(x^2 + a) \cdot \ln a}.$$

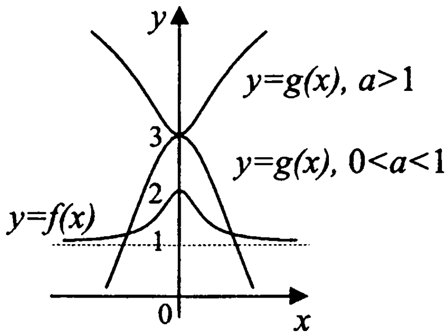


Рис. 6.

При $a > 1$, $\ln a > 0$, $g'(x) > 0 \Rightarrow\ y = g(x)$ на $x \in [0;\ +\infty)$ возрастает, тогда на $(-\infty;\ 0]$ функция убывает, наименьшее значение при $x = 0$ равно 3, то есть графики не имеют общих точек. При $0 < a < 1$, $\ln a < 0$, $g'(x) < 0 \Rightarrow y = g(x)$ убывает при $x \geqslant 0$ и возрастает при $x \leqslant 0$, причем $g(x) = 0$ при $x^2 + a = 1$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{1-a}$, причем $1 - a > 0$.

Значит, графики имеют общие точки при $0 < a < 1$.

Ответ: $0 < a < 1$.

4. Решите уравнение

$$5^{7-2x} - \log_4(2 - 7x) = 5^{2-7x} - \log_4(7 - 2x).$$

Решение.

$5^{7-2x} + \log_4(7-2x) = 5^{2-7x} + \log_4(2-7x)$.

Рассмотрим функцию $f(t) = 5^t + \log_4 t$. Она возрастает как сумма двух возрастающих функций. Тогда $f(t_1) = f(t_2)$ только если $t_1 = t_2$.

$f(7-2x) = f(2-7x)$,

$7 - 2x = 2 - 7x$,

$x = -1$.

Убедимся, что $x = -1$ входит в ОДЗ.

$2-7\cdot(-1) > 0$; $7-2\cdot(-1) > 0 \Rightarrow -1$ — корень уравнения.

Ответ: -1.

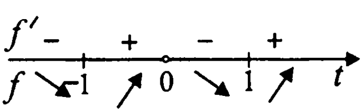
5. Решите уравнение.

$$\log_2\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{1}{y^2 - 6y + 10}.$$

Решение.

Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$.

$$f'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} = \frac{2(t^4-1)}{t^3} = \frac{2(t-1)(t+1)(t^2+1)}{t^3}.$$



Видим, что наименьшее значение $f(t)$ принимает при $t = 1$ и $t = -1$, при этом $f(-1) = f(1) = 2$. Тогда $\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x} \geqslant 2 \Rightarrow \log_2\left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) \geqslant 1$.

Оценим правую часть уравнения.

$$\frac{1}{y^2 - 6y + 10} = \frac{1}{(y-3)^2 + 1} \leqslant 1.$$

Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \log_2\left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = 1, \\ \dfrac{1}{(y-3)^2+1} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin^2 x = 1, \\ y = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} - \pi k, \ k \in Z, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} - \pi k,\ y = 3.$

Задачи для самостоятельного решения

1) При каких положительных значениях параметра a уравнение $5\log_a(x^2+8x+16+a) = \dfrac{2x^2-3}{x^2+3}$ имеет корни?

Решите неравенство или уравнение.

2) $2\sin x - 2x + \log_{x-2}\sqrt{x-2} \leqslant 0{,}5.$

3) $5^{2+(\sqrt{x})^2} + (x+4)^2 < 661.$

4) $8\sin\left(\dfrac{3\pi}{x} - \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right) + 6\cos\left(\dfrac{3\pi}{x} - \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\right) =$

$= x^3 - \dfrac{x^4}{4} - x^2 - 10.$

5) $\dfrac{3x^2+6x-1}{x+1} \leqslant 22\log_{\frac{1}{16}}(x+1) + 11.$

6) $\log_7(8-11x) - 6^{11-3x} = \log_7(11-3x) - 6^{8-11x}.$

7) $\log_4(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) = \dfrac{\cos\dfrac{73\pi}{3}}{y^2+10y+26}.$

8) $\log_5(1+|x|) + \log_{1+|x|} 5 = \dfrac{4}{(x+y)^2+2(x+y)+3}.$

Применение известных неравенств.

Вспомним некоторые неравенства, позволяющие упростить решение уравнений и неравенств.

Неравенства с модулем

$|a| + |b| \geqslant |a + b|$,

$|a| - |b| \leqslant |a - b|$.

Равенство $|a| + |b| = |a + b|$ выполняется только в том случае, если a и b одного знака, то есть $ab \geqslant 0$.

Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом.

Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, причем равенство выполняется только в том случае, если $a = b$.

Неравенство о сумме взаимно обратных чисел.

Если $a > 0$, $b > 0$, то $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$ и $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$.

Если $a < 0$, то $a + \dfrac{1}{a} \leqslant -2$.

$|a + \dfrac{1}{a}| \geqslant 2$. Равенство возможно, если $|a| = 1$.

1. Решите неравенство

$|3x^3 - 2x - 1| + |2x^2 - 3x^3 + x| \leqslant |2x^2 - x - 1|$.

Решение.

Заметим, что $(3x^3 - 2x - 1) + (2x^2 - 3x^3 + x) = 2x^2 - x - 1$. Воспользуемся неравенством для модулей.

$|3x^3 - 2x - 1| + |2x^2 - 3x^3 + x| \geqslant |2x^2 - x - 1|$.

Поэтому исходное неравенство выполняется только, если $|3x^3 - 2x - 1| + |2x^2 - 3x^3 + x| = |2x^2 - x - 1|$, что равносильно неравенству $(3x^3 - 2x - 1) \cdot (2x^2 - 3x^3 + x) \geqslant 0$;

$(x - 1)(3x^2 + 3x + 1)(-x)(x - 1)(3x + 1) \geqslant 0$,

$-x(x - 1)^2\left(x + \dfrac{1}{3}\right) \geqslant 0$,

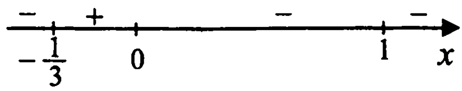


Рис. 7.

$x \in \left[-\frac{1}{3};\ 0\right] \cup \{1\}$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{3};\ 0\right] \cup \{1\}$.

2. Решите неравенство
$\sqrt{|3x-2|-|5x-3|-|1-2x|} < \log_{0,3}(1-(x-0{,}5)^2)$.
Решение.

Так как $|1-2x|+|5x-3| \geqslant |(1-2x)+(5x-3)|$, то $|1-2x|+|5x-3| \geqslant |3x-2|$ и, значит, $|3x-2|-|5x-3|-|1-2x| \leqslant 0$. Причем равенство $|1-2x|+|5x-3| = |3x-2|$ возможно, только если $(1-2x)(5x-3) \geqslant 0$, то есть $x \in [0{,}5;\ 0{,}6]$. Таким образом, при этих значениях x левая часть неравенства равна нулю.

Правая часть неравенства определена при $-1 < x-0{,}5 < 1$, при $x = 0{,}5$ равна 0, при остальных допустимых значениях x выражение $1-(x-0{,}5)^2 < 1$, поэтому $\log_{0,3}(1-(x-0{,}5)^2) > 0$.

Исходное неравенство выполняется, если
$$\begin{cases} 0{,}5 \leqslant x \leqslant 0{,}6, \\ -0{,}5 < x < 1{,}5, \\ x \neq 0{,}5. \end{cases}$$
$x \in (0{,}5;\ 0{,}6]$.
Ответ: $(0{,}5;\ 0{,}6]$.

3. Решите неравенство
$\log_{5x^2+26}(x^2-8x+26)+\log_{x^2-8x+26}(5x^2+26) \leqslant \log_2(4-x^2)$.
Решение.

Заметим, что
$$\log_{x^2-8x+26}(5x^2+26) = \frac{1}{\log_{5x^2+26}(x^2-8x+26)} =$$

$= \log_{(x-4)^2+10}(5x^2+26) > 0.$

Воспользуемся неравенством о сумме взаимно обратных чисел. $\log_{5x^2+26}(x^2-8x+26) + \dfrac{1}{\log_{5x^2+26}(x^2-8x+26)} \geqslant 2.$

Оценим правую часть исходного неравенства.

$4 - x^2 \leqslant 4$, значит $\log_2(4-x^2) \leqslant 2$.

Исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \log_{5x^2+26}(x^2-8x+26) + \dfrac{1}{\log_{5x^2+26}(x^2-8x+26)} = 2, \\ \log_2(4-x^2) = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2+26 = x^2-8x+26, \\ x = 0; \end{cases}$$

$x = 0.$

Ответ: 0.

Задачи для самостоятельного решения

1) $|5x^3-3x+2| + |6x-5x^3+x^2| \leqslant |3x+x^2+2|.$

2) $\sqrt{|4x-1|-|3x-5|-|x+4|} > \log_5(20-7x-3x^2).$

3) $\log_{x^2+3x+4}(2x^2+9x+12) + \log_{2x^2+9x+12}(x^2+3x+4) \leqslant$

$\leqslant \log_3(5-x^2-4x).$

4) $\log_3(x^2-10x+26) + \log_3(x^2+4x+6) \leqslant$

$\leqslant 2\sqrt{\log_3(x^2-10x+26)^{\log_3(x^2+4x+6)}}.$

Ответы

Метод оценки 1) 0. 2) $\varnothing$. 3) -1. 4) 3. 5) $a=\frac{\pi}{14}+\frac{2\pi k}{7}$; $a=\frac{23\pi}{14}+\frac{2\pi k}{7}$, $k\in Z$. 6) $\frac{5\pi}{2}$. 7) $\left(-\infty;\ \frac{5\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{2};\ +\infty\right)$. 8) $(0;\ 0{,}1]$. 9) $\varnothing$. 10) 2, 4. 11) $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $y=6$; $z=-10$.

ОДЗ 1) $\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$. 2) $\frac{1}{6}$. 3) $[-\sqrt{8};\ \sqrt{8}]$. 4) 3. 5) 1. 6) 8. 7) 2,5; $-2{,}5$. 8) 1,5.

Применение производной 1) $0<a<1$.

2) $x\in(2;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$. 3) $[0;2)$. 4) 2. 5) $(-1;\ 3]$. 6) $-\frac{3}{8}$.

7) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$. $y=-5$. 8) $(4;\ -5)$, $(-4;\ 3)$.

Применение известных неравенств.

1) $\{-1\}\cup[0;\ 1{,}2]$. 2) $\varnothing$. 3) -2. 4) $1\frac{3}{7}$.

Рекомендуемая литература

1. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013. Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова — Ростов-на-Дону: Легион, 2012.
2. Математика. Повышенный уровень ЕГЭ-2013 (С1, С3). Тематические тесты. Уравнения, неравенства, системы. Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова — Ростов-на-Дону: Легион, 2012.
3. Математика. Учимся решать задачи с параметром. Задание С5. Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова — Ростов-на-Дону: Легион, 2012.
4. ЕГЭ-2010. Математика. Задача С3. Уравнения и неравенства. Под редакцией А.Л. Семёнова и И.В.Ященко. — М.: МЦ НМО, 2010.
5. Шабунин М.И. математика для поступающих в вузы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 1999.
6. Шарыгин И.Ф. Решение задач. – М.: Просвещение, 1991.

Готовимся к ЕГЭ

Учебное издание

Коннова Елена Генриевна
Дрёмов Александр Петрович

МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ. НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *В. Кириченко*
Компьютерная верстка *О. Сапожников*
Корректор *Н. Пимонова*

Подписано в печать с оригинал-макета 14.01.2013.
Формат $60x84^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,86.
Тираж 5000 экз. Заказ № 7

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru   e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ЗАО "Полиграфобъединение", 347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6 В.