МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2014

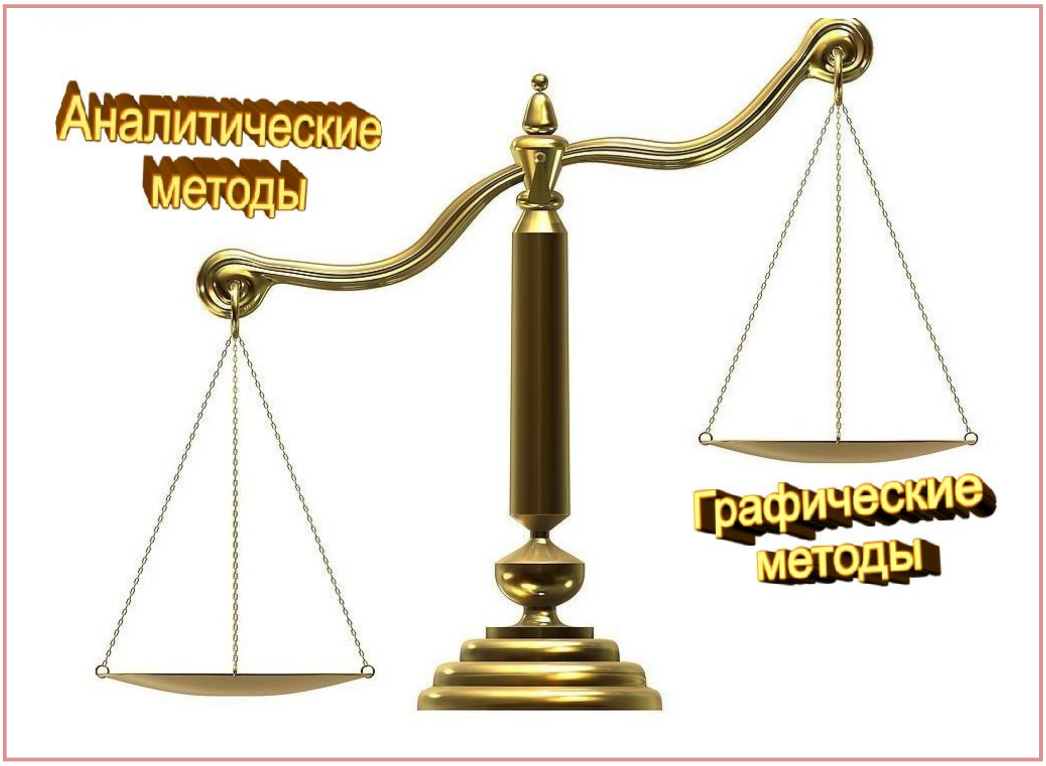
РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

(типовые задания С3)

Прокофьев А.А. ***Корянов А.Г.***

Прокофьев А.А. – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой высшей математики №1 НИУ МИЭТ, учитель математики ГОУ лицей №1557 г. Зеленограда; e-mail: aaprokof@yandex.ru

Корянов А.Г. – методист по математике Брянского городского информационно-методического Центра (БГИМЦ); e-mail: akoryanov@mail.ru



МОСКВА & БРЯНСК

2013

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Приведем образцы заданий С3 из экзаменационных работ ЕГЭ 2010 – 2013 гг.

ЕГЭ 2010. Решите неравенство:

$$\frac{\log_{7^{x+5}} 49}{\log_{7^{x+5}}(-49x)} \le \frac{1}{\log_7 \log_{\frac{1}{7}} 7^x}.$$

ЕГЭ 2010. Решите неравенство:

$$\log_5\left((7^{-x^2}-6)\cdot(7^{-x^2+9}-1)\right)+\log_5\frac{7^{-x^2}-6}{7^{-x^2+9}-1} > \log_5\left(7^{5-x^2}-5\right)^2.$$

***

ЕГЭ 2011. Решите неравенство:

$$\frac{2\log_3(x^2-4x)}{\log_3 x^2} \le 1.$$

ЕГЭ 2011. Решите неравенство:

$$9\log_7\left(x^2+x-2\right) \le 10+\log_7\frac{(x-1)^9}{x+2}.$$

***

ЕГЭ 2012. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2\cdot 3^{x+2}+27\cdot 3^{-x} \le 87, \\ \log_{3x}\frac{1}{27}\cdot\log_3 27x+9 \ge 0. \end{cases}$$

ЕГЭ 2012. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{160-4^x}{32-2^x} \ge 5, \\ \log_{0,25x^2}\left(\dfrac{6-x}{4}\right) \le 1. \end{cases}$$

***

ЕГЭ 2013. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{x-1}\left(x^2-12x+36\right) \le 0, \\ 4^{x-2}-35\cdot 2^{x-4}+6 \le 0. \end{cases}$$

ЕГЭ 2013. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2^{4x^2+|x|}\cdot 3^{-|x|} \le 1, \\ |2x-1| < 18x^2+5x. \end{cases}$$

ЕГЭ 2013. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{4-x}\dfrac{x+6}{(x-4)^6} \ge -6, \\ x^3+9x^2+\dfrac{40x^2+2x-10}{x-5} \le 2. \end{cases}$$

Надо отдать должное составителям заданий, поскольку при решении логарифмических неравенств в заданиях С3 в диагностических, тренировочных, репетиционных работах и в итоговых вариантах ЕГЭ в основном было достаточно использования стандартных методов. К таковым методам можно отнести:

- метод равносильных переходов;
- решение неравенства на промежутках;
- метод замены;
- обобщенный метод интервалов.

Кроме того, в ряде репетиционных работ для решения неравенств использовались нестандартные методы:

- метод рационализации;
- метод оценки, в частности, использование классических неравенств.

Разработчиками КИМов 2012-2013 года были предложены задания С3, в которых необходимо было решить систему неравенств (либо систему показательных и логарифмических неравенств, либо систему, содержащую рациональное неравенство и показательное или логарифмическое неравенство).

При проверке задачи С3 в ЕГЭ 2012-2013 гг. выставление баллов производилось в соответствии со следующими критериями.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен верный ответ в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном из неравенств исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Отметим, что в 2010 году процент приступивших к выполнению задания С3 составил 32,4%, в 2011 году – 43,4%, в 2012 году – 37,8%. При этом в 2010 году от 1 до 3 баллов за задачу С3 смогли получить только 11,8% участников экзамена, в 2011 – 19,5% , а в 2012 году – 11,5%. Верно решили задачу С3 лишь 1,5% участников экзамена в 2010 году, 3,7% – в 2011 и 2,4% – в 2012 году.

В данном пособии рассмотрены различные методы решения неравенств с одной переменной и их систем.

В конце приведен большой набор упражнений, к которым приведены ответы и указания.

Желаем успеха!

Авторы.

Основные понятия

Прежде чем перейти к рассмотрению неравенств, остановимся на некоторых важных вопросах, имеющих непосредственное отношение к решению этих неравенств.

Область определения выражения

Основные ограничения на переменную, входящую в выражение, связаны с действием деления (деление на нуль не определено), действием извлечения корня четной степени (корень четной степени определен для неотрицательных чисел), действием нахождения логарифма (логарифм с положительным основанием, отличным от единицы, определен для положительных чисел).

Из определения корня натуральной степени следует, что выражения вида $\sqrt[6]{-4}$, $\sqrt[-2]{5}$, $\sqrt[0]{8}$ не определены.

Из определения логарифма следует, что выражения вида $\log_3(-4)$, $\log_7 0$, $\log_{-6} 5$, $\log_0 9$, $\log_1 15$ не определены.

Отметим, что решение неравенств с переменной включает в себя нахождение области определения данного неравенства или по-другому – области допустимых значений неизвестной неравенства.

Следствие и равносильность

Если множество решений неравенства A принадлежит множеству решений неравенства (системы, совокупности) B, то неравенство (система, совокупность) B называется *следствием* неравенства A, и это обозначают $A \Rightarrow B$.

Если множества решений неравенства A и неравенства (системы, совокупности) B совпадают, то эти неравенства (неравенство и система, неравенство и совокупность) называются *равносильными*, и это обозначают $A \Leftrightarrow B$.

Как правило, преобразования используют для того, чтобы в неравенстве освободиться от знаменателей, от знаков корней, от знаков модуля, от степеней, от знаков логарифма, и привести данное неравенство к более простым неравенствам. При этом выполняют преобразования над обеими частями неравенства, используя свойство монотонности соответствующей функции, или преобразования отдельных выражений, входящих в неравенство, применяя формулы. Применение формулы для замены одного выражения другим может оказаться неравносильным для неравенства.

Приведем примеры равносильных переходов.

1) $\log_3 x > 1 \Leftrightarrow \log_3 x > \log_3 3 \Leftrightarrow \ x > 3.$

2) $$(x-1)\log_3 x \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \ge 0, \\ \log_3 x \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \le 0, \\ \log_3 x \le 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

3) $$\lg(x-2)+\lg(27-x) \le 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0, \\ 27-x>0, \\ \lg\big((x-2)(27-x)\big) \le 2. \end{cases}$$

4) $$\sqrt{x+2} \le x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x+2 \ge 0, \\ x+2 \le x^2. \end{cases}$$

5) $$\frac{x^2-7}{x-4} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x^2-7) \le 0, \\ x \ne 4. \end{cases}$$

Системы неравенств и совокупности неравенств

Решение неравенства с использованием равносильных преобразований часто приводит к решению системы или совокупности неравенств.

При решении системы неравенств с одной переменной обычно решают каждое неравенство, затем находят пересечение полученных множеств решений.

При решении совокупности неравенств с одной переменной обычно решают каждое неравенство, затем находят объединение полученных множеств решений.

Две системы (совокупности) неравенств называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Приведем примеры решения системы неравенств и совокупности неравенств.

1) $\begin{cases} 6x+2 \le 4x+24, \\ 2x-1 \ge x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \le 22, \\ x \ge 8 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 11, \\ x \ge 8 \end{cases} \Leftrightarrow 8 \le x \le 11.$

2) $\left[\begin{array}{l} x^2-4>0, \\ x-6<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)(x+2)>0, \\ x<6 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>2, \end{array}\right. \\ x<6 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; +\infty).$

Методы решения неравенств

В зависимости от трактовки или интерпретации неравенства различают алгебраический, функциональный или геометрический подходы в решении неравенств.

Первые два подхода различаются в понятии неравенства, которое рассматривается либо как сравнение двух выражений, либо как сравнение двух функций.

При алгебраическом подходе выполняют равносильные общие (над обеими частями неравенства) или частичные преобразования неравенств (отдельных выражений, входящих в неравенство).

При функциональном подходе используют свойства функций (монотонность, ограниченность и т.д.), входящих в данное неравенство.

В некоторых случаях алгебраический и функциональный подходы взаимно заменяемы. Это можно проследить, начиная с определения неравенства. Поэтому далее в преобразованиях неравенства мы используем утверждения, придерживаясь алгебраической или функциональной линии. Например, утверждение «Если обе части неравенства $g(x)>h(x)$ возвести в одну и ту же нечетную степень, то получим неравенство $g^{2n+1}(x)>h^{2n+1}(x)$, равносильное данному» можно заменить другим утверждением «По свойству строго возрастающей функции $y=t^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, на $\mathbb{R}$ неравенства $g(x)>h(x)$ и $g^{2n+1}(x)>h^{2n+1}(x)$ равносильны».

Основой геометрического подхода является интерпретация неравенств и их решений на координатной прямой, координатной плоскости или в пространстве, что позволяет перейти к равносильным неравенствам, опираясь на геометрические утверждения.

Сравнение чисел

Иногда при решении неравенств одним из трудоемких этапов является сравнение значений чисел для правильного расположения их относительно друг друга на числовой прямой. Это возникает в случае объединения или пересечения промежутков, числовые значения концов которых выражаются через радикалы, логарифмы и т.д. Приходится сталкиваться с необходимостью сравнения чисел без помощи микрокалькулятора. Рассмотрим некоторые подходы к решению задач такого типа.

1. Сравнение числовых выражений

При решении различных неравенств и их систем на этапе получения ответа, в частности нанесения их решений на одну числовую прямую, приходится сравнивать числовые значения, соответствующие концам промежутков, из которых состоят соответствующие множества решений. Довольно часто подобное сравнение является не очевидным и представляет ключевой этап решения задачи. На помощь приходит использование свойств числовых неравенств (к обеим частям можно прибавлять одно и то же число; можно умножать обе части неравенства на положительное число и т.д.), а также некоторые специальные приемы.

Здесь не требуется находить значения чисел с точностью до определенного десятичного знака после запятой. Но с другой стороны, для старшеклассника считается известным десятичные знаки после запятой некоторых чисел ($\sqrt{2}=1{,}41...$; $\sqrt{3}=1{,}73...$; $e=2{,}71...$; $\pi=3{,}14...$), которые он вправе использовать при сравнении чисел, точно так же, как знание степеней некоторых чисел ($11^2=121$; $6^3=216$; $2^{10}=1024$ и т.д.).

1.1. Методы сравнения числовых выражений

При сравнении числовых выражений A и B используют следующие общие методы.

Метод сравнения с нулем разности выражений

В этом случае сравнивают разность выражений с нулем.

Если $A-B>0$, то $A>B$;
если $A-B=0$, то $A=B$;
если $A-B<0$, то $A<B$.

Пример 1. *Сравнить числа* $\frac{1}{\sqrt{6}}-1$ *и* $-\frac{4}{5}$.

Решение. Найдем разность

$$\frac{1}{\sqrt{6}}-1-\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{5}=\frac{5-\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}.$$

Так как $5-\sqrt{6}=\sqrt{25}-\sqrt{6}>0$ и $5\sqrt{6}>0$, то $\frac{5-\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}>0$ и $\frac{1}{\sqrt{6}}-1>-\frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}-1>-\frac{4}{5}$.

Метод сравнения с единицей отношения выражений

Если выражения A и B положительны, то для определения большего из них можно сравнить их отношение с единицей.

Если $\frac{A}{B}>1$, то $A>B$;

если $\frac{A}{B}=1$, то $A=B$;

если $\frac{A}{B}<1$, то $A<B$.

Пример 2. *Сравнить числа*

$$\frac{2^{2012}+1}{2^{2013}+1} \text{ и } \frac{2^{2013}+1}{2^{2014}+1}.$$

Решение. Пусть A – первое выражение, а B – второе. Поскольку они оба положительны, то рассмотрим их частное

$$\frac{A}{B}=\frac{2^{2012}+1}{2^{2013}+1}:\frac{2^{2013}+1}{2^{2014}+1}=\frac{2^{4026}+5\cdot 2^{2012}+1}{2^{4026}+4\cdot 2^{2012}+1}.$$

Так как числитель получившейся дроби больше знаменателя, то $\frac{A}{B}>1$. Отсюда следует, что $A>B$.

Ответ: $\frac{2^{2012}+1}{2^{2013}+1}>\frac{2^{2013}+1}{2^{2014}+1}$.

Метод разделения выражений

Если удается показать, что одно из сравниваемых выражений A больше некоторого числа (или выражения) C, а второе B наоборот меньше него, то первое выражение будет больше второго, т.е. из неравенств $A>C>B$ следует неравенство $A>B$.

Пример 3. *Сравнить числа* $\log_2 5$ *и* $\log_3 6$.

Решение. Заметим, что $\log_2 5>\log_2 4=2$, а $\log_3 6<\log_3 9=2$. Следовательно, имеем

$$\log_2 5>2>\log_3 6 \Leftrightarrow \log_2 5>\log_3 6.$$

Ответ: $\log_2 5>\log_3 6$.

Метод использования параметра

Пример 4. *Сравнить числа* $\sqrt[3]{60}$ *и* $2+\sqrt[3]{7}$.

Решение. Представим первое число следующим образом $\sqrt[3]{60}=\sqrt[3]{4(8+7)}$. Пусть $a=2$ и $b=\sqrt[3]{7}$. Сравним выражения:

$$\sqrt[3]{4(a^3+b^3)} \vee a+b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(a^3+b^3) \vee (a+b)^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(a^3+b^3) \vee 3ab(a+b) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2-ab+b^2 \vee ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \vee 0.$$

Так как $a\neq b$, то $(a-b)^2>0$ и тогда $\sqrt[3]{60}>2+\sqrt[3]{7}$.

Ответ: $\sqrt[3]{60}>2+\sqrt[3]{7}$.

Метод использования свойств функций

В этом случае для сравнения выражений используют монотонность или выпуклость функций на промежутках.

Пример 5. *Сравнить числа* e^{π} *и* π^{e}.

Решение. Заметим, что

$$e^{\pi} \vee \pi^{e} \Leftrightarrow \ln e^{\pi} \vee \ln \pi^{e} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \pi \ln e \vee e \ln \pi \Leftrightarrow \frac{\ln e}{e} \vee \frac{\ln \pi}{\pi}.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ и сравним числа $f(e)$ и $f(\pi)$. Функция $f(x)$ определена при $x>0$. Ее производная равна $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. Так как $f'(x)=0$ при $x=e$, $f'(x)>0$ при $0<x<e$ и $f'(x)<0$ при $x>e$, то функция при $x=e$ принимает наибольшее значение на всей области определения. Значит, $f(e)>f(\pi)$, откуда следует, что $e^{\pi}>\pi^{e}$.

Ответ: $e^{\pi}>\pi^{e}$.

Графический метод

Графический метод удобно использовать при сравнении двух выражений, которые частично одинаковы (равные показатели степеней, равные основания степеней, равные показатели корней, равные подкоренные числа, равные основания логарифмов, равные подлогарифмические числа и т.д.).

Пример 6. *Сравнить числа* $\log_3 6$ *и* $\log_4 6$.

Решение. Построим схематично графики функций $y=\log_3 x$ и $y=\log_4 x$ (см. рис. 1).

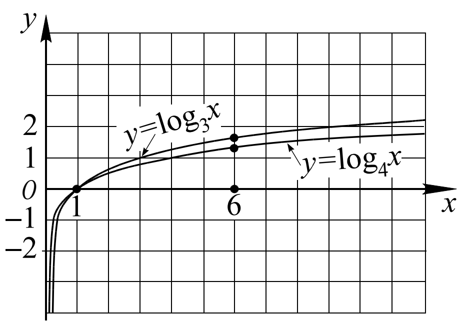


Рис. 1

Сравнивая значения функций при $x=6$, получаем $\log_3 6>\log_4 6$.

Ответ: $\log_3 6>\log_4 6$.

Метод использования классических неравенств

Обычно достаточно знания следующих классических неравенств:

неравенство Коши:
при любом $n\in\mathbb{N}$ для неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n};$$

неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных чисел a_1 *и* a_2 (случай $n=2$ в неравенстве Коши):

$$\frac{a_1+a_2}{2} \ge \sqrt{a_1 a_2};$$

неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел:

$$\left|a+\frac{1}{a}\right| \ge 2;$$

неравенство Бернулли:
для любого $n\in\mathbb{N}$ при $x\ge -1$

$$(1+x)^n \ge 1+nx.$$

Пример 7. *Сравнить числа*:

а) $\dfrac{1}{\log_2 5}+\dfrac{1}{\log_5 2}$ *и* 2; **б)** $\sqrt[200]{2}$ *и* 1,005.

Решение. **а)** Заметим, что $\log_5 2>0$ и

$$\frac{1}{\log_2 5}+\frac{1}{\log_5 2}=\log_5 2+\frac{1}{\log_5 2}.$$

Выражение в правой части равенства представляет собой сумму двух взаимно обратных положительных чисел, отличных от единицы. Значит,

$$\log_5 2+\frac{1}{\log_5 2}>2.$$

б) Возводя оба числа в двухсотую степень, получим:

$$\sqrt[200]{2} \vee 1{,}005 \Leftrightarrow 2 \vee (1{,}005)^{200}.$$

Используя неравенство Бернулли, имеем:

$(1{,}005)^{200}=(1+0{,}005)^{200}>1+200\cdot 0{,}005=2$.

Значит второе число больше первого.

Ответ: а) $\dfrac{1}{\log_2 5}+\dfrac{1}{\log_5 2}>2$;

б) $1{,}005>\sqrt[200]{2}$.

1.2. Сравнение действительных чисел

При сравнении действительных чисел используют следующие правила.

● Всякое положительное число больше нуля и больше отрицательного числа.

● Всякое отрицательное число меньше нуля.

● Из двух положительных действительных чисел больше то, у которого целая часть больше. Если целые части равны, большим считается то число, у которого первый из неравных десятичных знаков в их записи в виде десятичной дроби больший, а все предшествующие одинаковы.

● Из двух отрицательных чисел больше то, у которого абсолютная величина меньше.

Пример 8. *Сравнить числа*

$$\pi,\ \sqrt{10}\ \text{и}\ 3{,}14(15).$$

Решение. Так как $\pi=3{,}14159\ldots$, $\sqrt{10}=3{,}16227\ldots$ и $3{,}14(15)=3{,}141515\ldots$, то видим, что совпадают целые части и цифры десятых, а цифра сотых у числа $\sqrt{10}$ больше, чем у числа π и $3{,}14(15)$. Следовательно, $\sqrt{10}>\pi$ и $\sqrt{10}>3{,}14(15)$. Соответственно, у чисел π и $3{,}14(15)$ совпадают первые четыре цифры после запятой, а пятая больше у числа π. Следовательно, $\pi>3{,}14(15)$.

Замечание. Данный пример приведен для раскрытия правила сравнения действительных чисел, записанных в виде бесконечных десятичных дробей до определенного знака.

Ответ: $\sqrt{10}>\pi>3{,}14(15)$.

1.3. Сравнение выражений, содержащих дроби

При сравнении двух обыкновенных дробей используют следующие правила.

● Из двух дробей с одинаковыми знаменателями та дробь больше, у которой больший числитель.

● Из двух дробей с одинаковыми числителями та дробь больше, у которой знаменатель меньше.

При сравнении двух обыкновенных дробей с разными числителями и знаменателями их можно привести к общему знаменателю (или умножить обе части сравнения на общий знаменатель).

Пример 9. *Сравнить числа* $\dfrac{15}{17}$ *и* $\dfrac{23}{26}$.

Решение. Приводя дроби к общему знаменателю и используя первое правило, получаем

$$\frac{15}{17}\vee\frac{23}{26}\Leftrightarrow\frac{15\cdot 26}{17\cdot 26}\vee\frac{23\cdot 17}{26\cdot 17}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 15\cdot 26\vee 23\cdot 17\Leftrightarrow 390\vee 391.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{15}{17}<\dfrac{23}{26}$.

Ответ: $\dfrac{15}{17}<\dfrac{23}{26}$.

Для сравнения дробей часто используют метод сравнения с нулем разности выражений или метод сравнения с единицей отношения выражений.

Пример 10. *Сравнить числа* $\dfrac{131}{273}$ *и* $\dfrac{179}{235}$.

Решение. Рассмотрим частное данных чисел

$$\frac{131}{273}:\frac{179}{235}=\frac{131\cdot 235}{273\cdot 179}=\frac{131}{179}\cdot\frac{235}{273}<1,$$

так как каждая из дробей меньше 1. Значит, $\dfrac{131}{273}<\dfrac{179}{235}$.

Второй способ состоит в применении неравенств

$$\frac{131}{273}<\frac{131}{262}=\frac{1}{2}=\frac{179}{358}<\frac{179}{235}.$$

Ответ: $\dfrac{131}{273}<\dfrac{179}{235}$.

1.4. Сравнение выражений, содержащих степени

При сравнении двух степеней с одинаковыми показателями или одинаковыми основаниями, используют следующие правила.

● Если натуральное число n нечетно и $a > b$, то $a^n > b^n$.

● Если натуральное число n четно и $a > b$, то:

а) для положительных a и b имеем $a^n > b^n$;

б) для отрицательных a и b имеем $a^n < b^n$.

● Если $a > 1$ и $m > n$, то $a^m > a^n$.

● Если $0 < a < 1$ и $m > n$, то $a^m < a^n$.

При сравнении двух степеней с разными показателями и основаниями обычно в них выделяют одинаковое основание или одинаковый показатель.

Пример 11. *Сравнить числа:*

а) 5^{60} *и* 8^{20}; **б)** 2^{30} *и* 4^{14}; **в)** $2{,}5^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ и $0{,}4^{-0{,}5}$; **г)** 7^{30} и 4^{40}; **д)** 3^{21} и 2^{31}.

Решение. **а)** Так как $8^{20} = 2^{60}$ и $5 > 2$, то $5^{60} > 2^{60}$ и $5^{60} > 8^{20}$.

б) Так как $4^{14} = 2^{28}$ и $30 > 28$, то $2^{30} > 2^{28}$ и $2^{30} > 4^{14}$.

в) Заметим, что $2{,}5^{\frac{\sqrt{5}}{6}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$, а

$0{,}4^{-0{,}5} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-0{,}5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{0{,}5}$.

Теперь сравним показатели степени $\frac{\sqrt{5}}{6}$ и 0,5. Так как $\sqrt{5} < 3$, то $\frac{\sqrt{5}}{6} < \frac{3}{6} = 0{,}5$. Следовательно,

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{6}} < \left(\frac{5}{2}\right)^{0{,}5}, \text{ т.е. } 2{,}5^{\frac{\sqrt{5}}{6}} < 0{,}4^{-0{,}5}.$$

г) 1-*й способ.* Заметим, что $7^{30} = (7^3)^{10} = 343^{10}$ и $4^{40} = (4^4)^{10} = 256^{10}$. Так как $343 > 256$, то из свойств степеней следует $343^{10} > 256^{10}$ или $7^{30} > 4^{40}$.

2-*й способ.* Представим степень 7^{30} как степень с основанием 4. В силу основного логарифмического тождества $7 = 4^{\log_4 7}$. Поэтому $7^{30} = 4^{30\cdot\log_4 7}$. Теперь сравним число $30\cdot\log_4 7$ с числом 40. Учитывая свойство возрастающей функции $y = \log_4 t$, имеем

$$30\cdot\log_4 7 = 10\cdot\log_4 7^3 = 10\cdot\log_4 343 > \\ > 10\cdot\log_4 256 = 40.$$

Следовательно, в силу того, что функция $y = 4^t$ возрастающая (или в силу свойства степеней), получим $7^{30} > 4^{40}$.

д) Имеем

$3^{21} = 3^{20}\cdot 3 = 9^{10}\cdot 3$ и $2^{31} = 2^{30}\cdot 2 = 8^{10}\cdot 2$.

Так как $9^{10} > 8^{10}$ и $3 > 2$, то $9^{10}\cdot 3 > 8^{10}\cdot 2$ и $3^{21} > 2^{31}$.

***Ответ*:** **а)** $5^{60} > 8^{20}$; **б)** $2^{30} > 4^{14}$; **в)** $2{,}5^{\frac{\sqrt{5}}{6}} < 0{,}4^{-0{,}5}$; **г)** $7^{30} > 4^{40}$; **д)** $3^{21} > 2^{31}$.

Пример 12. *Сравнить числа* 13^5 *и* 23^4.

Решение. Воспользуемся формулой

$$(a+1)^5 = a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1.$$

Тогда

$$13^5 = (12+1)^5 > 12^5 + 5\cdot 12^4 = 12^4(12+5) = \\ = 17\cdot 12^4 > 16\cdot 12^4 = 2^4\cdot 12^4 = 24^4 > 23^4.$$

***Ответ*:** $13^5 > 23^4$.

1.5. Сравнение выражений, содержащих корни натуральной степени

При сравнении двух выражений, содержащих одинаковые корни натуральных степеней, используют следующие правила.

● Если натуральное число $n > 1$ нечетно и $a > b$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

● Если натуральное число $n > 1$ четно и $a > b > 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

При сравнении двух выражений, содержащих разные корни натуральных степеней обычно их приводят к корням с одинаковыми показателями, либо возводят в степень для избавления от корней.

Пример 13. *Сравнить числа:*

а) $\sqrt[5]{\frac{15}{16}}$ *и* $\sqrt[5]{\frac{16}{17}}$; **б)** $\sqrt[12]{623}$ и $\sqrt[3]{5}$.

Решение. **а)** Сравним подкоренные числа

$$\frac{15}{16}-\frac{16}{17}=\frac{15\cdot17-16\cdot16}{16\cdot17}=-\frac{1}{16\cdot17}<0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{15}{16}<\frac{16}{17} \text{ и } \sqrt[5]{\frac{15}{16}}<\sqrt[5]{\frac{16}{17}}.$$

б) По свойству арифметических корней имеем $\sqrt[3]{5}=\sqrt[12]{5^4}=\sqrt[12]{625}$. Так как $623<625$, то $\sqrt[12]{623}<\sqrt[12]{625}$ и $\sqrt[12]{623}<\sqrt[3]{5}$.

***Ответ*: а)** $\sqrt[5]{\frac{15}{16}}<\sqrt[5]{\frac{16}{17}}$; **б)** $\sqrt[12]{623}<\sqrt[3]{5}$.

Пример 14. *Сравнить числа* $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ *и* $\sqrt{15}-\sqrt{12}$.

Решение. Так как оба числа положительны, то можем сравнить их натуральные степени (квадраты). При этом знак сравнения не меняется.

$$\sqrt{7}-\sqrt{5} \vee \sqrt{15}-\sqrt{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{7}-\sqrt{5})^2 \vee (\sqrt{15}-\sqrt{12})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12-2\sqrt{35} \vee 27-2\sqrt{180} \Leftrightarrow$$

(уменьшаем теперь каждое число на 12)

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{35} \vee 15-2\sqrt{180} \Leftrightarrow$$

(прибавляем к каждому из полученных чисел сумму $2\sqrt{35}+2\sqrt{180}$)

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{180} \vee 15+2\sqrt{35} \Leftrightarrow$$

(так как оба числа положительны, то сравниваем их квадраты)

$$\Leftrightarrow 720 \vee 365+60\sqrt{35} \Leftrightarrow$$

(поделим оба числа на 5)

$$\Leftrightarrow 144 \vee 73+12\sqrt{35} \Leftrightarrow 71 \vee 12\sqrt{35} \Leftrightarrow$$

(еще раз возведем, полученные числа в квадрат)

$$\Leftrightarrow 71^2 \vee (12\sqrt{35})^2 \Leftrightarrow 5041>5040.$$

В итоге, выполнив ряд преобразований, мы получили, что знак неравенства между исходными числами тот же, что и между числами 5041 и 5040. Так как $5041>5040$, то $\sqrt{7}-\sqrt{5}>\sqrt{15}-\sqrt{12}$.

Ответ. $\sqrt{7}-\sqrt{5}>\sqrt{15}-\sqrt{12}$.

Иногда удобно умножать сравниваемые выражения на одно и то же выражение, например, для выделения разности квадратов. Для неотрицательных чисел a и b справедлива формула

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b.$$

Выражения $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ называются *сопряженными*.

Пример 15. *Сравнить числа* $\sqrt{8}-\sqrt{6}$ *и* $\sqrt{13}-\sqrt{11}$.

Решение. Домножив и поделив каждое выражение на сопряженное к нему, получим:

$$\sqrt{8}-\sqrt{6} \vee \sqrt{13}-\sqrt{11} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{6})(\sqrt{8}+\sqrt{6})}{\sqrt{8}+\sqrt{6}} \vee$$

$$\vee \frac{(\sqrt{13}-\sqrt{11})(\sqrt{13}+\sqrt{11})}{\sqrt{13}+\sqrt{11}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{8}+\sqrt{6}} \vee \frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}.$$

Знаменатель второй дроби больше, поэтому вторая дробь меньше. Соответственно получаем, что $\sqrt{8}-\sqrt{6}>\sqrt{13}-\sqrt{11}$.

***Ответ*:** $\sqrt{8}-\sqrt{6}>\sqrt{13}-\sqrt{11}$.

1.6. Сравнение выражений, содержащих логарифмы

При сравнении двух выражений, содержащих логарифмы, используют следующие правила, вытекающие из свойств функции $y=\log_a x$.

- Если $a>1$ и $M>N>0$, то $\log_a M>\log_a N$.
- Если $0<a<1$ и $M>N>0$, то $\log_a M<\log_a N$.

В частности:

а) Если $a>1$ и $M>1$, то $\log_a M>0$.
б) Если $a>1$ и $0<M<1$, то $\log_a M<0$.
в) Если $0<a<1$ и $M>1$, то $\log_a M<0$.
г) Если $0<a<1$ и $0<M<1$, то $\log_a M>0$.

Из свойств функции $y=\log_x a$ следуют такие правила.

- Если $a>1$ и $M>N>1$, то
$$\log_M a<\log_N a.$$
- Если $a>1$ и $0<N<M<1$, то
$$\log_M a<\log_N a.$$
- Если $0<a<1$ и $N>M>1$, то
$$\log_M a<\log_N a.$$
- Если $0<a<1$ и $0<M<N<1$, то
$$\log_M a<\log_N a.$$

Пример 16. *Сравнить числа*:

а) $\log_2 5$ *и* $\log_2 \pi$; **б)** $\log_{0,5} 20$ *и* $\log_{0,5} 7$;

в) $\log_2 3$ *и* $\log_4 5$.

Решение. **а)** Так как $5>\pi$ и основание $2>1$, то по свойству логарифмов имеем $\log_2 5>\log_2 \pi$.

б) Основание логарифмов $0<0,5<1$ и $20>7$. Поэтому $\log_{0,5} 20<\log_{0,5} 7$.

в) Так как $\log_4 5=\log_2 \sqrt{5}$ и $3>\sqrt{5}$, то по свойству возрастающей функции $y=\log_2 x$ имеем $\log_2 3>\log_2 \sqrt{5}$ и $\log_2 3>\log_4 5$.

Ответ: **а)** $\log_2 5>\log_2 \pi$; **б)** $\log_{0,5} 20<\log_{0,5} 7$; **в)** $\log_2 3>\log_4 5$.

Пример 17. *Сравнить числа*: $\log_2 5$ *и* $\log_3 7$.

Решение. Подберем «хорошее» число такое, которое больше одного логарифма и меньше другого. Так как функция $y=\log_2 x$ возрастающая, то $\log_2 5>\log_2 4=2$. Аналогично, $\log_3 7<\log_3 9=2$. Значит,
$$\log_2 5>2>\log_3 7 \text{ и } \log_2 5>\log_3 7;$$

Ответ: $\log_2 5>\log_3 7$.

Пример 18. *Сравнить числа* $\log_2 3$ *и* $\log_5 8$.

Решение. (1-*й способ*). Так как $1<\log_2 3<2$ и $1<\log_5 8<2$, то укрупним (удвоим) данные числа.

Имеем $2\log_2 3=\log_2 9$ и $3<\log_2 9<4$. Аналогично, $2\log_5 8=\log_5 64$ и $2<\log_5 64<3$. Отсюда следует, что
$$2\log_2 3>2\log_5 8 \text{ и } \log_2 3>\log_5 8.$$

Решение. (2-*й способ*). Так как $\log_2 3=\log_4 9$ и по свойству функций $y=\log_t 9$ и $y=\log_5 t$ выполняется цепочка неравенств $\log_4 9>\log_5 9>\log_5 8$, то $\log_2 3>\log_5 8$.

Ответ: $\log_2 3>\log_5 8$.

Пример 19. *Сравнить числа:*

а) $\log_{0,5} 5$ *и* $\log_2 5$; **б)** $\log_{0,5} 7$ *и* $\log_{0,8} 7$;

в) $\log_3 0,6$ *и* $\log_5 0,6$.

Решение. **а)** Так как $\log_{0,5} 5<0$, а $\log_2 5>0$, то $\log_{0,5} 5<\log_2 5$.

б) Так как $\log_{0,5} 7=\dfrac{1}{\log_7 0,5}$ и $\log_{0,8} 7=\dfrac{1}{\log_7 0,8}$, а $\log_7 0,5<\log_7 0,8<0$, то $\dfrac{1}{\log_7 0,5}<\dfrac{1}{\log_7 0,8}$ и $\log_{0,5} 7>\log_{0,8} 7$.

Замечание. Так как функция $y=\log_7 x$ на промежутке $(0;1)$ принимает отрицательные значения и является возрастающей, то на этом же промежутке функция $y=\log_x 7=\dfrac{1}{\log_7 x}$ является убывающей. Тогда для функции $y=\log_x 7$ на промежутке $(0;1)$ из неравенства $0,5<0,8$ следует неравенство $\log_{0,5} 7>\log_{0,8} 7$.

Либо сразу определяем по правилу: так как $7>1$ и $0<0,5<0,8<1$, то $\log_{0,5} 7>\log_{0,8} 7$.

в) По правилу: так как $0<0,6<1$ и $5>3>1$, то $\log_3 0,6<\log_5 0,6$.

Ответ: **а)** $\log_{0,5} 5<\log_2 5$; **б)** $\log_{0,5} 7>\log_{0,8} 7$; **в)** $\log_3 0,6<\log_5 0,6$.

Пример 20. *Сравнить числа*: $\log_{11}12$ *и* $\log_{12}13$.

Решение. Числа $\log_{11}12$ и $\log_{12}13$ близки друг к другу и подобрать «хорошее» число, разделяющее их, трудно.

Так как данные числа больше единицы, то «выделим» из каждого числа единицу следующим образом:

$$\log_{11}12=\log_{11}11\cdot\frac{12}{11}=1+\log_{11}\left(1+\frac{1}{11}\right),$$

$$\log_{12}13=1+\log_{12}\left(1+\frac{1}{12}\right).$$

Так как функция $y=\log_{12}t$ возрастающая, а $1+\frac{1}{12}<1+\frac{1}{11}$, то

$$\log_{12}\left(1+\frac{1}{12}\right)<\log_{12}\left(1+\frac{1}{11}\right)=\frac{\log_{11}\left(1+\frac{1}{11}\right)}{\log_{11}12}.$$

Так как при $a>0$ и $b>1$ выполняется неравенство $\frac{a}{b}<a$, то

$$\frac{\log_{11}\left(1+\frac{1}{11}\right)}{\log_{11}12}<\log_{11}\left(1+\frac{1}{11}\right)$$

и, значит,

$$\log_{12}\left(1+\frac{1}{12}\right)<\log_{11}\left(1+\frac{1}{11}\right)$$

и $\log_{12}13<\log_{11}12$.

Замечание. «Выделение» единицы из данных чисел можно заменить вычитанием из каждого числа единицы:

$$\log_{11}12-1=\log_{11}12-\log_{11}11=\log_{11}\frac{12}{11},$$

$$\log_{12}13-1=\log_{12}13-\log_{12}12=\log_{12}\frac{13}{12}.$$

Ответ: $\log_{12}13<\log_{11}12$.

Пример 21. *Сравнить числа*: $\log_2 3$ *и* $\log_3 4$.

Решение. (*1-й способ*). Так как число $\log_2 3$ положительное, то проведем равносильные преобразования над обеими частями сравнения

$$\log_2 3\vee\log_3 4\Leftrightarrow\log_2 3\vee\frac{2}{\log_2 3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\log_2 3)^2\vee 2\Leftrightarrow\log_2 3\vee\sqrt{2}.$$

Из следующей цепочки сравнений

$$\log_2 3=\log_2\sqrt{9}>\log_2\sqrt{8}=$$
$$=1{,}5=\sqrt{2{,}25}>\sqrt{2}$$

получаем, что $\log_2 3>\log_3 4$.

Решение (*2-й способ*). Используем неравенство Коши:

$$\frac{\log_3 4}{\log_2 3}=\log_3 4\cdot\log_3 2\le$$

$$\le\left(\frac{\log_3 4+\log_3 2}{2}\right)^2=\left(\frac{\log_3 8}{2}\right)^2.$$

Так как $8<9$, то $\frac{\log_3 8}{2}<1$ и $\left(\frac{\log_3 8}{2}\right)^2<1$. Значит, $\frac{\log_3 4}{\log_2 3}<1$ и $\log_2 3>\log_3 4$, учитывая, что $\log_2 3$ и $\log_3 4$ – положительные числа.

Ответ: $\log_2 3>\log_3 4$.

1.7. Сравнение выражений разного вида

При сравнении выражений разного вида используют выше приведенные методы.

Пример 22. *Сравнить числа*: $\sqrt{15}$ *и* $2\log_{12}145$.

Решение. Так как $2\log_{12}145>$ $>2\log_{12}144=4$ и $\sqrt{15}<\sqrt{16}=4$, то $2\log_{12}145>\sqrt{15}$.

Ответ: $2\log_{12}145>\sqrt{15}$.

Пример 23. *Сравнить числа*: $\log_2 11$ *и* $2+\sqrt{3}$.

Решение. Так как $\sqrt{3}>\sqrt{2{,}25}=1{,}5$, то

$$2+\sqrt{3}>3{,}5=\log_2(8\sqrt{2})>\log_2(8\cdot 1{,}4)=$$
$$=\log_2(11{,}2)>\log_2 11.$$

Ответ: $2+\sqrt{3}>\log_2 11$.

Пример 24. *Сравнить числа*: $\log_2 11$ *и* $2+\sqrt{2}$.

Решение. Рассмотрим цепочку сравнений:

$$\log_2 11 \vee 2+\sqrt{2} \Leftrightarrow \log_2 \frac{11}{4} \vee \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{11}{4} \vee 2^{\sqrt{2}}.$$

Заметим, что $\sqrt{2}=\sqrt{\frac{100}{50}}<\sqrt{\frac{100}{49}}=\frac{10}{7}$.

Тогда $2^{\frac{10}{7}}>2^{\sqrt{2}}$. Сравним числа $\frac{11}{4}$ и $2^{\frac{10}{7}}$:

$$\frac{11}{4} \vee 2^{\frac{10}{7}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{11}{4}\right)^7 \vee 2^{10}.$$

Рассмотрим отношение $\dfrac{\left(\frac{11}{4}\right)^7}{2^{10}}=\dfrac{11^7}{4^{12}}=$

$$=\left(\frac{121}{128}\right)^3 \cdot \frac{11}{8} > (0,9)^3 \cdot \frac{11}{8} = \frac{0,729 \cdot 11}{8} = \frac{8,019}{8} > 1.$$

Значит $\left(\frac{11}{4}\right)^7 > 2^{10}$. Следовательно, верно неравенство $\log_2 11 > 2+\sqrt{2}$.

Ответ: $\log_2 11 > 2+\sqrt{2}$.

2. Область определения выражения (функции)

В данном пункте ограничимся нахождением области определения логарифмических выражений.

Отметим, что решение логарифмических неравенств включает в себя нахождение области определения данного неравенства или по-другому области допустимых значений (ОДЗ) неизвестной неравенства, поэтому напомним, что:

а) выражение $\log_a f(x)$, где a – постоянное положительное число, не равное 1 ($a>0,\ a\neq 1$), определено при всех x, принадлежащих множеству решений неравенства $f(x)>0$;

б) выражение $\log_{g(x)} f(x)$ определено при всех x, принадлежащих множеству решений системы неравенств

$$\begin{cases} g(x)>0, \\ g(x)\neq 1, \\ f(x)>0. \end{cases}$$

Рассмотрим несколько задач.

Пример 25. *Найти область определения выражения*

$$\log_3\left(2x^2+10x+5\right)+\log_3\left(2+3x-x^2\right).$$

Решение. Данная задача сводится к решению следующей системы неравенств

$$\begin{cases} 2x^2+10x+5>0, \\ 2+3x-x^2>0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства этой системы есть множество

$$\left(-\infty;\ \frac{-5-\sqrt{15}}{2}\right) \cup \left(\frac{-5+\sqrt{15}}{2};\ +\infty\right).$$

Решение второго неравенства есть множество $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Сравним числа $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ и $\frac{-5+\sqrt{15}}{2}$.

$$\frac{3-\sqrt{17}}{2} \vee \frac{-5+\sqrt{15}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3-\sqrt{17} \vee -5+\sqrt{15} \Leftrightarrow 8-\sqrt{17} \vee \sqrt{15} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (8-\sqrt{17})^2 \vee 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 81-16\sqrt{17} \vee 15 \Leftrightarrow 66 \vee 16\sqrt{17} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 33 \vee 8\sqrt{17} \Leftrightarrow 1089 > 1088.$$

Следовательно, $\frac{3-\sqrt{17}}{2} > \frac{-5+\sqrt{15}}{2}$ и решения системы неравенств образуют множество $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Пример 26. *Найти область определения функции*

$$y=\log_3\left(2^{\log_{x-3} 0,5}-1\right)+\frac{1}{\log_3(2x-6)}.$$

Решение. Область определения данной функции задается системой неравенств

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x-3\neq 1, \\ 2x-6\neq 1, \\ 2^{\log_{x-3}0,5}-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x\neq 4, \\ x\neq 3,5, \\ \log_{x-3}0,5>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x\neq 3,5, \\ x\neq 4, \\ x-3<1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3<x<3,5, \\ 3,5<x<4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(3;\,3,5)\cup(3,5;\,4)$.

Пример 27. *Найти область определения выражения* $\log_{2,5-x}\left(10-3x-x^2\right)$.

Решение. Из определения логарифма получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 10-3x-x^2>0, \\ 2,5-x>0, \\ 2,5-x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-10<0, \\ x<2,5, \\ x\neq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)(x-2)<0, \\ x<2,5, \\ x\neq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x<2, \\ x<2,5, \\ x\neq 1,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5<x<1,5, \\ 1,5<x<2. \end{array}\right.$$

Объединение промежутков $(-5;1,5)$ и $(1,5;2)$ составляют область определения данного выражения.

Ответ: $(-5;1,5)\cup(1,5;2)$.

3. Алгебраические методы решения неравенств

Если исходить из определения неравенства, в котором в обеих частях записаны выражения с переменной, то при решении неравенств используют преобразования (возведение в четную или нечетную степень, логарифмирование, потенцирование), позволяющие привести неравенство к более простому виду. В процессе преобразований множество решений исходного неравенства либо не меняется, либо расширяется (можно получить посторонние решения), либо сужается (можно потерять решения). Поэтому важно знать, какие преобразования неравенства являются равносильными и при каких условиях.

3.1. Сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем

Как правило, преобразования используют для того, чтобы в неравенстве освободиться от знаков корней, от знаков модуля, от степеней, от знаков логарифма.

Поэтому ниже приведены схемы решения некоторых стандартных неравенств определенного вида. При этом отметим, что на практике некоторые цепочки преобразований делают короче, пропуская некоторые очевидные преобразования. Например, вместо длинной цепочки преобразований

$$\sqrt[2n]{f(x)}>\sqrt[2n]{g(x)},\ n\in\mathbb{N},\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt[2n]{f(x)}\right)^{2n}>\left(\sqrt[2n]{g(x)}\right)^{2n}, \\ f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)\geq 0, \end{cases}$$

используют краткую схему решения

$$\sqrt[2n]{f(x)}>\sqrt[2n]{g(x)},\ n\in\mathbb{N},\ \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)\geq 0. \end{cases}$$

В общем случае, если решение неравенства не укладывается в стандартную схему, ход решения разбивают на несколько логически возможных случаев.

Пример 28. (МИОО, 2009). Решите неравенство

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \geq$$

$$\geq 4\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2.$$

Решение. Так как $x^2-6x+9=(x-3)^2$, то область допустимых значений переменной x определяется условиями:

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 5 - x \geq 0, \\ \sqrt{5-x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \leq 5, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Исходное неравенство при полученных ограничениях для переменной x равносильно неравенству

$$\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \cdot \left(x+\frac{3}{x}-4\right) \geq 0. \quad (*)$$

Так как $\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \geq 0$, то рассмотрим два случая.

1. $\sqrt{x^2-6x+9}-1=0 \Leftrightarrow |x-3|=1$, что возможно при $x=2$ или $x=4$. Значит, с учетом полученных ранее ограничений, $x=2$ – решение, так как в этом случае левая часть неравенства $(*)$ равна нулю.

2. $\sqrt{x^2-6x+9}-1 \neq 0$. Тогда неравенство $(*)$ равносильно неравенству

$$x+\frac{3}{x}-4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-4x+3}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0.$$

Для решения последнего неравенства используем метод интервалов (см. рис. 2).

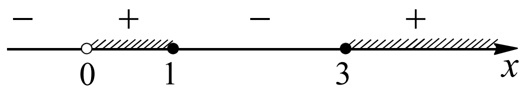


Рис. 2

С учетом полученных ранее ограничений записываем ответ.

Ответ: $(0; 1] \cup \{2\} \cup [3; 4) \cup (4; 5]$.

Пример 29. (МИЭТ, 2000). *Решить неравенство* $(x+2)^2 \leq 2(x+1)\sqrt{2x+3}$.

Решение. Выполняя равносильные преобразования данного неравенства, получим:

$$(x+2)^2 \leq 2(x+1)\sqrt{2x+3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+4x+4-2(x+1)\sqrt{2x+3} \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{2x+3}+2x+3 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2-2(x+1)\sqrt{2x+3}+(\sqrt{2x+3})^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x+1)-\sqrt{2x+3}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x+1-\sqrt{2x+3}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1-\sqrt{2x+3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 2x+3=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=\sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

Неравенства, содержащие иррациональные выражения

Приведем некоторые стандартные схемы для решения иррациональных неравенств, в которых используют возведение в натуральную степень обеих частей неравенства.

- $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$ (1)
- $\sqrt[2n]{f(x)} \geq \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$ (2)
- $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$ (3)
- $\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$ (4)
- $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^{2n}(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right.$ (5)
- $\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq g^{2n}(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right.$ (6)
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \vee g(x)$; (7)
- $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee g(x) \Leftrightarrow f(x) \vee g^{2n+1}(x)$, (8)

где символ $\vee$ в схемах (7) и (8) заменяет один из знаков неравенств: $>, <, \geq, \leq$.

Замечание. В первых шести схемах используется утверждение: если обе части неравенства неотрицательны, то после возведения их в четную степень получаем равносильное неравенство.

Пример 30. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x+18} < 2-x.$$

Решение. Если $2-x<0$ или $2-x=0$, то исходное неравенство не выполняется, так как $\sqrt{x+18} \geq 0$.

Пусть $2-x>0$, тогда при возведении обеих частей данного неравенства в квадрат получим на ее области определения и при условии $2-x>0$ равносильное неравенство.

$$\begin{cases} x+18<(2-x)^2, \\ x+18 \geq 0, \\ 2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x+2)>0, \\ x \geq -18, \\ x<2. \end{cases}$$

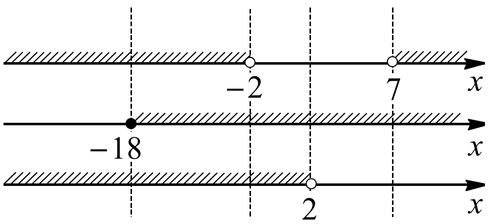


Рис. 3

На рис. 3 представлен способ графической интерпретации получения решения последней системы неравенств.

В итоге получаем $-18 \leq x < -2$ – решение системы.

Ответ: $-18 \leq x < -2$.

Замечание. Для решения данного неравенства можно было сразу использовать схему (3). Тогда получим, что данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x+18<(2-x)^2, \\ x+18 \geq 0, \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x+2)>0, \\ x \geq -18, \\ x \leq 2. \end{cases}$$

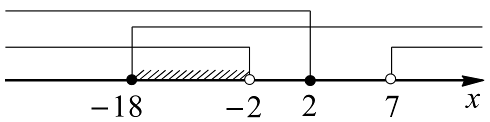


Рис. 4

В отличие от рисунка 3 другой способ графического представления решения последней системы неравенств с использованием одной числовой прямой Ox представлен на рис. 4.

Пример 31. (МИЭТ, 1999). *Решить неравенство* $\sqrt{x^2+10x+9} \geq x^2-2x-3$.

Решение. Используя схему (6), получим, что данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\text{(I)} \begin{cases} x^2+10x+9 \geq (x^2-2x-3)^2, \\ x^2-2x-3 \geq 0 \end{cases}$$

и

$$\text{(II)} \begin{cases} x^2+10x+9 \geq 0, \\ x^2-2x-3<0. \end{cases}$$

Для системы (I) имеем:

$x^2-2x-3 \geq 0$ при $x \in (-\infty; -1] \cup [3; \infty)$.

Первое неравенство системы (I) приводим к виду:

$$(x+1)(x+9) \geq (x+1)^2(x-3)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)\big((x+1)(x-3)^2-(x+9)\big) \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)\,x\,(x^2-5x+2) \leq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\,x\left(x-\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right) \leq 0.$$

Заметим, что $0<\frac{5-\sqrt{17}}{2}<\frac{1}{2}$, а $\frac{9}{2}<\frac{5+\sqrt{17}}{2}<5$.

На числовой прямой Ox (см. рис. 5) дано графическое представление решения первого неравенства системы (I).

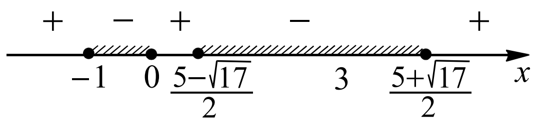


Рис. 5

Тогда решением системы (I) являются (см. рис. 6) все значения

$$x \in \{-1\} \cup \left[3; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right].$$

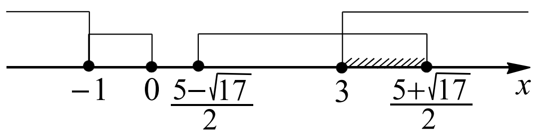


Рис. 6

Для системы (II) имеем:
$x^2+10x+9\ge 0$ при $x\in(-\infty;-9]\cup[-1;\infty)$;
$x^2-2x-3<0$ при $x\in(-1;3)$.

Следовательно, решением системы (II) будут значения $x\in(-1;3)$.

Объединяя решения (I) и (II), получаем ответ.

Ответ: $\left[-1;\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$.

При решении данного в примере 31 неравенства использован формальный переход к равносильной совокупности по схеме (6). Рассмотрим содержательную сторону этого перехода.

Если $x^2-2x-3\ge 0$, то обе части неравенства неотрицательны. После возведения в квадрат обеих частей неравенства получим на его области определения и при условии $x^2-2x-3\ge 0$ равносильное неравенство, то есть систему неравенств

$$\begin{cases}x^2+10x+9\ge(x^2-2x-3)^2,\\ x^2+10x+9\ge 0,\\ x^2-2x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+10x+9\ge(x^2-2x-3)^2,\\ x^2-2x-3\ge 0.\end{cases}$$

Пусть $x^2-2x-3<0$. Так как $\sqrt{x^2+10x+9}\ge 0$, то исходное неравенство выполняется на области его определения, т.е. получаем систему неравенств

$$\begin{cases}x^2+10x+9\ge 0,\\ x^2-2x-3<0.\end{cases}$$

Пример 32. (МИОО, 2009). *Решить неравенство*

$$\sqrt{7-x}<\frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}}.$$

Решение. Выполняя равносильные переходы, получим

$$\sqrt{7-x}<\frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x-1}<\sqrt{x^3-6x^2+14x-7},\\ x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(7-x)(x-1)<x^3-6x^2+14x-7,\\ 7-x\ge 0,\\ x-1\ge 0,\\ x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-5x^2+6x>0,\\ 1<x\le 7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-2)(x-3)>0,\\ 1<x\le 7.\end{cases}$$

На рис. 7 представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.

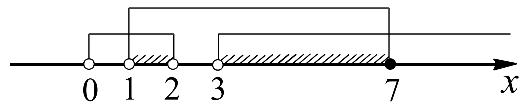


Рис. 7

Ответ: $1<x<2,\ 3<x\le 7$.

Пример 33. *Решить неравенство*

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}>2.$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x-2}=t$, где $t\ge 0$. Тогда выразим $x=t^2+2$ и приведем данное неравенство к виду

$$\sqrt{2t^2+7}>t+2.$$

Так как $t+2>0$, то получаем равносильное неравенство $2t^2+7>t^2+4t+4$ или $t^2-4t+3>0$ при $t\ge 0$.

Отсюда получаем $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t<1\\ t>3\end{array}\right.\\ t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le t<1\\ t>3.\end{array}\right.$

Возвращаемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l}0\le\sqrt{x-2}<1\\ \sqrt{x-2}>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x-2<1\\ x-2>9\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\le x<3\\ x>11.\end{array}\right.$$

Ответ: $2\le x<3;\ x>11$.

Пример 34. (МИЭТ, 2002). *Решить неравенство*

$$\frac{1}{\sqrt{8-x}}-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>\frac{1}{\sqrt{8+15x-2x^2}}.$$

Решение. Область определения данного неравенства определяется условиями:

$$\begin{cases}8-x>0\\2x+1>0,\\8+15x-2x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8-x>0\\2x+1>0,\\(2x+1)(8-x)>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}5<x<8.$$

Запишем исходное неравенство в следующем виде

$$\frac{1}{\sqrt{8-x}}-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>\frac{1}{\sqrt{(8-x)(2x+1)}}. \qquad (*)$$

Так как на области определения исходного неравенства $\sqrt{(8-x)(2x+1)}>0$, то, умножив обе части неравенства $(*)$ на $\sqrt{(8-x)(2x+1)}$, получим неравенство, равносильное исходному:

$$\frac{\sqrt{(8-x)(2x+1)}}{\sqrt{8-x}}-\frac{\sqrt{(8-x)(2x+1)}}{\sqrt{2x+1}}>1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{2x+1}-\sqrt{8-x}>1\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sqrt{2x+1}>1+\sqrt{8-x}.$$

Левая и правая части последнего неравенства неотрицательны при $-0{,}5<x<8$, поэтому после возведения их в квадрат и приведения подобных членов получим неравенство

$$2\sqrt{8-x}<3x-8\Leftrightarrow\begin{cases}3x-8\ge 0,\\8-x\ge 0,\\4(8-x)<(3x-8)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{8}{3},\\x\le 8,\\(9x-8)(x-4)>0\end{cases}\Leftrightarrow 4<x\le 8.$$

На рис. 8 представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.

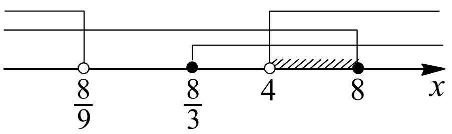


Рис. 8

С учетом условия $-0{,}5<x<8$ получаем ответ.

Ответ: $4<x<8$.

Неравенства, содержащие показательные выражения

Приведем некоторые стандартные схемы для решения показательных неравенств, в которых используют логарифмирование обеих частей неравенства.

- $$(\varphi(x))^{f(x)}>(\varphi(x))^{g(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>g(x),\\\varphi(x)>1,\end{cases}\\\begin{cases}g(x)>f(x),\\0<\varphi(x)<1.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (9)$$

- $$(\varphi(x))^{f(x)}\ge(\varphi(x))^{g(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge g(x),\\\varphi(x)>1,\end{cases}\\\begin{cases}g(x)\ge f(x),\\0<\varphi(x)<1,\end{cases}\\\ \varphi(x)=1.\end{array}\right. \qquad (10)$$

В частности:

- Если число $a>1$, то
$$a^{f(x)}>a^{g(x)}\ \Leftrightarrow\ f(x)>g(x). \qquad (11)$$
- Если число $0<a<1$, то
$$a^{f(x)}>a^{g(x)}\ \Leftrightarrow\ f(x)<g(x). \qquad (12)$$

- $$(f(x))^{\varphi(x)}>(g(x))^{\varphi(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>g(x)>0,\\\varphi(x)>0,\end{cases}\\\begin{cases}g(x)>f(x)>0,\\\varphi(x)<0.\end{cases}\end{array}\right. \qquad (13)$$

Пример 35. *Решить неравенство*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)}>1.$$

Решение. *1-й способ.* Область допустимых значений переменной x определяется условием: $x^2-1>0\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x>1,\\x<-1.\end{array}\right.$

При допустимых значениях переменной преобразуем левую часть данного неравенства

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)}=\left(2^{-1}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)}=\left(2^{\log_2\left(x^2-1\right)}\right)^{-1}=$$

$$= (x^2-1)^{-1} = \frac{1}{x^2-1}.$$

Получаем неравенство

$$\frac{1}{x^2-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x^2-1} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} < x < -1, \\ 1 < x < \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

2-*й способ*. Так как $0 < \frac{1}{2} < 1$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, то, используя схему (12), получаем:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2-1) < 0 \Leftrightarrow \log_2(x^2-1) < \log_2 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 < 1, \\ x^2-1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} < x < -1, \\ 1 < x < \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$.

Замечание. При решении неравенства $\log_2(x^2-1) < 0$ использована стандартная схема решения логарифмических неравенств (см. раздел «Неравенства, содержащие логарифмические выражения»).

Пример 36. *Решить неравенство*

$$(x^2+x+1)^x < 1.$$

Решение. Приведем неравенство к виду $(x^2+x+1)^x < (x^2+x+1)^0$ и воспользуемся схемой (9).

$$(x^2+x+1)^x < 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x < 0, \\ x^2+x+1 > 1, \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x^2+x+1 < 1. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Решим систему (1) полученной совокупности:

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2+x+1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x(x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1.$$

Решим систему (2) совокупности:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 0 < x^2+x+1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \begin{cases} x^2+x+1 > 0 \Leftrightarrow \\ x(x+1) < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x(x+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x+1 < 0. \end{cases}$$ Нет решений.

Ответ: $x < -1$.

При решении данного неравенства использован формальный переход к равносильной совокупности по схеме (9). Рассмотрим содержательную сторону этого перехода.

Выражение $(x^2+x+1)^x$ положительно, так как $x^2+x+1 > 0$ при всех значениях $x \in \mathbb{R}$. Прологарифмируем обе части данного неравенства

$$\lg(x^2+x+1)^x < \lg 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\lg(x^2+x+1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ \lg(x^2+x+1) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ \lg(x^2+x+1) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x^2+x+1 < 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x^2+x+1 > 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Неравенства, содержащие логарифмические выражения

Приведем некоторые стандартные схемы для решения логарифмических неравенств, в которых используют потенцирование обеих частей неравенства.

- $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right. \quad (14)$$

В частности:

- Если число $a>1$, то
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0. \quad (15)$$
- Если число $0<a<1$, то
$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x) > 0. \quad (16)$$

- $\log_{\varphi(x)} f(x) \ge \log_{\varphi(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right. \quad (17)$$

В частности:

- Если число $a>1$, то
$$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \ge g(x) > 0. \quad (18)$$
- Если число $0<a<1$, то
$$\log_a f(x) \ge \log_a g(x) \Leftrightarrow g(x) \ge f(x) > 0. \quad (19)$$

Пример 37. *Решить неравенство*
$$\log_{0,1}(x^2+x-2) > \log_{0,1}(x+3).$$

Решение. Так как основание 0,1 логарифмов, стоящих в обеих частях неравенства, удовлетворяют условию $0<0{,}1<1$, то, используя схему (16), получаем, что данное неравенство равносильно системе
$$\begin{cases} x^2+x-2 < x+3, \\ x^2+x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) < 0, \\ (x-1)(x+2) > 0. \end{cases}$$

На рис. 9 представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.

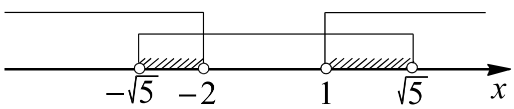


Рис. 9

Ответ: $\left(-\sqrt{5};-2\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right)$.

Пример 38. (МИОО, 2009). *Решить неравенство*
$$\log_x(7-x) < \log_x(x^3-6x^2+14x-7) - \\ -\log_x(x-1).$$

Решение. Выполняя равносильные переходы, получим, что данное неравенство равносильно следующей системе неравенств
$$\begin{cases} \log_x\left((7-x)(x-1)\right) < \log_x(x^3-6x^2+14x-7), \\ x>1. \end{cases}$$

В соответствии со схемой (14) для решения необходимо рассмотреть только случай, когда основание больше единицы, поэтому полученная система равносильна следующей
$$\begin{cases} (7-x)(x-1) < x^3-6x^2+14x-7, \\ 1<x<7 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-5x^2+6x > 0, \\ 1<x<7 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-3) > 0, \\ 1<x<7. \end{cases}$$

На рис. 10 представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.

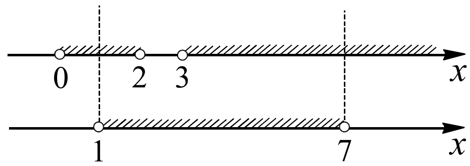


Рис. 10

Ответ: $(1;\,2)\cup(3;\,7)$.

Замечание. В приведенном решении данного неравенства в большей степени отражена математическая часть, чем методическая. При переходе от исходного неравенства к первой системе учтена часть области определения неравенства $x-1>0$. В следующей системе учтено еще условие $7-x>0$ и $(7-x)(x-1)>0$.

Пример 39. (ЕГЭ 2010). *Решить неравенство* $\dfrac{2\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)} \le \dfrac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}$.

Решение. В соответствии с определением логарифма, входящие в неравенство выражения имеют смысл при выполнении условий:

$$\begin{cases} |x| \neq 0, \\ 2^{x-1} \neq 1, \\ x+7>0, \\ x+7 \neq 1, \\ x+12>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x-1 \neq 0, \\ x>-7, \\ x \neq -6, \\ x>-12 \end{cases}$$

Из системы получаем значения

$$x \in (-7;-6) \cup (-6;0) \cup (0;1) \cup (1;+\infty).$$

Так как при допустимых значениях переменной x по свойствам логарифма справедливы равенства:

$$\frac{\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)} = \log_{x+7}|x|$$

и

$$\frac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)} = \log_{x+7}(x+12),$$

то исходное неравенство приводится к виду

$$2\log_{x+7}|x| \leq \log_{x+7}(x+12) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+7}x^2 \leq \log_{x+7}(x+12).$$

Последнее неравенство равносильно совокупности двух систем на множестве $(-7;-6) \cup (-6;0) \cup (0;1) \cup (1;+\infty)$:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x+7<1, \\ x^2 \geq x+12 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7>1, \\ x^2 \leq x+12 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -7<x<-6, \\ x^2-x-12 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>-6, \\ x^2-x-12 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -7<x<-6, \\ (x-4)(x+3) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>-6, \\ (x-4)(x+3) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -7<x<-6, \\ -3 \leq x \leq 4. \end{array}\right.$$

С учетом области определения данного неравенства

$$(-7;-6) \cup (-6;0) \cup (0;1) \cup (1;+\infty)$$

получаем ответ.

Ответ. $(-7;-6) \cup [-3;0) \cup (0;1) \cup (1;4]$.

Неравенства, содержащие выражения с модулями

Приведем некоторые стандартные схемы для решения неравенств с модулями, которые опираются на определение модуля, его геометрический смысл и свойства.

- $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x), \end{cases}$ (20)
- $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -g(x); \end{cases}$ (21)
- $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x); \end{array}\right.$ (22)
- $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x); \end{array}\right.$ (23)
- $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x)) > 0$; (24)
- $|f(x)| \geq |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \geq g^2(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x)) \geq 0$. (25)

Пример 40. *Решить неравенство*

$$|x^7+4x^5+x^2+2x-3| <$$
$$< x^7+4x^5-x^2-2x+3.$$

Решение. Используя схему (20) получаем, что данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^7+4x^5+x^2+2x-3 < \\ \quad < x^7+4x^5-x^2-2x+3, \\ x^7+4x^5+x^2+2x-3 > \\ \quad > -(x^7+4x^5-x^2-2x+3) \end{cases}$$

или после приведения подобных членов

$$\begin{cases} x^2+2x-3<0 \\ x^5(x^2+4)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<x<1.$$

Ответ: $0<x<1$.

Пример 41. *Решить неравенство*

$$\log_9(2x+1)+|\log_3(2x+1)|-1\ge 0.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующему

$$|\log_3(2x+1)|\ge 1-\log_9(2x+1).$$

Используя схему (23), получаем, что это неравенство, а значит и исходное, равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\log_3(2x+1)\ge 1-\log_9(2x+1),\\ \log_3(2x+1)\le -(1-\log_9(2x+1))\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3(2x+1)\ge 1-0{,}5\log_3(2x+1),\\ \log_3(2x+1)\le 0{,}5\log_3(2x+1)-1\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3(2x+1)\ge \dfrac{2}{3},\\ \log_3(2x+1)\le -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+1\ge\sqrt[3]{9},\\ 0<2x+1\le\dfrac{1}{9}.\end{array}\right.$$

Отсюда получаем ответ.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}<x\le-\dfrac{4}{9},\ x\ge\dfrac{\sqrt[3]{9}-1}{2}$.

Пример 42. Решите неравенство

$$||2^x+x-2|-1|>2^x-x-1.$$

Решение. Используя схему (22), получаем, что данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}|2^x+x-2|-1>2^x-x-1,\\ |2^x+x-2|-1<-2^x+x+1.\end{array}\right.$$

Используя схемы (20) и (22), получаем, что эта совокупность равносильна следующей.

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}2^x+x-2>2^x-x,\\ 2^x+x-2<-2^x+x,\end{array}\right.\\ \begin{cases}2^x+x-2<-2^x+x+2,\\ 2^x+x-2>2^x-x-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x>1,\\ 2^{x+1}<2,\end{array}\right.\\ \begin{cases}2^{x+1}<4,\\ x>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x>1,\\ x<0,\end{array}\right.\\ \begin{cases}x<1,\\ x>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;0)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Расщепление неравенств

Если левая часть неравенства представляет собой произведение двух выражений, а правая часть равна нулю, то схема решения неравенства опирается на правило знаков при умножении (делении) положительных или отрицательных чисел.

- $f(x)\cdot g(x)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)\le 0.\end{cases}\end{array}\right.$ (26)
- $f(x)\cdot g(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.$ (27)
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)>0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)<0.\end{cases}\end{array}\right.$ (28)
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0,\\ g(x)<0,\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)\le 0,\\ g(x)>0.\end{cases}\end{array}\right.$ (29)

Рассмотрим неравенство из примера 28.

Пример 43. *Решить неравенство*

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)\ge$$

$$\ge 4\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right).$$

Решение. Приведем данное неравенство к следующему виду:

$$\left(x+\frac{3}{x}-4\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)\ge 0.$$

В соответствии со схемой полученное неравенство равносильно совокупности систем (I) и (II):

$$(I)\ \begin{cases} x+\dfrac{3}{x}-4\ge 0, & (1)\\ \dfrac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\ge 0; & (2)\end{cases} \quad (II)\ \begin{cases} x+\dfrac{3}{x}-4\le 0, & (3)\\ \dfrac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\le 0. & (4)\end{cases}$$

Решим каждое неравенство системы (I). Для неравенства (1) имеем:

$$x+\frac{3}{x}-4\ge 0 \iff \frac{(x-1)(x-3)}{x}\ge 0 \iff \left[\begin{array}{l} 0<x\le 1,\\ x\ge 3.\end{array}\right.$$

Для неравенства (2) имеем:

$$\frac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\ge 0 \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases}|x-3|-1\ge 0\\ \sqrt{5-x}-1>0,\end{cases}\\ \begin{cases}|x-3|-1\le 0,\\ \sqrt{5-x}-1<0\end{cases}\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases}|x-3|\ge 1,\\ \sqrt{5-x}>1,\end{cases}\\ \begin{cases}|x-3|\le 1,\\ \sqrt{5-x}<1\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 4,\\ x\le 2\end{array}\right.\\ x<4,\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x\le 4,\\ 4<x\le 5\end{cases}\end{array}\right. \iff x\le 2.$$

Значит все значения $x\in(0;1]$ – решения системы (I).

Найдем решение системы (II). Для неравенства (3), используя решение (1), имеем:

$$x+\frac{3}{x}-4\le 0 \iff \left[\begin{array}{l} x<0,\\ 1\le x\le 3.\end{array}\right.$$

Для неравенства (4), используя решение (2) и учитывая ограничения

$$\begin{cases}5-x\ge 0,\\ \sqrt{5-x}\ne 1\end{cases} \iff \begin{cases}x\le 5,\\ x\ne 4\end{cases}$$

имеем:

$$\frac{|x-3|-1}{\sqrt{5-x}-1}\le 0 \iff \left[\begin{array}{l} 2\le x<4,\\ 4<x\le 5.\end{array}\right.$$

Значит все значения $x\in[2;3)$ – решения системы (II).

Объединяя решения систем (I) и (II), получаем ответ.

Ответ: $(0;1]\cup[2;3]$.

3.2. Метод замены

Если неравенство $F(x)\vee 0$ приводится к виду $f\big(g(x)\big)\vee 0$, то можно ввести новую переменную $g(x)=a$, решить неравенство $f(a)\vee 0$ относительно переменной a и затем решить полученные неравенства с первоначальной переменной x.

Замена рациональных выражений

Пример 44. *Решить неравенство*

$$\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4\le 0.$$

Решение. Пусть $\dfrac{x^2+x-5}{x}=a$, тогда получаем неравенство

$$a+\frac{3}{a}+4\le 0 \iff \frac{a^2+4a+3}{a}\le 0.$$

Используя метод интервалов в последнем неравенстве, находим его решения $a\le -3$ или $-1\le a<0$. Возвращаемся к первоначальной переменной и решаем неравенства

$$\frac{x^2+x-5}{x}\le -3 \text{ и } -1\le \frac{x^2+x-5}{x}<0.$$

Первое неравенство приводим к виду $\dfrac{x^2+4x-5}{x}\le 0$ и находим его решения $x\le -5$ или $0<x\le 1$.

Двойное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-5}{x}\ge 0,\\ \dfrac{x^2+x-5}{x}<0.\end{cases}$$

Отсюда получаем $-1-\sqrt{6}\le x<\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$ или $-1+\sqrt{6}\le x<\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$. Объединяя полученные решения с найденными выше, записываем ответ.

Ответ: $x\le -5$; $-1-\sqrt{6}\le x<\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$; $0<x\le 1$; $-1+\sqrt{6}\le x<\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$.

Иногда при решении неравенств полезно вводить две новых переменных.

Пример 45. (Тренировочная работа МИОО, ЕГЭ 2011). *Решить неравенство*

$$\frac{x^2-2x+1}{(x+2)^2}+\frac{x^2+2x+1}{(x-3)^2}\le\frac{(2x^2-x+5)^2}{2(x+2)^2(x-3)^2}.$$

Решение. Входящие в неравенство выражения имеют смысл при $x\ne-2$ и $x\ne3$.

При всех остальных значениях x неравенство равносильно следующему

$$2(x-3)^2(x-1)^2+2(x+2)^2(x+1)^2\le$$
$$\le(2x^2-x+5)^2\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad 2(x^2-4x+3)^2+2(x^2+3x+2)^2\le$$
$$\le(2x^2-x+5)^2.$$

Заметим, что

$$2x^2-x+5=(x^2-4x+3)+(x^2+3x+2).$$

Пусть $x^2-4x+3=u$ и $x^2+3x+2=v$. Тогда последнее неравенство примет вид

$$2u^2+2v^2\le(u+v)^2\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad 2u^2+2v^2\le u^2+2uv+v^2\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad u^2-2uv+v^2\le0\quad\Leftrightarrow\quad(u-v)^2\le0.$$

Отсюда следует, что $u=v$. Выполняя обратную замену, получаем

$$x^2-4x+3=x^2+3x+2,\text{ т.е. } x=\frac{1}{7}.$$

Ответ. $\frac{1}{7}$.

Замена иррациональных выражений

Пример 46. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}-2}\le3.$$

Решение. Пусть $\sqrt{x}=t$, где $t\ge0$. Тогда получаем рациональное неравенство

$$t-\frac{2}{t-2}\le3\quad\Leftrightarrow\quad\frac{(t-1)(t-4)}{t-2}\le0.$$

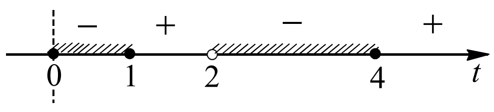


Рис. 11

Решая последнее неравенство методом интервалов (см. рис. 11), получаем:

$$\left[\begin{array}{l}0\le t\le1,\\2<t\le4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le\sqrt{x}\le1,\\2<\sqrt{x}\le4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x\le1,\\4<x\le16.\end{array}\right.$$

Ответ: $[0;1]\cup(4;16]$.

Пример 47. (МИОО, 2009). *Решить неравенство*

$$\frac{1}{6x^2-5x}\ge\frac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}.$$

Решение. Пусть $\sqrt{6x^2-5x+1}=t$, где $t\ge0$, тогда получаем систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{1}{t^2-1}\ge\dfrac{1}{t-1},\\t\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{1}{t^2-1}-\dfrac{1}{t-1}\ge0,\\t\ge0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\dfrac{t}{(t-1)(t+1)}\le0,\\t\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\quad0\le t<1.$$

Выполняя обратную замену, получаем

$$\begin{cases}6x^2-5x+1<1,\\6x^2-5x+1\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(6x-5)<0,\\(2x-1)(3x-1)\ge0.\end{cases}$$

Отсюда получаем (см. рис. 12) $0<x\le\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2}\le x<\frac{5}{6}$.

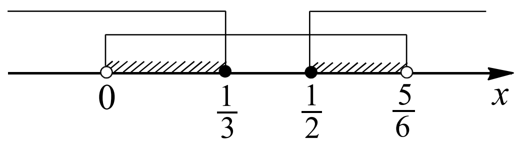


Рис. 12

Ответ: $0<x\le\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2}\le x<\frac{5}{6}$.

Замена выражений с модулями

Пример 48. *Решить неравенство*

$$x^2-4|x|+3>0.$$

Решение. Обозначим $|x|=a$, тогда данное неравенство примет следующий вид $a^2-4a+3>0$. Решения квадратного неравенства $a<1$ или $a>3$. Отсюда получаем простейшие неравенства с модулем $|x|<1$ или $|x|>3$. Общее решение исходного неравенства $x<-3$, $-1<x<1$, $x>3$.

Ответ: $x<-3$, $-1<x<1$, $x>3$.

Пример 49. (МГУ, 1997). *Решить неравенство*

$$\frac{16|x+1|-1}{3|x+1|+1}<3.$$

Решение. После введения новой переменной $|x+1|=a$ получим рациональное неравенство $\frac{16a-1}{3a+1}<3$, которое приводится к виду $\frac{7a-4}{3a+1}<0$. Применяя к последнему неравенству метод интервалов, имеем $-\frac{1}{3}<a<\frac{4}{7}$. Отсюда получаем

$$-\frac{1}{3}<|x+1|<\frac{4}{7} \text{ или } \begin{cases} |x+1|>-\frac{1}{3}, \\ |x+1|<\frac{4}{7}. \end{cases}$$

Первое неравенство системы выполняется при всех действительных значениях *x*. Второе неравенство системы равносильно двойному неравенству $-\frac{4}{7}<x+1<\frac{4}{7}$; $-\frac{11}{7}<x<-\frac{3}{7}$.

Ответ: $-\frac{11}{7}<x<-\frac{3}{7}$.

Замена показательных выражений

Пример 50. *Решить неравенство*

$$2\cdot 3^{x+1}-6\cdot 3^{x-1}-3^x\le 9$$

Решение. Введем обозначение $3^{x-1}=a$, тогда данное неравенство будет иметь вид

$$2\cdot 9a-6a-3a\le 9;\ 9a\le 9;\ a\le 1.$$

Выполняя обратную замену, получим:

$$3^{x-1}\le 1;\ 3^{x-1}\le 3^0 \text{ (основание } 3>1);$$
$$x-1\le 0;\ x\le 1.$$

Ответ: $(-\infty;1]$.

Пример 51. *Решить неравенство*

$$5^{2x^2-6}-5^{(x+2)(x-1)}-24\cdot 5^{2(x+2)}\le 0.$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$5^{2x^2-6}-5^{x^2+x-2}-24\cdot 5^{2x+4}\le 0.$$

Учитывая, что $5^{2x+4}>0$ при любом значении x, разделим обе части неравенства на 5^{2x+4}:

$$5^{2x^2-2x-10}-5^{x^2-x-6}-24\le 0.$$

Пусть $5^{x^2-x-5}=t$, где $t>0$. Тогда получим квадратное неравенство

$$t^2-\frac{1}{5}t-24\le 0 \Leftrightarrow 5t^2-t-120\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5(t-5)(t+4,8)\le 0.$$

Учитывая, что $t>0$, получаем $0<t\le 5$.

Переходя к переменной x, получим неравенство $0<5^{x^2-x-5}\le 5$. Неравенство $0<5^{x^2-x-5}$ справедливо при всех значениях x, а неравенство

$$5^{x^2-x-5}\le 5 \Leftrightarrow x^2-x-5\le 1.$$

Решая неравенство $x^2-x-6\le 0$, получим $-2\le x\le 3$.

Ответ: $[-2;3]$.

Пример 52. *Решить неравенство*

$$3\cdot 2^{2x+1}+5\cdot 6^x>2\cdot 3^{2x+1}.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$6\cdot 2^{2x}+5\cdot 2^x\cdot 3^x-6\cdot 3^{2x}>0.$$

Полученное неравенство имеет вид

$$t\cdot a^{2f(x)}+p\cdot a^{f(x)}\cdot b^{g(x)}+q\cdot b^{2g(x)}>0,$$

где t, p, q – фиксированные действительные числа. Общий метод решения неравенств такого вида состоит в делении на выражение $a^{2f(x)}>0$ (или на $a^{f(x)}\cdot b^{g(x)}>0$, или на $b^{2g(x)}>0$) и последующей замене переменной.

Разделим обе части исходного неравенства на $3^{2x}>0$

$$6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-6>0.$$

Положим $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$, где $t>0$. В итоге получим квадратичное неравенство

$$6t^2+5t-6>0 \Leftrightarrow 6\left(t-\frac{2}{3}\right)\left(t+\frac{3}{2}\right)>0.$$

Отсюда с учетом условия $t>0$ получаем $t>\dfrac{2}{3}$.

Выполняя обратную замену, получим неравенство $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x>\dfrac{2}{3}$, решение которого есть множество $(-\infty;1)$.

Ответ: $(-\infty;1)$.

Пример 53. (ЕГЭ 2010). *Решить неравенство*

$$\log_5\left(\left(7^{-x^2}-5\right)\left(7^{-x^2+16}-1\right)\right)+\log_5\frac{7^{-x^2}-5}{7^{-x^2+16}-1}>$$
$$>\log_5\left(7^{2-x^2}-1\right)^2.$$

Решение. В соответствии с определением логарифма, входящие в неравенство выражения имеют смысл при выполнении условий:

$$\begin{cases}\left(7^{-x^2}-5\right)\left(7^{-x^2+16}-1\right)>0,\\ 7^{2-x^2}-1\neq 0.\end{cases}$$

Сделаем замену $7^{-x^2}=t$. Так как неравенство $-x^2\le 0$ выполняется при всех значениях x, то по свойству степени с основанием больше единицы получаем $0<7^{-x^2}\le 7^0=1$. Отсюда $0<t\le 1$. С учетом последнего неравенства, запишем полученную выше систему

$$\begin{cases}(t-5)\left(7^{16}t-1\right)>0,\\ 7^2t-1\neq 0,\\ 0<t\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\quad 0<t<7^{-16}.$$

Исходное неравенство с переменной t будет иметь вид

$$\log_5\left((t-5)\left(7^{16}t-1\right)\right)+\log_5\frac{t-5}{7^{16}t-1}>$$
$$>\log_5(49t-1)^2\text{, где } 0<t<7^{-16}.$$

Используя свойство логарифма (при допустимых значениях переменной сумма логарифмов с одинаковым основанием равна логарифму произведения), получим

$$\log_5(t-5)^2>\log_5\left(7^2t-1\right)^2\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad (t-5)^2>(49t-1)^2,$$

так как $(t-5)^2>0$ и $(49t-1)^2>0$ при $0<t\le 7^{-16}$. Решим последнее неравенство:

$$(t-5)^2>(49t-1)^2\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad (t-5)^2-(49t-1)^2>0\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left((t-5)-(49t-1)\right)\left((t-5)+(49t-1)\right)>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (48t+4)(50t-6)<0\ \Leftrightarrow\ -\frac{1}{12}<t<\frac{3}{25}.$$

С учетом ограничения на t получаем $0<t<7^{-16}$.

Выполнив обратную замену, имеем $7^{-x^2}<7^{-16}$. Отсюда $x^2>16\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x<-4,\\ x>4.\end{array}\right.$

Ответ. $(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.

Замена логарифмических выражений

Пример 54. *Решить неравенство*

$$\frac{4}{\lg 10x}-\frac{5}{\lg 100x}\ge 0.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство $\dfrac{4}{1+\lg x}-\dfrac{5}{2+\lg x}\ge 0$. Пусть $\lg x=a$, тогда получаем неравенство $\dfrac{4}{1+a}-\dfrac{5}{2+a}\ge 0$; $\dfrac{3-a}{(a+1)(a+2)}\ge 0$. Найдем решения последнего неравенства $a<-2$ или $-1<a\le 3$. Перейдем к решению простейших неравенств $\lg x<-2$ или $-1<\lg x\le 3$. Так как логарифм определен для положительных чисел, то имеем $0<x<0{,}01$ или $0{,}1<x\le 1000$.

Ответ. $(0;0{,}01)\cup(0{,}1;1000]$.

Пример 55. *Решить неравенство*

$$5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}<10.$$

Решение. Сделаем замену $\log_5 x=a$, тогда $x=5^a$. Подставим в данное неравенство $5^{a^2}+5^{a^2}<10$; $5^{a^2}<5$; $a^2<1$; $|a|<1$; $-1<a<1$.

Выполняя обратную замену, получим:

$$-1<\log_5 x<1;$$
$$\log_5\frac{1}{5}<\log_5 x<\log_5 5;\ \frac{1}{5}<x<5.$$

Ответ. $\left(\frac{1}{5};5\right)$.

Пример 56. (МФТИ, 2009). *Решить неравенство*

$$\left|\log_{x+1}2+\log_2\frac{x+1}{4}\right|+$$
$$+|\log_2(4x+4)+\log_{x+1}2|<5.$$

Решение. Область определения данного неравенства определяется условиями

$$\begin{cases}x+1>0,\\ x+1\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0,\\ x>0.\end{array}\right.$$

Так как при допустимых значениях x справедливо равенство

$$\log_{x+1}2=\frac{1}{\log_2(x+1)},$$

то, сделав замену $\log_2(x+1)=t$, получим неравенство

$$\left|\frac{1}{t}+t-2\right|+\left|t+\frac{1}{t}+2\right|<5.$$

Полагая $t+\frac{1}{t}=u$, получим неравенство $|u-2|+|u+2|<5$.

Используем геометрический способ решения последнего неравенства (см. раздел «Геометрические методы решения»). Расстояние между точками –2 и 2 меньше 5, поэтому для каждой из точек отрезка $[-2;2]$ сумма расстояний до точек –2 и 2 меньше 5. Рассмотрим точки справа и слева от отрезка $[-2;2]$. Для точки, лежащей правее точки 2, сумма расстояний от точек –2 и 2 складывается из длины отрезка $[-2;2]$ и удвоенного расстояния от этой точки до точки 2. Искомые точки находятся правее точки 2 на расстоянии меньше $(5-4):2=0{,}5$. Аналогично искомые точки находятся слева от точки –2 на расстоянии меньше 0,5. Следовательно,

$$|u-2|+|u+2|<5\Leftrightarrow -2{,}5<u<2{,}5\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad |u|<2{,}5.$$

Тогда

$$\left|t+\frac{1}{t}\right|<2{,}5\quad\Leftrightarrow\quad\frac{t^2+1}{|t|}<2{,}5\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2|t|^2-5|t|+2<0\ \Leftrightarrow\ 0{,}5<|t|<2.$$

Отсюда $0{,}5<|\log_2(x+1)|<2$.

Последнее неравенство равносильно совокупности двух неравенств

$$\left[\begin{array}{l}0{,}5<\log_2(x+1)<2,\\ -2<\log_2(x+1)<-0{,}5\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}<x+1<4,\\ \frac{1}{4}<x+1<\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}-1<x<3,\\ -\frac{3}{4}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}-1.\end{array}\right.$$

Ответ. $-\frac{3}{4}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}-1$, $\sqrt{2}-1<x<3$.

Замена комбинированных выражений

Пример 57. *Решить неравенство*

$$49^{1+\sqrt{x-2}}-344\cdot 7^{\sqrt{x-2}}>-7.$$

Решение. Пусть $7^{\sqrt{x-2}}=a$, тогда имеем $49a^2-344a+7>0$. Находим решения квадратного неравенства: $a<\frac{1}{49}$ или $a>7$. Отсюда переходим к решению неравенств $7^{\sqrt{x-2}}<\frac{1}{49}$ или $7^{\sqrt{x-2}}>7$. Получаем $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}<-2,\\ \sqrt{x-2}>1\end{array}\right.\Leftrightarrow x-2>1\Leftrightarrow x>3.$

Ответ. $(3;+\infty)$.

Пример 58. *Решить неравенство*

$$27^{\lg x}-7\cdot 9^{\lg x}-21\cdot 3^{\lg x}+27\le 0.$$

Решение. После введения новой переменной $3^{\lg x}=a$ получаем неравенство $a^3-7a^2-21a+27\le 0$. Так как уравнение $a^3-7a^2-21a+27=0$ имеет корни -3, 1 и 9, то неравенство $(a+3)(a-1)(a-9)\le 0$ имеет решения $a\le -3$ или $1\le a\le 9$.

Выполняя обратную замену, получим, что неравенство $3^{\lg x}\le -3$ не имеет решений, а из двойного неравенства $1\le 3^{\lg x}\le 9$ получаем $3^0\le 3^{\lg x}\le 3^2$ $(3>1)$; $0\le \lg x\le 2$; $\lg 1\le \lg x\le \lg 100$ (основание $10>1$); $1\le x\le 100$.

Ответ. $[1;100]$.

3.3. Разбиение области определения неравенства на подмножества

Разбиение ОДЗ неизвестной неравенства на промежутки позволяет упростить некоторые неравенства. Решение неравенства рассматривают отдельно на каждом промежутке.

Пример 59. *Решить неравенство*

$$2^x + 2^{|x|} \ge 2\sqrt{2}.$$

Решение. Данное неравенство определено при всех значениях x. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x \ge 0$, тогда неравенство примет следующий вид:

$2^x + 2^x \ge 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^x \ge \sqrt{2} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{1}{2}$ (в силу возрастания функции $y = 2^t$).

2. Если $x < 0$, то имеем:

$$2^x + \frac{1}{2^x} \ge 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2\sqrt{2}\cdot t + 1 \ge 0, \\ 2^x = t, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t \ge \sqrt{2}+1, \\ t \le \sqrt{2}-1, \end{array}\right. \\ 2^x = t, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x \ge \sqrt{2}+1, \\ 2^x \le \sqrt{2}-1, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \log_2(\sqrt{2}+1), \\ x \le \log_2(\sqrt{2}-1). \end{array}\right.$$

С учетом условия $x < 0$ получаем, что $x \le \log_2(\sqrt{2}-1)$ является решением неравенства на рассматриваемом промежутке, поскольку $\log_2(\sqrt{2}-1) < \log_2 1 = 0$, а $\log_2(\sqrt{2}+1) > \log_2 2 = 1$.

Объединим решения, полученные в первом и втором случаях.

Ответ: $\left(-\infty; \log_2(\sqrt{2}-1)\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Пример 60. *Решить неравенство*

$$|x-1| + |x-2| > 3 + x.$$

Решение. Решением совокупности $\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x-2=0 \end{array}\right.$ являются числа 1 и 2.

Эти числа разбивают числовую прямую на три промежутка $(-\infty; 1)$, $[1; 2)$ и $[2; +\infty)$. Освобождаясь от знаков модулей, с учетом знаков выражений под знаком модуля решим данное неравенство на каждом из этих промежутков (см. рис. 13).

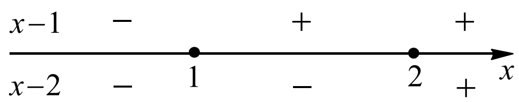


Рис. 13

Если $x < 1$, то исходное неравенство равносильно неравенству

$$-x + 1 - x + 2 > 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x < 0.$$

Получаем, что $x < 0$ есть решение исходного неравенства на рассматриваемом промежутке.

Если $1 \le x < 2$, то исходное неравенство равносильно неравенству

$$x - 1 - x + 2 > 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x < -2.$$

Следовательно, на этом промежутке решений нет.

Если $x \ge 2$, то исходное неравенство равносильно неравенству

$$x - 1 + x - 2 > 3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x > 6.$$

Получаем, что $x > 6$ есть решение исходного неравенства на рассматриваемом промежутке.

Объединяя полученные решения, запишем ответ.

Ответ: $x < 0, x > 6$.

Пример 61. (МИЭТ, 2002). *Решить неравенство*

$$\frac{1}{|x-9|} \le \frac{x-3}{4x-11}.$$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\text{(I)} \begin{cases} x > 9, \\ \dfrac{1}{x-9} \le \dfrac{x-3}{4x-11} \end{cases} \text{и (II)} \begin{cases} x < 9, \\ \dfrac{1}{9-x} \le \dfrac{x-3}{4x-11}. \end{cases}$$

Для системы (I) имеем:

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x>9, \\ \dfrac{x^2-16x+38}{(x-9)(4x-11)} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>9, \\ \dfrac{(x-8+\sqrt{26})(x-8-\sqrt{26})}{(x-9)(4x-11)} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \ge 8+\sqrt{26}.$$

Для системы (II) имеем:

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} x<9, \\ \dfrac{(x-4)^2}{(x-9)(4x-11)} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2,75, \\ x=4. \end{array} \right.$$

Объединяя решения (I) и (II), получаем ответ.

Ответ: $x<2,75$, $x=4$, $x \ge 8+\sqrt{26}$.

Пример 62. *Решить неравенство*

$$\log_2(x^2-4)-3\log_2\frac{x+2}{x-2}>2.$$

Решение. Область определения данного неравенства определяется условием:

$$(x-2)(x+2)>0.$$

Отсюда получаем два промежутка: $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x>2$.

Тогда неравенство примет следующий вид:

$$\log_2(x-2)+\log_2(x+2)-3\log_2(x+2)+$$
$$+3\log_2(x-2)>2$$

или

$$2\log_2(x-2)-\log_2(x+2)>1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2(x-2)^2>\log_2\left(2(x+2)\right).$$

Отсюда

$$(x-2)^2>2(x+2) \text{ или } x(x-6)>0.$$

С учетом условия $x>2$ получаем $x>6$.

2. Пусть $x<-2$. В этом случае неравенство примет следующий вид:

$$\log_2(2-x)+\log_2(-x-2)-3\log_2(-x-2)+$$
$$+3\log_2(2-x)>2$$

или

$$2\log_2(2-x)-\log_2(-x-2)>1.$$

Отсюда

$$(2-x)^2>2(-x-2) \text{ или } x^2-2x+8>0.$$

Так как уравнение $x^2-2x+8=0$ не имеет корней и старший коэффициент положителен, то последнее неравенство выполняется при всех действительных значениях x, т.е. на всем рассматриваемом промежутке.

В этом случае все значения $x<-2$ являются решениями неравенства.

Объединим полученные решения.

Ответ: $x<-2$ или $x>6$.

Пример 63. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(x^2-2x-15\right)^{3/2}} \cdot 7^{(x+3)^2(x-5)} \le 1.$$

Решение. ОДЗ неизвестной данного неравенства находим из условия $x^2-2x-15 \ge 0$, т.е. $x \le -3$ или $x \ge 5$.

Рассмотрим исходное неравенство на двух промежутках: 1) $x \le -3$ и 2) $x \ge 5$.

1. При $x \le -3$ исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{x+3}}{\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}} \le 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{-x-3}} \le 1.$$

Поскольку при $x \le -3$ верно каждое из неравенств: $-x-3 \ge 0$, $\sqrt{x^2-2x-15} \ge 0$, $7^{x^2-2x-15} \ge 1$, $2^{x^2-2x-15} \ge 1$, то в этом случае левая часть неравенства меньше либо равна 1 для любого значения x из этого промежутка.

2. Пусть $x \ge 5$. Заметим, что неравенство $x+3>\sqrt{x^2-2x-15}$ справедливо на всем этом промежутке. Это следует из его решения

$$x+3>\sqrt{x^2-2x-15} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+6x+9>x^2-2x-15 \quad \Leftrightarrow \quad x>-3.$$

В силу возрастания функции $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^t$, где $a>b>0$, $t>0$, из неравенства $\left(\dfrac{a}{b}\right)^t \geq 1$ следует $a^t \geq b^t$. Поэтому имеем $7^{x^2-2x-15} \geq 2^{x^2-2x-15} \geq 1$, причем равенство достигается при $x=5$ на рассматриваемом промежутке, а при всех $x>5$ справедливо строгое неравенство.

Отсюда получаем

$$\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{x+3} \geq \left(2^{x^2-2x-15}\right)^{x+3} \geq$$

$$\geq \left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}.$$

Тогда $\dfrac{\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{x+3}}{\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}} > 1$ при $x>5$

и $\dfrac{\left(7^{x^2-2x-15}\right)^{x+3}}{\left(2^{x^2-2x-15}\right)^{\sqrt{x^2-2x-15}}} = 1$ при $x=5$.

Значит, исходное неравенство на рассматриваемом промежутке выполняется только при $x=5$.

Объединим решения, полученные в первом и втором случаях.

Ответ. $x \leq -3$ или $x=5$.

4. Функционально-графические методы решения

Область применения свойств функции при решении неравенств очень широка. Наличие свойств (ограниченность, монотонность и т.д.) функций, входящих в неравенства позволяет применить нестандартные методы решения к стандартным по формулировке задачам – неравенствам.

Начнем с примера, связанного с композицией функций.

Пример 64. (МИЭТ, 2002). *Пусть* $f(x)=\dfrac{x^2-14x+33}{9-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x}$. *Решить неравенство* $f\big(g(x-9)\big) \geq f(4)$.

Решение. Так как, $g(x-9)=\sqrt{x-9}$, то

$$f\big(g(x-9)\big)=f(\sqrt{x-9})=$$

$$=\frac{(\sqrt{x-9})^2-14\sqrt{x-9}+33}{9-(\sqrt{x-9})^2}.$$

Так как $f(4)=\dfrac{4^2-14\cdot 4+33}{9-4^2}=1$, то неравенство $f\big(g(x-9)\big) \geq f(4)$ примет вид

$$\frac{(\sqrt{x-9})^2-14\sqrt{x-9}+33}{9-(\sqrt{x-9})^2} \geq 1.$$

Сделав замену $\sqrt{x-9}=t$, где $t \geq 0$, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{t^2-14t+33}{9-t^2} \geq 1, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2-7t+12}{9-t^2} \geq 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(t-3)(t-4)}{(t-3)(t+3)} \leq 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t-4}{t+3} \leq 0, \\ t \geq 0, \\ t \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq t < 3, \\ 3 < t \leq 4. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leq \sqrt{x-9} < 3, \\ 3 < \sqrt{x-9} \leq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq x-9 < 9, \\ 9 < x-9 \leq 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9 \leq x < 18, \\ 18 < x \leq 25. \end{array}\right.$$

Ответ: $9 \leq x < 18$; $18 < x \leq 25$.

4.1. Использование области определения функции

Предварительный анализ области допустимых значений неизвестной неравенства иногда позволяет получить решения без преобразований неравенства.

Пример 65. (МИЭТ, 1998). *Решить неравенство* $\sqrt{-x^2+3x-2} > x^3-9$.

Решение. Область определения неравенства задается условием:

$$-x^2+3x-2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x \leq 2.$$

Для этих значений x получаем:

$$1 \leq x \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x^3 \leq 8 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -8 \leq x^3-9 \leq -1,$$

т.е. правая часть исходного неравенства отрицательна на его области определения. Следовательно, неравенство справедливо при всех значениях $1 \le x \le 2$.

Ответ: $1 \le x \le 2$.

Пример 66. *Решить неравенство*

$$\left(\sqrt{x^2 - 6x + 5} + 1\right) \cdot \log_5 \frac{x}{5} + \frac{1}{x}\left(\sqrt{12x - 2x^2 - 10} + 1\right) > 0.$$

Решение. Область определения неравенства задается условиями:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \ge 0, \\ 12x - 2x^2 - 10 \ge 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5. \end{array}\right.$$

Подставляя полученные значения в данное неравенство, получим, что:

при $x = 1$ исходное неравенство примет вид $\log_5 \frac{1}{5} + 1 > 0$ или $0 > 0$, т.е. будет неверно;

при $x = 5$ имеем верное неравенство $\frac{1}{5} > 0$.

Ответ: 5.

4.2. Использование непрерывности функции

Сформулируем свойство непрерывных функций: *если функция $f(x)$ непрерывна на интервале и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.*

На этом свойстве основан метод решения неравенств с одной переменной – метод интервалов. Дальнейшие обобщения метода интервалов связаны с расширением класса функций, входящих в неравенство.

Метод интервалов

Пусть дана функция $f(x) = ax + b$, $(a \ne 0)$. Она равна нулю в единственной точке $x_0 = -\frac{b}{a}$. В силу монотонности непрерывная функция $f(x) = ax + b$ принимает на промежутках $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$ и $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ значения разного знака.

Сформулируем свойство чередования знака линейного двучлена $ax + b$ $(a \ne 0)$: *при переходе через значение $x_0 = -\frac{b}{a}$ знак значения выражения $ax + b$ меняется на противоположный.*

Знание свойства чередования знака линейного двучлена $ax + b$ позволяет при решении неравенств не приводить его к каноническому виду $x - x_0$ и определять знак соответствующей функции только на одном промежутке.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x), \qquad (*)$$

где $f_i(x) = a_i x + b_i$, причем $\frac{b_i}{a_i} \ne \frac{b_j}{a_j}$, $a_i \ne 0$, $a_j \ne 0$, $i \ne j$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Функции **(*)** соответствует разбиение числовой прямой на $n+1$ интервалов точками $x_i = -\frac{b_i}{a_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Так как при переходе через каждую точку x_i в выражении (*) меняет знак только один множитель $a_i x + b_i$, то получаем следующее свойство чередования знака функции (*): *при переходе через точку $x_i = -\frac{b_i}{a_i}$ из одного интервала в смежный знак значения функции (*) меняется на противоположный.*

Решение неравенств $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$ методом интервалов, где $f(x)$ – функция вида **(*)**, заключается в следующем. На числовой прямой расставляют числа $x_i = -\frac{b_i}{a_i}$ и затем для одного из образовавшихся промежутков с помощью *пробной точки* этого промежутка определяют знак данной функции. В остальных промежутках знаки расставляем согласно свойству знакочередования функции (*). Тогда объединение всех промежутков, в которых поставлен знак «плюс», представляет решение неравенства $f(x)>0$, а объединение всех промежутков, в которых поставлен знак «минус», есть решение неравенства $f(x)<0$. Для решения нестрогих неравенств необходимо к решениям строгого неравенства добавить корни уравнения $f(x)=0$.

Пример 67. *Решить неравенство*

$$(2x^2-5x+3)(\sqrt[3]{3}-x)\le 0.$$

Решение. Перепишем неравенство в следующем виде

$$(2x-3)(x-1)(\sqrt[3]{3}-x)\le 0,$$

и далее используем метод интервалов.

1. Рассмотрим функцию

$$f(x)=(2x-3)(x-1)(\sqrt[3]{3}-x).$$

2. Область определения функции $f(x)$: $D(f)=\mathbb{R}$.

3. Найдем нули функции: $f(x)=0$; $(2x-3)(x-1)(\sqrt[3]{3}-x)=0$. Отсюда получаем корни уравнения: 1; 1,5; $\sqrt[3]{3}$. Так как $1<3<1{,}5^3=3{,}375$, то $1<\sqrt[3]{3}<1{,}5$.

4. Найдем промежутки знакопостоянства функции $f(x)$. Так как для промежутка $(-\infty;1)$ имеем $f(0)>0$, то расставляем знаки для других промежутков в соответствии с правилом знакочередования, как показано на рис. 14.

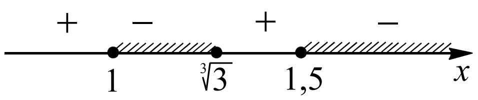


Рис. 14

Получаем все значения

$$x\in[1;\sqrt[3]{3}]\cup[1{,}5;+\infty),$$

при которых $f(x)\le 0$.

Ответ: $[1;\sqrt[3]{3}]\cup[1{,}5;+\infty)$.

Неравенство вида $\dfrac{p(x)}{q(x)}>0$ $\left(\dfrac{p(x)}{q(x)}<0\right)$ равносильно неравенству $p(x)q(x)>0$ (соответственно $p(x)q(x)<0$). Нестрогие неравенства вида $\dfrac{p(x)}{q(x)}\ge 0$ и $\dfrac{p(x)}{q(x)}\le 0$ соответственно равносильны системам $\begin{cases}p(x)q(x)\ge 0,\\ q(x)\ne 0\end{cases}$ и $\begin{cases}p(x)q(x)\le 0,\\ q(x)\ne 0.\end{cases}$

На практике неравенство $\dfrac{p(x)}{q(x)}\vee 0$ решают, не приводя его к виду $p(x)q(x)\vee 0$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>, <, \ge, \le$.

Рассмотрим неравенство $\dfrac{p(x)}{q(x)}>0$, где $p(x)$ и $q(x)$ – функции вида (*).

Пример 68. *Решить неравенство*

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3.$$

Решение. Приведем неравенство к виду

$$\frac{(2x-3)(x-2)}{(x-1)(x-3)}>0$$

и используем метод интервалов.

1. Пусть $f(x)=\dfrac{(2x-3)(x-2)}{(x-1)(x-3)}$.

2. $D(f)=(-\infty;1)\cup(1;3)\cup(3;+\infty)$.

3. Нули функции $f(x)$ найдем из уравнения $(2x-3)(x-2)=0$. Корни последнего уравнения 1,5 и 2 принадлежат области определения $D(f)$.

4. На каждом из промежутков $(-\infty;1)$, $(1;1{,}5)$, $(1{,}5;2)$, $(2;3)$, $(3;+\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна и сохраняет постоянный знак. Так как $f(0)>0$, то на промежутке $(-\infty;1)$ функция $f(x)$ принимает положительные значения. На остальных промежутках расставляем знаки по правилу знакочередования (см. рис. 15).

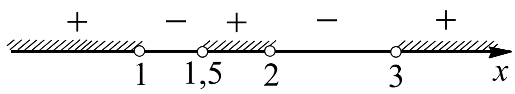


Рис. 15

Следовательно, $f(x)>0$ при всех значениях $x\in(-\infty;1)\cup(1{,}5;2)\cup(3;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;1)\cup(1{,}5;2)\cup(3;+\infty)$.

Первое обобщение метода интервалов

В примерах предыдущего пункта знаки в промежутках знакопостоянства чередуются. Рассмотрим рациональные неравенства и соответствующие им функции $f(x)$, для которых при переходе из одного интервала в смежный интервал знак функции $f(x)$ может и не меняться.

Пусть дана функция вида

$$f(x)=f_1^{k_1}(x)\cdot f_2^{k_2}(x)\cdot\ldots\cdot f_n^{k_n}(x),\ (**)$$

где $f_i(x)=a_ix+b_i$, причем $\frac{b_i}{a_i}\neq\frac{b_j}{a_j}$, $a_i\neq 0$, $a_j\neq 0$, $i\neq j$, $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,n$, $k_1,k_2,\ldots,k_n$ – фиксированные натуральные числа.

Для решения неравенства $f(x)\vee 0$, где выражение $f(x)$ имеет вид (**), используется *обобщенный метод интервалов,* который опирается на следующее правило чередования знаков выражения: *при переходе через точку* $x_i=-\frac{b_i}{a_i}$ *из одного интервала в смежный знак значения функции* (**) *меняется на противоположный, если* k_i *– нечетное число, и не меняется, если* k_i *– четное число.*

Пример 69. *Решить неравенство*

$$(x-3)^2(x-\sqrt{7})\left(x-2\frac{16}{25}\right)\leq 0.$$

Решение. 1. Рассмотрим функцию

$$f(x)=(x-3)^2(x-\sqrt{7})\left(x-2\frac{16}{25}\right).$$

2. $D(f)=\mathbb{R}$.

3. Найдем нули функции $f(x)$ из уравнения $(x-3)^2(x-\sqrt{7})\left(x-2\frac{16}{25}\right)=0$. Отсюда корни уравнения: 3, $\sqrt{7}$ и 2,64. Сравним полученные числа. Так как $7<9$, то $\sqrt{7}<\sqrt{9}$ и $\sqrt{7}<3$.

Аналогично из неравенства $7>2{,}64^2=$ $=6{,}9696$ получаем $\sqrt{7}>\sqrt{2{,}64^2}$, $\sqrt{7}>2{,}64$.

4. Найдем промежутки знакопостоянства функции $f(x)$. Так как $f(0)>0$, то на интервале $(-\infty;2{,}64)$ функция $f(x)$ положительна. На других промежутках расставляем знаки, учитывая кратность корней, как показано на рис. 16.

Отсюда $f(x)\leq 0$ при всех значениях $x\in[2{,}64;\sqrt{7}]\cup\{3\}$.

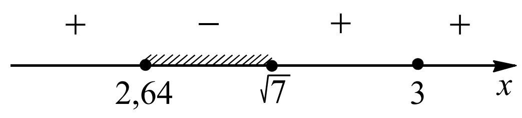


Рис. 16

Ответ: $[2{,}64;\sqrt{7}]\cup\{3\}$.

Второе обобщение метода интервалов

Применимость метода интервалов не ограничивается решением рациональных неравенств.

Пример 70. *Решить неравенство*

$$\log_2 x\leq 0.$$

Решение. Функция $f(x)=\log_2 x$ определена и непрерывна на промежутке $(0;+\infty)$ и обращается в нуль при $x=1$. Следовательно, на интервалах $(0;1)$ и $(1;+\infty)$ функция $f(x)$ сохраняет постоянный знак. Так как $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$, $f(2)=1$, то $f(x)\leq 0$ при всех значениях $x\in(0;1]$.

Ответ: $(0;1]$.

Пример 71. *Решить неравенство*

$$\arcsin x>0.$$

Решение. Функция $f(x)=\arcsin x$ определена и непрерывна на отрезке $[-1;1]$ и обращается в нуль при $x=0$. Значит, функция $f(x)$ сохраняет свой постоянный знак на каждом из промежутков $[-1;0)$ и $(0;1]$. Так как $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}>0$, а $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}<0$ то $f(x)>0$ при всех значениях $x\in(0;1]$.

Ответ: $(0;1]$.

Пример 72. *Решить неравенство*

$$(x^4-1)\log_2\left(x+\frac{1}{2}\right)>0.$$

Решение. Введем функцию $f(x)=(x^4-1)\log_2\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Она определена и непрерывна на промежутке $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ и обращается в нуль при $x=\frac{1}{2}$ или $x=1$. Значит, на интервалах $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};1\right)$ и $(1;+\infty)$ функция $f(x)$ сохраняет постоянный знак.

Так как $f\left(\frac{3}{2}\right)>0$, $f\left(\frac{3}{4}\right)<0$, $f(0)>0$, то $f(x)>0$ при всех значениях $x\in\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Замечание. В данном примере знаки функции $f(x)$ были определены на каждом из промежутков отдельно с помощью пробных точек этих промежутков. Покажем другой способ расстановки знаков функции $f(x)$ на промежутках.

Каждая из функций $f_1(x)=x^4-1$ и $f_2(x)=\log_2\left(x+\frac{1}{2}\right)$ обладает свойством знакочередования (докажите самостоятельно): при переходе через точки $x=1$ и $x=\frac{1}{2}$ соответственно функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ меняют знак на противоположный. Значит, функция $f(x)$ меняет знак при переходе через каждую из указанных точек. Так как $f\left(\frac{3}{2}\right)>0$, то на промежутке $(1;+\infty)$ функция $f(x)$ положительна. На остальных промежутках расставляем знаки по свойству знакочередования функции $f(x)$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

Пример 73. *Решить неравенство*

$$\frac{(2x-5)\left(32^{\frac{1}{x}}-4\right)}{(3^x-8)(x^4+4x+20)}\ge 0.$$

Решение. Так как при $x=-1$ многочлен $x^4+4x+20$ принимает наименьшее значение 17 (докажите с помощью производной), то неравенство $x^4+4x+20>0$ выполняется при всех значениях x. Тогда данное неравенство принимает вид

$$\frac{(2x-5)\left(32^{\frac{1}{x}}-4\right)}{3^x-8}\ge 0.$$

Используем метод интервалов.

1. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{(2x-5)\left(32^{\frac{1}{x}}-4\right)}{3^x-8}.$$

2. Функция $f(x)$ не существует при $x=0$ и $x=\log_3 8$.

3. Так как каждый из множителей $2x-5$ и $32^{\frac{1}{x}}-4$ обращается в нуль в одной и той же точке $x=2{,}5$, то функция $f(x)$ имеет единственный нуль 2,5. Отметим, что $0<\log_3 8<\log_3 9=2<2{,}5$.

4. На каждом из промежутков $(-\infty;0)$, $(0;\log_3 8)$, $(\log_3 8;2{,}5)$ и $(2{,}5;+\infty)$ определим знак функции $f(x)$: $f(-1)<0$, $f(1)>0$, $f(2)<0$, $f(5)<0$ (см. рис. 17). Значит, $f(x)\ge 0$ при всех значениях $x\in(0;\ \log_3 8)\cup\{2{,}5\}$.

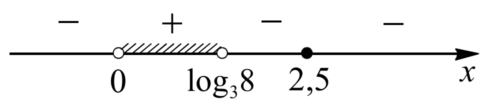


Рис. 17

Замечание. Если учесть, что каждая из функций $f_1(x)=2x-5$, $f_2(x)=3^x-8$, $f_3(x)=32^{\frac{1}{x}}-4$ меняет знак при переходе через точки $\frac{5}{2}$, $\log_3 8$, 0 и $\frac{5}{2}$ соответственно (докажите самостоятельно), то можно было использовать свойство знакочередования функции $f(x)$ при расстановке знаков на промежутках: функция $f(x)$ меняет знак при переходе через точки 0 и $\log_3 8$, не меняет знак при переходе через точку 2,5.

Ответ: $0 < x < \log_3 8; x = 2{,}5$.

Пример 74. *Решить неравенство*

$$\left(3^{\frac{x-2}{2}}-1\right)\sqrt{3^x-10\sqrt{3^x}+9} \ge 0.$$

Решение. Обозначим $\sqrt{3^x}=t$, где $t \ge 0$. Тогда данное неравенство примет следующий вид

$$\left(\frac{t}{3}-1\right)\sqrt{t^2-10t+9} \ge 0 \iff$$

$$\iff (t-3)\sqrt{t^2-10t+9} \ge 0. \qquad (*)$$

Используем метод интервалов.

1. Рассмотрим функцию

$$f(t)=(t-3)\sqrt{t^2-10t+9}.$$

2. Найдем область определения функции $f(t)$. Для этого решим неравенство $t^2-10t+9 \ge 0$; $(t-1)(t-9) \ge 0$; $t \le 1$ или $t \ge 9$. Отсюда $D(f)=(-\infty;1]\cup[9;+\infty)$.

3. Находим нули функции $f(t)$.

$$(t-3)\sqrt{t^2-10t+9}=0 \iff \left[\begin{array}{l}\sqrt{t^2-10t+9}=0,\\ t-3=0.\end{array}\right.$$

Из совокупности получаем числа 1, 3, 9, нулями функции из которых являются $t=1$ или $t=9$, так как $3 \notin D(f)$.

4. Находим промежутки знакопостоянства функции $f(t)$. Так как $f(0)<0$, $f(10)>0$, то получаем, что $f(t) \ge 0$ при всех значениях $t \in \{1\}\cup[9;+\infty)$ (см. рис. 18).

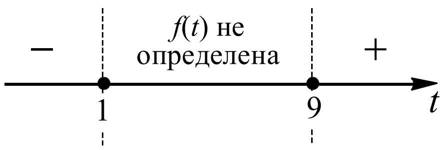


Рис. 18

Полученные решения удовлетворяют условию $t \ge 0$. Вернемся к переменной *x*.

Так как $\left[\begin{array}{l}t=1,\\ t\ge 9,\end{array}\right.$ то имеем

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{3^x}=1,\\ \sqrt{3^x}\ge 9\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}3^x=1,\\ 3^x\ge 81\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x\ge 4.\end{array}\right.$$

Замечание. Удобнее в алгоритм решения неравенства (*) методом интервалов не вносить дополнительное условие $t \ge 0$, а учитывать его перед возвращением к первоначальной переменной.

Ответ: $\{0\}\cup[4;+\infty)$.

4.3. Использование ограниченности функций

При решении неравенств методами, основанными на использования ограниченности функции, необходимо уметь находить множество значений произвольной функции, а также знать области значений стандартных функций (например, $-1 \le \sin x \le 1$, $\sqrt{x} \ge 0$ и т.д.).

Метод оценки

Иногда неравенство $f(x) \vee g(x)$, где символ $\vee$ означает один из знаков неравенств $\ge, >, \le, <$, устроено так, что при всех допустимых значениях неизвестной x имеют место неравенства $f(x) \ge A$ и $g(x) \le A$ при некотором *A*. В этом случае:

а) решение неравенства $f(x) \le g(x)$ сводится к нахождению тех значений x, для которых одновременно $f(x)=A$ и $g(x)=A$;

б) неравенство $f(x)<g(x)$ не имеет решений;

в) решение неравенства $f(x) \ge g(x)$ сводится к нахождению тех решений неравенства $f(x) \ge A$, для которых определена функция $g(x)$;

г) неравенство $f(x)>g(x)$ верно для всех допустимых значений x.

Обычно внешним признаком для использования этого метода, является наличие в неравенстве функций разных типов: алгебраических, тригонометрических, показательных, логарифмических и т.п., что затрудняет или делает невозможным использование стандартных методов (замены, разложения на множители и т.д.).

Пример 75. *Решить неравенство*

$$\log_5 x \le \sqrt{1-x^4}.$$

Решение. Область определения неравенства задается условиями:

$$\begin{cases} x>0, \\ 1-x^4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0<x\le 1.$$

Для всех x из полученного множества имеем $\log_5 x\le 0$, а $\sqrt{1-x^4}\ge 0$. Следовательно, решением этого неравенства является промежуток $(0;1]$.

Ответ: $(0;1]$.

Пример 76. *Решить неравенство*

$$\sqrt{16-(5x+2)^2}\ge 4+\cos^2\frac{15\pi x}{4}.$$

Решение. Оценим правую часть. Так как $0\le\cos^2\frac{15\pi x}{4}\le 1$, то $4\le 4+\cos^2\frac{15\pi x}{4}\le 5$.

Для левой части последовательно имеем $(5x+2)^2\ge 0$, $-(5x+2)^2\le 0$, $16-(5x+2)^2\le 16$, $\sqrt{16-(5x+2)^2}\le 4$ при всех допустимых значениях x.

Исходное неравенство возможно только в том случае, если обе части неравенства равны 4, то есть данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{16-(5x+2)^2}=4, \\ 4+\cos^2\dfrac{15\pi x}{4}=4. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет один корень $x=-0{,}4$, который удовлетворяет и второму уравнению.

Ответ: –0,4.

Пример 77. (МИЭТ, 2005). *Решить неравенство*

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\ge 3\cdot\sqrt[4]{x^2-4x+20}.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}.$$

Ее область определения $D(f)=[-7;11]$. Найдем экстремумы функции:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+7}}-\frac{1}{2\sqrt{11-x}}=\frac{\sqrt{11-x}-\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x+7}\sqrt{11-x}},$$

$D(f')=(-7;11)$. Найдем нули производной из уравнения $f'(x)=0$. Из уравнения $11-x=x+7$ получаем $x=2$.

$$f'(x)>0 \text{ при } -7<x<2;$$
$$f'(x)<0 \text{ при } 2<x<11.$$

Следовательно, $x=2$ – точка максимума функции $f(x)$ и $f(2)=6$. Значит $\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}\le 6$ при всех допустимых значениях x.

Оценим правую часть исходного неравенства $3\cdot\sqrt[4]{x^2-4x+20}=3\cdot\sqrt[4]{(x-2)^2+16}\ge$ $\ge 3\cdot\sqrt[4]{16}=6$.

Таким образом, для исходного неравенства нужно, чтобы его левая и правая части были равны 6. Это выполняется при $x=2$.

Ответ: 2.

Неотрицательность функции

Пусть левая часть неравенства $f(x)\ge 0$ ($f(x)\le 0$) есть сумма нескольких функций $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$, каждая из которых неотрицательна для любого x из области ее определения. Тогда неравенство $f(x)\le 0$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0, \end{cases}$$

а неравенство $f(x)\ge 0$ сводится к нахождению области определения функции $f(x)$.

Пример 78. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x^3+8x^2-7x-26}+\sqrt{x^2+3x-10}\le 0.$$

Решение. Так как левая часть неравенства неотрицательна, то данное неравенство выполняется только при одновременном равенстве нулю слагаемых

$$\begin{cases} \sqrt{x^3+8x^2-7x-26}=0, \\ \sqrt{x^2+3x-10}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+8x^2-7x-26=0, \\ \left[\begin{array}{l} x=-5, \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=2.$$

Ответ: 2.

Пример 79. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x^2-5x-14}+\lg(x^2-6x+10)>0.$$

Решение. Так как при всех допустимых значениях x $\sqrt{x^2-5x-14}\ge 0$ и $\lg\left((x-3)^2+1\right)\ge 0$, то левая часть данного неравенства неотрицательна. Уравнение $\sqrt{x^2-5x-14}+\lg(x^2-6x+10)=0$ может иметь корни, если выполняются условия

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-5x-14}=0,\\ \lg\left((x-3)^2+1\right)=0.\end{cases}$$

Полученная система уравнений не имеет решений. Значит, данное неравенство выполняется на своей области определения, то есть при всех x таких, что $x^2-5x-14\ge 0$. Множество решений этого квадратичного неравенства есть: $(-\infty;-2]\cup[7;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-2]\cup[7;+\infty)$.

Применение свойств модуля

Пример 80. *Решить неравенство*

$$|x^2-3x+2|\le x^2-3x+2.$$

Решение. Из условия $|a|\le a$ и из свойств модуля $|a|\ge a$ имеем $|a|=a$. Отсюда по определению модуля получаем $a\ge 0$, где $a=x^2-3x+2$. Неравенство $x^2-3x+2\ge 0$ имеет решения $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Пример 81. (МИОО, 2010). *Решить неравенство*

$$|x^3-2x^2-3x|+|x^2+4x-5|\le$$
$$\le|x^3-x^2+x-5|.$$

Решение. Неравенство имеет вид $|a|+|b|\le|a+b|$, где $a=x^3-2x^2-3x$ и $b=x^2+4x-5$.

С другой стороны известно неравенство треугольника $|a|+|b|\ge|a+b|$. Отсюда получаем равенство $|a|+|b|=|a+b|$, которое справедливо при условии $ab\ge 0$.

Из неравенства

$$(x^3-2x^2-3x)(x^2+4x-5)\ge 0$$

или

$$x(x+1)(x-3)(x-1)(x+5)\ge 0$$

получаем множество решений исходного неравенства $[-5;-1]\cup[0;1]\cup[3;+\infty)$.

Ответ: $[-5;-1]\cup[0;1]\cup[3;+\infty)$.

Напомним некоторые дополнительные свойства модулей.

● Сумма модулей равна алгебраической сумме подмодульных выражений тогда и только тогда, когда каждое выражение имеет тот знак, с которым оно входит в алгебраическую сумму.

$$|f|+|g|=f+g \Leftrightarrow \begin{cases}f\ge 0,\\ g\ge 0.\end{cases}$$

$$|f|+|g|=-f-g \Leftrightarrow \begin{cases}f\le 0,\\ g\le 0.\end{cases}$$

$$|f|+|g|=-f+g \Leftrightarrow \begin{cases}f\le 0,\\ g\ge 0.\end{cases}$$

$$|f|+|g|=f-g \Leftrightarrow \begin{cases}f\ge 0,\\ g\le 0.\end{cases}$$

● Сумма модулей равна модулю алгебраической суммы подмодульных выражений тогда и только тогда, когда одновременно все выражения имеют тот знак, с которым они входят в алгебраическую сумму, либо одновременно все выражения имеют противоположный знак.

$$|f|+|g|=|f+g| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}f\ge 0,\\ g\ge 0\end{cases} \text{или} \begin{cases}f\le 0,\\ g\le 0\end{cases} \Leftrightarrow fg\ge 0;$$

$$|f|+|g|=|f-g| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}f\ge 0,\\ g\le 0\end{cases} \text{или} \begin{cases}f\le 0,\\ g\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow fg\le 0.$$

Одна из схем решения уравнения для трех слагаемых:

$$|f|+|g|+|h|=|f+g-h| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f\ge 0, \\ g\ge 0, \\ h\le 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} f\le 0, \\ g\le 0, \\ h\ge 0. \end{cases}$$

Ограниченность синуса и косинуса

Пример 82. (МИЭТ, 1998). *Решить неравенство*

$$(x^2+2x+2)\cdot\cos(x+1)\ge 2x^2+4x+3.$$

Решение. Поскольку $x^2+2x+2>0$ при любом x, то, разделив обе части неравенства на x^2+2x+2, придем к равносильному неравенству

$$\cos(x+1)\ge\frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(x+1)\ge 1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}.$$

Так как $\cos(x+1)\le 1$, а правая часть неравенства $1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}\ge 1$ при всех значениях x и $1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}=1$ при $x=-1$, то равенство возможно только при $x=-1$. Проверкой убеждаемся, что и левая часть неравенства при $x=-1$ также равна 1.

Ответ: -1.

Применение классических неравенств

Рассмотрим классическое неравенство Коши, известное школьникам как неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных чисел, которое эффективно может быть использовано при решении неравенств.

Неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим при $a_1, a_2\ge 0$ имеет вид:

$$\frac{a_1+a_2}{2}\ge\sqrt{a_1a_2} \quad \text{или} \quad a_1+a_2\ge 2\sqrt{a_1a_2}$$

причем равенство $a_1+a_2=2\sqrt{a_1a_2}$ возможно лишь при $a_1=a_2$.

Отсюда, например, следует, что при $x>0$ функция $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ограничена снизу, т.е. $x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$, причем $x+\frac{1}{x}=2$ при $x=1$.

В общем случае верно следующее неравенство.

Неравенство Коши: *для любых неотрицательных чисел* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *справедливо неравенство*

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n},$$

причем равенство достигается только в случае $a_1=a_2=\dots=a_n$.

Пример 83. *Решить неравенство*

$$x^{1007}+\frac{2014}{\sqrt{x}}\le 2015.$$

Решение. Запишем левую часть данного неравенства следующим образом

$$x^{1007}+\frac{2014}{\sqrt{x}}=x^{1007}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{x}}}_{2014\ \text{слагаемых}}$$

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получим

$$x^{1007}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{x}}\ge$$
$$\ge 2015\cdot\sqrt[2015]{x^{1007}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}=$$
$$=2015\cdot\sqrt[2015]{1}=2015.$$

Причем равенство имеет место при равенстве слагаемых, т.е. при

$$x^{1007}=\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x=1.$$

Следовательно, исходное неравенство выполняется только при $x=1$. При всех остальных допустимых значениях x левая часть исходного неравенства больше 2015.

Ответ: 1.

4.4. Использование монотонности функций

При использовании монотонности функций различают случаи, когда функции, стоящие в обеих частях неравенства, имеют одинаковую монотонность или разную монотонность.

Монотонность функции на множестве $\mathbb{R}$

Если функция $f(t)$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.

Если функция $f(t)$ строго убывает на $\mathbb{R}$, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x) < g(x)$.

Отметим следствия из этих утверждений, которые часто используют при решении неравенств.

Следствие 1. Так как функция $f(t) = t^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, строго возрастает на $\mathbb{R}$, то равносильны следующие неравенства:

$$(h(x))^{2n+1} > (g(x))^{2n+1} \Leftrightarrow h(x) > g(x),$$
где $n \in \mathbb{N}$.

Следствие 2. Так как функция $f(t) = \sqrt[2n+1]{t}$, $n \in \mathbb{N}$, строго возрастает на $\mathbb{R}$, то равносильны следующие неравенства:

$$\sqrt[2n+1]{h(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow h(x) > g(x),$$
где $n \in \mathbb{N}$.

Следствие 3. Так как функция $f(t) = a^t$ $(a > 1)$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, то равносильны следующие неравенства:

$$a^{h(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow h(x) > g(x),$$
при $a > 1$.

Следствие 4. Так как функция $f(t) = a^t$ $(0 < a < 1)$ строго убывает на $\mathbb{R}$, то равносильны следующие неравенства:

$$a^{h(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow h(x) < g(x),$$
при $0 < a < 1$.

Следствие 5. Так как функция $f(t) = \operatorname{arctg} t$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, то равносильны следующие неравенства:

$$\operatorname{arctg}(h(x)) > \operatorname{arctg}(g(x)) \Leftrightarrow h(x) > g(x).$$

Следствие 6. Так как функция $f(t) = \operatorname{arcctg} t$ строго убывает на $\mathbb{R}$, то равносильны следующие неравенства:

$$\operatorname{arcctg}(h(x)) > \operatorname{arcctg}(g(x)) \Leftrightarrow h(x) < g(x).$$

Пример 84. *Решить неравенство*

$$x^5 + 1 < 0.$$

Решение. Запишем данное неравенство в следующем виде $x^5 < (-1)^5$. Функция $y = t^5$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, поэтому последнее неравенство равносильно неравенству $x < -1$.

Ответ: $(-\infty; -1)$.

Пример 85. *Решить неравенство*

$$\sqrt[3]{4 - \sqrt{-x-4}} > \sqrt[3]{-x-3}.$$

Решение. По свойству строго возрастающей функции $y = \sqrt[3]{t}$ на $\mathbb{R}$ имеем

$$4 - \sqrt{-x-4} > -x - 3;$$
$$\sqrt{-x-4} - x - 7 < 0.$$

Используем метод интервалов.

1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sqrt{-x-4} - x - 7.$$

2. Найдем область определения функции $f(x)$. Для этого решим неравенство $-x - 4 \ge 0$, $x \le -4$. Отсюда $D(f) = (-\infty; -4]$.

3. Находим нули функции $f(x)$.

$$\sqrt{-x-4} - x - 7 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x-4} = x + 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x-4=(x+7)^2, \\ x+7\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-15\pm\sqrt{13}}{2}, \\ x\ge -7 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{13}-15}{2}.$$

4. На каждом из промежутков $\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{13}-15}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{13}-15}{2};-4\right]$ функция $f(x)$ непрерывна и сохраняет постоянный знак.

Так как $f(-7)>0$, $f(-4)<0$, то получаем, что $f(x)<0$ при всех значениях $x\in\left(\dfrac{\sqrt{13}-15}{2};-4\right]$.

Ответ: $\left(\dfrac{\sqrt{13}-15}{2};-4\right]$.

Пример 86. *Решить неравенство*

$$2^{\frac{x+3}{x-3}}\ge\frac{1}{16}.$$

Решение. Запишем данное неравенство в виде $2^{\frac{x+3}{x-3}}\ge 2^{-4}$ и по свойству строго возрастающей функции $y=2^t$ получим равносильное неравенство $\dfrac{x+3}{x-3}\ge -4.$ После преобразований неравенство $\dfrac{5x-9}{x-3}\ge 0$ решаем методом интервалов и находим решения $\left(-\infty;\dfrac{9}{5}\right]\cup(3;+\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{9}{5}\right]\cup(3;+\infty)$.

В некоторых неравенствах необходимо выполнить ряд преобразований, чтобы получить неравенства рассматриваемого вида.

Пример 87. *Решить неравенство*

$$4\cdot 3^{x+2}-2\cdot 5^{x+2}\le 5^{x+3}-3^{x+3}.$$

Решение. Приведем данное неравенство к следующему виду

$$4\cdot 3^{x+2}+3^{x+3}\le 5^{x+3}+2\cdot 5^{x+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{x+2}(4+3)\le 5^{x+2}(5+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{x+2}\le 5^{x+2}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2}\le 1\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2}\le\left(\frac{3}{5}\right)^{0}.$$

Учитывая свойство строго убывающей функции $y=\left(\dfrac{3}{5}\right)^t$, получаем $x+2\ge 0$ и $x\ge -2$.

Ответ: $[-2;+\infty)$.

Пример 88. *Решить неравенство*

$$\operatorname{arctg}(x^2-2x)<\operatorname{arctg}(x^2+x-1).$$

Решение. Так как функция $y=\operatorname{arctg}t$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, то данное неравенство можно заменить равносильным $x^2-2x<x^2+x-1$. Отсюда получаем решения $x>\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Пример 89. *Решить неравенство*

$$\operatorname{arcctg}(2x^2-2x+3)\le\operatorname{arcctg}(x^2+2x).$$

Решение. Так как функция $y=\operatorname{arcctg}t$ строго убывает на $\mathbb{R}$, то данное неравенство равносильно неравенству $2x^2-2x+3\ge x^2+2x$. Отсюда находим решения $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.

Пример 90. *Решить неравенство*

$$(2x^2+1)^5-(3x)^5>3x-2x^2-1.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в виде

$$(2x^2+1)^5+2x^2+1>(3x)^5+3x. \qquad (*)$$

Рассмотрим функцию $f(t)=t^5+t$, определенную при всех действительных значениях t.

Тогда неравенство (*) примет вид

$$f(2x^2+1)>f(3x).$$

Так как $f'(t)=5t^4+1>0$ для любого $t\in\mathbb{R}$, то функция $f(t)$ строго возрастает на $\mathbb{R}$. Для возрастающей функции, определенной на всей числовой прямой, неравенство $f(t_1)>f(t_2)$ равносильно неравенству $t_1>t_2$.

Следовательно, неравенство (*) равносильно неравенству $2x^2+1>3x$, решением которого являются $x<0{,}5$ или $x>1$.

Ответ: $(-\infty;\,0,5)\cup(1;+\infty)$.

Пример 91. (МИЭТ, 2005). *Решить неравенство*

$$(1-|x|)\cdot\sqrt{1+3x^2}\le x\cdot\sqrt{4+3x^2-6x}\,.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(t)=(1-t)\sqrt{1+3t^2}\,,$$

определенную на всей числовой прямой.

Поскольку $4+3x^2-6x=1+3(1-x)^2$, $x=1-(1-x)$, то данное неравенство примет вид

$$f(|x|)\le f(1-x)\,.$$

Выясним характер монотонности функции $f(t)$. Для этого найдем ее производную:

$$f'(t)=-1\cdot\sqrt{1+3t^2}+(1-t)\cdot\frac{6t}{2\sqrt{1+3t^2}}=$$

$$=-\sqrt{1+3t^2}-\frac{3t(t-1)}{\sqrt{1+3t^2}}=\frac{-6t^2+3t-1}{\sqrt{1+3t^2}}\,.$$

Заметим, что многочлен $-6t^2+3t-1$ не имеет корней и его старший коэффициент меньше нуля. Значит $-6t^2+3t-1<0$ при всех t и соответственно $f'(t)<0$ на $\mathbb{R}$. Это означает, что функции $f(t)$ – убывающая. Для убывающей функции, определенной на всей числовой прямой, неравенство $f(t_1)\le f(t_2)$ равносильно неравенству $t_1\ge t_2$. Следовательно,

$$f(|x|)\le f(1-x)\quad\Leftrightarrow\quad |x|\ge 1-x\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x\ge 1-x,\\ x\le x-1\end{array}\right.\quad\Leftrightarrow\quad x\ge\frac{1}{2}\,.$$

Ответ: $x\ge 0{,}5$.

Монотонность функции на промежутке

Если функция $f(t)$ определена и является возрастающей на своей области определения – промежутке M, то

$$f\left(h(x)\right)>f\left(g(x)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}h(x)>g(x),\\ E(h)\subset M,\\ E(g)\subset M,\end{cases}$$

где $E(h)$ и $E(g)$ – множество значений функций $h(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Если функция $f(t)$ строго убывает на своей области определения – промежутке M, то

$$f\left(h(x)\right)>f\left(g(x)\right)\Leftrightarrow\begin{cases}h(x)<g(x),\\ E(h)\subset M,\\ E(g)\subset M,\end{cases}$$

где $E(h)$ и $E(g)$ – множество значений функций $h(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Следствие 1. Так как функция $f(t)=\sqrt[2n]{t}$, где $n\in\mathbb{N}$, возрастает на промежутке $[0;+\infty)$, то равносильны следующие неравенства:

$$\sqrt[2n]{h(x)}>\sqrt[2n]{g(x)}\quad\Leftrightarrow\quad h(x)>g(x)\ge 0\,,$$

где $n\in\mathbb{N}$.

Следствие 2. Так как функция $f(t)=\log_a t$ при $0<a<1$ убывает, а при $a>1$ возрастает на промежутке $(0;+\infty)$, то равносильны следующие неравенства:

$$\log_a\left(h(x)\right)>\log_a\left(g(x)\right)\quad\Leftrightarrow\quad 0<h(x)<g(x)$$

при $0<a<1$;

$$\log_a\left(h(x)\right)>\log_a\left(g(x)\right)\quad\Leftrightarrow\quad 0<g(x)<h(x)$$

при $a>1$.

Следствие 3. Так как функция $f(t)=\arcsin t$ возрастает на промежутке $[-1;1]$, то равносильны следующие неравенства:

$$\arcsin\left(h(x)\right)>\arcsin\left(g(x)\right)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad -1\le g(x)<h(x)\le 1\,.$$

Следствие 4. Так как функция $f(t)=\arccos t$ убывает на промежутке $[-1;1]$, то равносильны следующие неравенства:

$$\arccos(h(x))>\arccos(g(x)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -1\le h(x)<g(x)\le 1.$$

Пример 92. *Решить неравенство*

$$\sqrt[4]{x^2-11x+31}>\sqrt[4]{x-4}.$$

Решение. В силу строгого возрастания функции $y=\sqrt[4]{t}$ на множестве $[0;+\infty)$ данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-11x+31>x-4, \\ x-4\ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12x+35>0, \\ x\ge 4. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\le x<5, \\ x>7. \end{array}\right.$$

Ответ: $[4;5)\cup(7;+\infty)$.

Пример 93. *Решить неравенство*

$$\log_3\left(x^3+x^2-4x+2\right)\ge\log_3\left(x^3-1\right).$$

Решение. Так как функция $y=\log_3 t$ строго возрастает на множестве $t>0$, то данное неравенство можно заменить равносильной системой

$$\begin{cases} x^3+x^2-4x+2\ge x^3-1, \\ x^3-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3\ge 0, \\ x^3>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 3, \end{array}\right. \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 3.$$

Ответ: $[3;+\infty)$.

Пример 94. *Решить неравенство*

$$\log_{0,5}(x^2+x-6)\ge\log_{0,5}(x+4).$$

Решение. Так как основание 0,5 логарифмов, стоящих в обеих частях неравенства, удовлетворяют условию $0<0,5<1$, то, получаем, что данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+x-6\le x+4, \\ x^2+x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10})\le 0, \\ (x-2)(x+3)>0. \end{cases}$$

На рис. 19 представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.

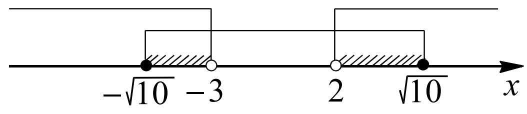


Рис. 19

Ответ: $[-\sqrt{10};-3)\cup(2;\sqrt{10}]$.

Обратим внимание на правильное использование формул при выполнении равносильных преобразований выражений, входящих в неравенство.

Рассмотрим следующие формулы:

$$\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\log_a f(x)+\log_a g(x) \quad (1)$$

и

$$\log_a\frac{f(x)}{g(x)}=\log_a f(x)-\log_a g(x), \qquad (2)$$

где $a>0, a\ne 1$, $f(x)>0$ и $g(x)>0$.

Заметим, что равенства (1) и (2) в общем случае не являются тождествами, поскольку области определения левой и правой частей равенства могут не совпадать. Так в левой части равенства (1) и (2) выражение будет определено при таких значениях x, когда и $f(x)<0$ и $g(x)<0$. Правая часть при таких значениях x не имеет смысла.

Формулы (1) и (2) используются при решении неравенств как для преобразования логарифма произведения (частного) в сумму (разность) логарифмов соответственно, так и в обратную сторону.

В общем случае замена выражения $\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right)$ на выражение $\log_a f(x)+\log_a g(x)$ или $\log_a\frac{f(x)}{g(x)}$ на $\log_a f(x)-\log_a g(x)$ может привести к потере решений неравенств. Если в неравенствах даны выражения $\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right)$ или $\log_a\frac{f(x)}{g(x)}$ и есть желание преобразовать их в сумму или разность логарифмов, то равносильный переход от одного выражения к другому выглядит так

$$\log_a\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\log_a|f(x)|+\log_a|g(x)|$$

и

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a |f(x)| - \log_a |g(x)|.$$

В общем случае переход справа налево в формулах (1) и (2) может привести к приобретению посторонних решений неравенств. Однако эти посторонние решения могут быть исключены, как не входящие в область определения переменной исходных выражений неравенства.

Пример 95 (ЕГЭ 2011). *Решить неравенство*

$$11\log_9(x^2-12x+27) \le 12 + \log_9 \frac{(x-9)^{11}}{x-3}.$$

Решение. Значения x, при которых определены обе части неравенства, задаются условиями $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-9)>0, \\ \dfrac{(x-9)^{11}}{x-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-12x+27>0, \\ \dfrac{(x-9)^{11}}{x-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<3, \\ x>9. \end{array}\right.$$

Область определения данного неравенства – есть множество $(-\infty;\,3)\cup(9;\,+\infty)$. Для таких значений x исходное неравенство приводится к виду:

$$\log_9|(x-3)^{11}| + \log_9|(x-9)^{11}| \le$$
$$\le 12 + \log_9|(x-9)^{11}| - \log_9|x-3| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_9|(x-3)^{11}| + \log_9|x-3| \le 12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_9(x-3)^{12} \le 12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^{12} \le 9^{12} \Leftrightarrow |x-3| \le 9 \Leftrightarrow -6 \le x \le 12.$$

Учитывая, что значения $x \in (-\infty;\,3)\cup$ $\cup(9;\,+\infty)$, получим ответ $[-6;\,3)\cup(9;\,12]$.

Ответ: $[-6;\,3)\cup(9;\,12]$.

Пример 96. *Решить неравенство*

$$(0,5)^{\log_3 \log_{1/5}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)} > 1.$$

Решение. Так как функция $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t$ убывающая и $1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$, то получаем

$$(0,5)^{\log_3 \log_{1/5}\left(x^2-\frac{4}{5}\right)} > 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\frac{4}{5}\right) < 0.$$

Функция $y=\log_3 t$ возрастает на множестве $(0;+\infty)$. С учетом того, что $0=\log_3 1$, последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)<1, \\ \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)<\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{1}{5}, \\ \log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-\dfrac{4}{5}\right)>\log_{\frac{1}{5}}1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\dfrac{4}{5}>\dfrac{1}{5}, \\ x^2-\dfrac{4}{5}>0, \\ x^2-\dfrac{4}{5}<1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2>1, \\ x^2<\dfrac{9}{5}. \end{cases}$$

Далее, $x^2>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>1. \end{array}\right.$ и $x^2<\dfrac{9}{5} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\dfrac{3}{\sqrt5}<x<\dfrac{3}{\sqrt5}$. Учитывая, что $\sqrt5<3$ и, значит, $\dfrac{3}{\sqrt5}>1$, а $-\dfrac{3}{\sqrt5}<-1$, запишем решение исходного неравенства $\left(-\dfrac{3}{\sqrt5};-1\right)\cup\left(1;\dfrac{3}{\sqrt5}\right)$.

Ответ: $\left(-\dfrac{3}{\sqrt5};-1\right)\cup\left(1;\dfrac{3}{\sqrt5}\right)$.

Пример 97. *Решить неравенство*

$$7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} \ge 2\sqrt[4]{7}.$$

Решение. Заметим, что выражения, входящие в неравенство, определены при всех $x>0$, и для любого $x>0$ справедливо тождество $x=7^{\log_7 x}$.

Следовательно, неравенство можем записать в следующем виде.

$$7^{\log_7^2 x} + (7^{\log_7 x})^{\log_7 x} \ge 2\sqrt[4]{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cdot 7^{\log_7^2 x} \ge 2\sqrt[4]{7} \quad \Leftrightarrow \quad 7^{\log_7^2 x} \ge 7^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_7^2 x \ge \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad |\log_7 x| \ge \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_7 x \ge \frac{1}{2}, \\ \log_7 x \le -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \sqrt{7}, \\ 0 < x \le \frac{1}{\sqrt{7}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{\sqrt{7}}\right] \cup [\sqrt{7}; +\infty)$.

Пример 98. *Решить неравенство*

$$\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2} < 100.$$

Решение. Область определения данного неравенства: $x > 0$. Так как обе части исходного неравенства положительны, то по свойству строго возрастающей функции $y = \lg t$ на множестве $(0; +\infty)$ имеем равносильное неравенство

$$\lg\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2} < \lg 100;\ (\lg x - 2)(\lg x - 1) < 2.$$

Пусть $\lg x = a$, тогда из неравенства $(a-2)(a-1) < 2$ или $a^2 - 3a < 0$ находим решения $0 < a < 3$.

Возвращаемся к первоначальной переменной: $0 < \lg x < 3$; $\lg 1 < \lg x < \lg 1000$; $1 < x < 1000$.

Ответ: (1;1000).

Пример 99. *Решить неравенство*

$$\arcsin(3x^2 - 2x) \le \arcsin(3x + 2).$$

Решение. Функция $y = \arcsin t$ определена при $-1 \le t \le 1$ и возрастает на всей области определения. Используя свойства этой функции, перейдем к равносильной системе

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2 - 2x \le 3x + 2, \\ -1 \le 3x^2 - 2x, \\ 3x + 2 \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x^2 - 5x - 2 \le 0, \\ 3x^2 - 2x + 1 \ge 0, \\ x \le -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{3} \le x \le 2, \\ x \le -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

Пример 100. *Решить неравенство*

$$\arccos\frac{x-1}{2} < \arccos\left(x^2 - 4x + 3\right).$$

Решение. Функция $y = \arccos t$ определена при $-1 \le t \le 1$ и убывает на всей области определения. Поэтому данное неравенство равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x-1}{2} > x^2 - 4x + 3, \\ \frac{x-1}{2} \le 1, \\ x^2 - 4x + 3 \ge -1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2 - 9x + 7 < 0, \\ x \le 3, \\ (x-2)^2 \ge 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < x \le 3.$$

Ответ: $(1;3]$.

Пример 101. *Решить неравенство*

$$\log_{84-2x-2x^2}(\cos x) \le \log_{x+19}(\cos x).$$

Решение. Из условий

$$\left\{\begin{array}{l} 84 - 2x - 2x^2 > 0, \\ 84 - 2x - 2x^2 \ne 1, \\ x + 19 > 0, \\ x + 19 \ne 1, \\ 0 < \cos x \le 1 \end{array}\right.$$

получаем

$$x \in \left(-7; -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 6\right), \qquad (*)$$

$$x \ne \frac{-1 \pm \sqrt{167}}{2}.$$

Так как по условию $0 < \cos x \le 1$, то рассмотрим два случая.

1. Пусть $\cos x = 1$, тогда из множества чисел $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, с учетом $(*)$ решениями данного в условии неравенства являются два числа -2π и 0.

2. Для случая $0 < \cos x < 1$ исследуем функцию $y = \log_t a$, где $t > 0, t \ne 1$ и число $0 < a < 1$. Так как

$$y' = (\log_t a)' = \left(\frac{\ln a}{\ln t}\right)' = -\frac{\ln a}{t \ln^2 t} > 0,$$

то функция $y=\log_t a$ возрастает на каждом из промежутков $(0;1)$ и $(1;+\infty)$.

а) Для функции $y=\log_t a$, возрастающей на промежутке $(0;1)$, получаем

$$\begin{cases}0<84-2x-2x^2<1,\\0<x+19<1,\\84-2x-2x^2\le x+19\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-7<x<6,\\84-2x-2x^2<1,\\-19<x<-18,\\84-2x-2x^2\le x+19.\end{cases}$$

Нет решений.

б) Для функции $y=\log_t a$, возрастающей на промежутке $(1;+\infty)$, получаем

$$\begin{cases}84-2x-2x^2>1,\\x+19>1,\\84-2x-2x^2\le x+19\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+2x-83<0,\\x>-18,\\2x^2+3x-65\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-1-\sqrt{167}}{2}<x<\dfrac{-1+\sqrt{167}}{2},\\x>-18,\\\left[\begin{array}{l}x\le -6{,}5,\\x\ge 5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{-1-\sqrt{167}}{2}<x\le-\dfrac{13}{2},\\5\le x<\dfrac{-1+\sqrt{167}}{2}.\end{array}\right.$$

Полученные решения удовлетворяют условию (*).

Ответ: $\left(\dfrac{-1-\sqrt{167}}{2};-\dfrac{13}{2}\right]\cup\{-2\pi;0\}\cup\left[5;\dfrac{-1+\sqrt{167}}{2}\right)$.

Функции разной монотонности

Пусть на промежутке $(a;b)$ заданы возрастающая функция $f(x)$ и убывающая функция $g(x)$, причем x_0 – корень уравнения $f(x)=g(x)$, принадлежащий промежутку $(a;b)$. Тогда решение неравенства $f(x)>g(x)$ – все числа из промежутка $(x_0;b)$, а решение неравенства $f(x)<g(x)$ – промежуток $(a;x_0)$ (см. рис. 20).

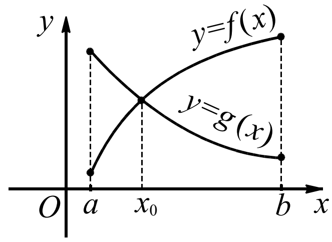


Рис. 20

Пусть на промежутке $(a;b)$ задана возрастающая функция $f(x)$ и x_0 – корень уравнения $f(x)=c$, принадлежащий промежутку $(a;b)$. Тогда решение неравенства $f(x)>c$ – все числа из промежутка $(x_0;b)$, а решение неравенства $f(x)<c$ – промежуток $(a;x_0)$ (см. рис. 21).

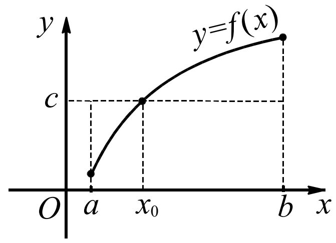


Рис. 21

Пример 102. *Решить неравенства*:

а) $2x^5+x^3+5x-80>\sqrt[3]{14-3x}$.

б) $2x^5+x^3+5x-80<\sqrt[3]{14-3x}$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x)=2x^5+x^3+5x-80$ и $g(x)=\sqrt[3]{14-3x}$. Функция $f(x)$ определена и дифференцируема на $\mathbb{R}$. Исследуем ее на монотонность:

$$f'(x)=10x^4+3x^2+5>0,$$

как сумма неотрицательных слагаемых и положительного слагаемого. Поэтому функция $f(x)$ строго возрастает на $\mathbb{R}$.

Функция $g(x)$ определена на $\mathbb{R}$ и дифференцируема на множестве $\left(-\infty;\frac{14}{3}\right)\cup\left(\frac{14}{3};+\infty\right)$, причем

$$g'(x)=\frac{-1}{\sqrt[3]{(14-3x)^2}}<0.$$

Значит, функция $g(x)$ убывает на $\mathbb{R}$.

Поскольку функция $f(x)$ строго возрастает, а функция $g(x)$ убывает на $\mathbb{R}$, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не больше одного корня. Подбором находим, что $x=2$ является корнем этого уравнения, так как получаем верное равенство

$$2\cdot 2^5+2^3+5\cdot 2-80=\sqrt[3]{14-3\cdot 2}.$$

Значит, решения неравенства а) есть промежуток $(2;+\infty)$, а неравенства б) – промежуток $(-\infty;2)$.

Ответ: **а)** $(2;+\infty)$; **б)** $(-\infty;2)$.

Пример 103. *Решить неравенство*

$$\sqrt[6]{x}+2x^3+\log_3(x+2)-\sqrt{1-x}<4.$$

Решение. Область определения данного неравенства есть промежуток $[0;1]$. Функция

$$y=\sqrt[6]{x}+2x^3+\log_3(x+2)-\sqrt{1-x}$$

возрастает на этом промежутке как сумма возрастающих функций. Так как $f(1)=4$, то все значения x из множества $[0;1)$ удовлетворяют исходному неравенству.

Ответ: $[0;1)$.

Рационализация неравенств

При решении неравенств методом интервалов вычисление значений функций в промежуточных точках может вызвать трудности вычислительного характера. С другой стороны, применение свойства знакочередования рациональной функции сводит вычисления до минимума.

Чтобы расширить возможности применения метода интервалов при решении неравенств, используем идею *рационализации неравенств* (см. [2]), известную в математической литературе под другими названиями (*метод декомпозиции* – Моденов В.П., *метод замены множителей* – Голубев В.И.).

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$ (в конечном счете, рациональное), при которой неравенство $G(x)>0$ ($G(x)<0$) равносильно неравенству $F(x)>0$ ($F(x)<0$)в области определения выражения $F(x)$. В этом случае будем говорить, что выражение $G(x)$ является *рационализацией* (или *рационализирующим выражением*) для выражения $F(x)$.

Идея метода рационализации состоит в использовании свойств монотонной функции.

Сначала напомним теорему о корне монотонной функции.

Теорема. Если $p(x)$ – функция, монотонная на промежутке M, и $E(p)$ – множество ее значений на этом промежутке, то для любого числа $c\in E(p)$ существует и притом единственный корень $x_0\in M$ уравнения $p(x)=c$.

Следствие 1. Если $p(x)$ – возрастающая функция на промежутке M, то для любых чисел $x_1,x_2\in M$ неравенства $p(x_1)\ge p(x_2)$ и $x_1\ge x_2$ равносильны, или $p(x_1)-p(x_2)\ge 0\Leftrightarrow x_1-x_2\ge 0$ (аналогично $p(x_1)-p(x_2)>0\Leftrightarrow x_1-x_2>0$).

Следствие 2. Если $p(x)$ – убывающая функция на промежутке M, то для любых чисел $x_1,x_2\in M$ неравенства $p(x_1)\ge p(x_2)$ и $x_1\le x_2$ равносильны, или $p(x_1)-p(x_2)\ge 0\Leftrightarrow x_1-x_2\le 0$ (аналогично $p(x_1)-p(x_2)>0\Leftrightarrow x_1-x_2<0$).

Отметим, что функции $p(t)=\log_a t$ и $p(t)=a^t$ являются монотонными на всей своей области определения, причем при $a>1$ они являются возрастающими, а при $0<a<1$ – убывающими.

Рассмотрим знаки выражений $F(x)=$

$= \log_a f(x) - \log_a g(x)$, $f(x) - g(x)$ и $G(x) = (a-1)(f(x) - g(x))$ в зависимости от a на области определения $F(x)$, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} a > 0, \\ a \neq 1, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Табл. 1.

a	$F(x)$	$f(x)-g(x)$	$G(x)$
$a>1$	+	+	+
$a>1$	–	–	–
$0<a<1$	+	–	+
$0<a<1$	–	+	–

Из таблицы следует, что выражения $F(x)$ и $G(x)$ при всех допустимых значениях x имеют одинаковые знаки.

Полученный результат запишем в виде теоремы.

Теорема 1. При $a > 0$ и $a \neq 1$ знаки выражений

$\log_a f(x) - \log_a g(x)$ и $(a-1)\big(f(x) - g(x)\big)$

совпадают для всех значений x таких, что $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

Поскольку при $a > 0$ и $a \neq 1$ и всех допустимых значениях x справедливы равенства:

$$\log_a f(x) - b = \log_a f(x) - \log_a a^b,$$

$$\log_a f(x) = \log_a f(x) - 0 = \log_a f(x) - \log_a 1,$$

то получаем следующие следствия из теоремы 1.

Следствие 1. При $a > 0$ и $a \neq 1$ знаки выражений

$$\log_a f(x) - b \text{ и } (a-1)\big(f(x) - a^b\big)$$

совпадают для всех значений x таких, что $f(x) > 0$.

Следствие 2. При $a > 0$ и $a \neq 1$ знаки выражений

$$\log_a f(x) \text{ и } (a-1)(f(x) - 1)$$

совпадают для всех значений x таких, что $f(x) > 0$.

Замечание. Для выражения $\log_a f(x) + \log_a g(x)$ или $\log_a \big(f(x)g(x)\big)$ рационализацией является выражение $(a-1)\big(f(x)g(x) - 1\big)$ при условиях (*).

Метод рационализации используют при решении неравенств вида $F(x) \vee 0$, где символ $\vee$ означает один из знаков неравенств $\geq, >, \leq, <$, в которых выражение $F(x)$ удается рационализировать, либо выражение

$$F(x) = \frac{f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k}{g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_l}, \ k, l \in \mathbb{N} \qquad (**)$$

записано в виде произведения или частного выражений, каждое из которых можно рационализировать.

Например, при соответствующих ограничениях на переменную x:

- неравенство $\big(\log_a f(x)\big) \cdot \big(\log_b g(x)\big) > 0$ равносильно неравенству
$$(a-1)\big(f(x) - 1\big)(b-1)\big(g(x) - 1\big) > 0;$$
- неравенство $\dfrac{\log_a f(x) - \log_a g(x)}{\log_b h(x)} \leq 0$ равносильно неравенству
$$\frac{(a-1)\big(f(x) - g(x)\big)}{(b-1)\big(h(x) - 1\big)} \leq 0.$$

Комментарий. Стандартные ошибки, которые допускают учащиеся при использовании метода рационализации, заключаются в следующем:

а) проводят рационализацию без учета области определения данного неравенства;

б) применяют метод рационализации к неравенствам, не приведенным к стандартному виду $F(x) \vee 0$;

в) формально применяют метод рационализации к выражениям вида $\log_a f(x) + \log_a g(x)$, заменяя на выражение $f(x) + g(x)$ (см. выше замечание);

г) подменяют формулировку «о совпадении **знаков** выражений для каждого допустимого значения x» на неверную формулировку «о совпадении **значений** выражений для каждого допустимого значения x».

Пример 104. (ЕГЭ 2011). *Решить неравенство* $\dfrac{2\log_6(x^2+5x)}{\log_6 x^2}\le 1$.

Решение. Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} x^2+5x>0, \\ x^2\ne 0, \\ x^2\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+5)>0, \\ x\ne 0, \\ x\ne \pm 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что данное неравенство определено при всех значениях $x\in(-\infty;-5)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$ и

$$\frac{2\log_6(x^2+5x)}{\log_6 x^2}\le 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_6(x^2+5x)^2-\log_6 x^2}{\log_6 x^2}\le 0.$$

Используем теорему 1 и ее следствие 2 для последнего неравенства

$$\frac{(x^2+5x)^2-x^2}{x^2-1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x+6)(x+4)}{(x-1)(x+1)}\le 0.$$

Находим решения последнего неравенства $[-6;-4]\cup(-1;1)$. Учитывая ОДЗ переменной исходного неравенства, получаем окончательно $[-6;-5)\cup(0;1)$.

Ответ: $[-6;-5)\cup(0;1)$.

Пример 105. *Решить неравенство*

$$\frac{9}{\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9}x}\ge \frac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9}x}.$$

Решение. Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x>0, \\ x\ne 1, \\ x\ne 10, \\ (x-10)^2\ne 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x>1, \\ x\ne 10, \\ x\ne 11, \\ x\ne 9. \end{cases}$$

Учитывая, что при $x>1$ выражение $\log_{1,9}x$ положительно, преобразуем данное неравенство на его области определения

$$\frac{81-(x-1)^{\log_3(x-1)}}{\log_{2,1}(x-10)^2}\ge 0.$$

Далее используем метод рационализации

$$\frac{\log_3 81-\log_3(x-1)^{\log_3(x-1)}}{(2{,}1-1)\left((x-10)^2-1\right)}\ge 0;$$

$$\frac{4-\log_3^2(x-1)}{(x-9)(x-11)}\ge 0;$$

$$\frac{\left(\log_3 9-\log_3(x-1)\right)\left(\log_3 9-\log_3(x-1)^{-1}\right)}{(x-9)(x-11)}\ge 0;$$

$$\frac{(9-x+1)\left(9-\dfrac{1}{x-1}\right)}{(x-9)(x-11)}\ge 0;$$

$$\frac{(x-10)(9x-10)}{(x-9)(x-11)(x-1)}\le 0.$$

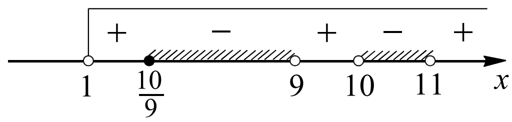


Рис. 22

Ответ: $\left[\dfrac{10}{9};9\right)\cup(10;11)$.

Рассмотрим следующее неравенство.

Пример 106. *Решить неравенство*

$$\log_{x+\frac{2}{9}}3\le \log_{\sqrt{x}}3.$$

Решение. Проводя равносильные преобразования, получаем:

$$\log_{x+\frac{2}{9}}3\le \log_{\sqrt{x}}3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_3\left(x+\dfrac{2}{9}\right)}\le \frac{1}{\log_3\sqrt{x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3\sqrt{x}-\log_3\left(x+\dfrac{2}{9}\right)}{\log_3\left(x+\dfrac{2}{9}\right)\cdot\log_3\sqrt{x}}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}-\left(x+\dfrac{2}{9}\right)\right)\left(\left(x+\dfrac{2}{9}\right)-1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\le 0 \\ x+\dfrac{2}{9}>0, \\ x+\dfrac{2}{9}\ne 1, \\ \sqrt{x}>0, \\ \sqrt{x}\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(-x+\sqrt{x}-\frac{2}{9}\right)\left(x-\frac{7}{9}\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\le 0, \\ x\ne \frac{7}{9}, \\ x>0, \\ x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x}-\frac{1}{3}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{7}{9}\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\ge 0, \\ x\ne \frac{7}{9}, \\ x>0, \\ x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in \left(0;\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)\cup(1;+\infty).$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)\cup(1;+\infty)$.

Рассмотрим теперь неравенства, содержащие логарифмы с переменным основанием и выражения под знаком логарифма, содержащие функции, зависящие от x.

Теорема 2. Знаки выражений

$$\log_{h(x)} f(x)-\log_{h(x)} g(x) \text{ и }$$
$$(h(x)-1)(f(x)-g(x))$$

совпадают для всех значений x таких, что $h(x)>0$, $h(x)\ne 1$, $f(x)>0$, $g(x)>0$.

Доказательство. Перейдем к логарифмам с некоторым постоянным основанием $a>0$ и $a\ne 1$:

$$\log_h f-\log_h g=\frac{\log_a f}{\log_a h}-\frac{\log_a g}{\log_a h}=$$
$$=\frac{\log_a f-\log_a g}{\log_a h}.$$

По теореме 1 знак последнего выражения при соответствующих ограничениях на переменную совпадает со знаком выражения $\frac{(a-1)(f-g)}{(a-1)(h-1)}$ или $(h-1)(f-g)$.

Следствие 1. Знаки выражений $\log_{h(x)} f(x)-b$ и $(h(x)-1)\left(f(x)-(h(x))^b\right)$ совпадают для всех значений x таких, что $h(x)>0$, $h(x)\ne 1$, $f(x)>0$.

Следствие 2. Знаки выражений

$$\log_{h(x)} f(x) \text{ и } (h(x)-1)(f(x)-1)$$

совпадают для всех значений x таких, что $h(x)>0$, $h(x)\ne 1$, $f(x)>0$.

Пример 107. *Решить неравенство*

$$\log_{2x+3} x^2<1.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{2x+3} x^2-1<0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (2x+3-1)(x^2-2x-3)<0, \\ 2x+3>0, \\ 2x+3\ne 1 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+2)(x^2-2x-3)<0, \\ 2x+3>0, \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+1)(x-3)<0, \\ x>-1,5, \\ x\ne 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in(-1,5;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3).$$

Ответ: $(-1,5;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)$.

Пример 108. *Решить неравенство*

$$3\log_{(3,5+x)^2}(x^2+14x+45)\le$$
$$\le 4\log_{-3,5-x}(x^2+14x+45).$$

Решение. Учитывая, что $-3,5-x>0$, получаем

$$\frac{3}{2}\log_{-3,5-x}(x^2+14x+45)\le$$
$$\le 4\log_{-3,5-x}(x^2+14x+45) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5\log_{-3,5-x}(x^2+14x+45)\ge 0.$$

Далее имеем

$$\begin{cases} (-3,5-x-1)(x^2+14x+45-1)\ge 0, \\ x^2+14x+45>0, \\ -3,5-x>0, \\ -3,5-x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4{,}5)\left(x-(-7-\sqrt{5})\right)\left(x-(-7+\sqrt{5})\right)\le 0,\\ (x+9)(x+5)>0,\\ x<-3{,}5,\\ x\ne -4{,}5. \end{cases}$$

Для выяснения взаимного расположения точек на числовой прямой, сравним числа: $-7-\sqrt{5}\vee -9$, $-7+\sqrt{5}\vee -5$ и $-7+\sqrt{5}\vee -4{,}5$.

Получаем $-7-\sqrt{5}<-9$, так как $2<\sqrt{5}$, $\sqrt{4}<\sqrt{5}$ (верно);

$-7+\sqrt{5}>-5$, так как $\sqrt{5}>2$ (верно)

$-7+\sqrt{5}<-4{,}5$, так как $\sqrt{5}<2{,}5$,

$\sqrt{5}<\sqrt{6{,}25}$ (верно).

На рис. 23 на числовой оси показано решение первого неравенства системы.

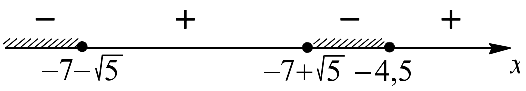


Рис. 23

На рис. 24 на числовой оси показано решение всей системы.

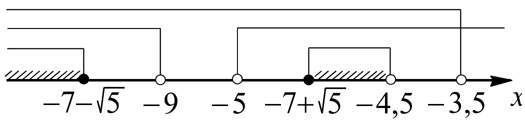


Рис. 24

Ответ: $(-\infty;-7-\sqrt{5}]\cup[-7+\sqrt{5};-4{,}5)$.

Теорема 3. Знаки выражений

$$\log_{f(x)}h(x)-\log_{g(x)}h(x)$$

и

$$\big(f(x)-1\big)\big(g(x)-1\big)\big(g(x)-f(x)\big)\big(h(x)-1\big)$$

совпадают для всех значений x таких, что $f(x)>0$, $f(x)\ne 1$, $g(x)>0$, $g(x)\ne 1$, $h(x)>0$.

Доказательство. Так как

$$\log_f h-\log_g h=\frac{1}{\log_h f}-\frac{1}{\log_h g}=$$

$$=\frac{\log_h g-\log_h f}{\log_h f\cdot\log_h g}=$$

$$=\log_h f\cdot\log_h g\cdot(\log_h g-\log_h f),$$

то, используя теорему 2 и следствие 2 из нее, получаем, что знак последнего выражения при соответствующих ограничениях на переменную совпадает со знаком выражения

$$(h-1)(g-1)(f-1)(g-f).$$

Пример 109. *Решить неравенство*

$$\log_x(x-1)<\log_{x+1}(x-1).$$

Решение. Данное неравенство приведем к следующему виду

$$\log_x(x-1)-\log_{x+1}(x-1)<0.$$

Последнее неравенство, а значит и исходное неравенство, равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x-1)(x+1-1)\times\\ \qquad\times(x+1-x)(x-1-1)<0,\\ x>0,\ x\ne 1,\\ x-1>0,\\ x+1>0,\ x+1\ne 1. \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x(x-1)(x-2)<0,\\ x>1 \end{cases}\Leftrightarrow 1<x<2.$$

Ответ: $(1;2)$.

Пример 110. *Решить неравенство*

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)\ge\log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)-\log_{2x^2-5x+3}(3-x)\ge 0$$

и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)(2-x)\times\\ \qquad\times(-10x^2+36x-32)\ge 0,\\ 12x^2-41x+35>0,\\ 2x^2-5x+3>0,\\ 12x^2-41x+34\ne 0,\\ 2x^2-5x+2\ne 0,\\ 3-x>0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^4\left(x-\dfrac{8}{5}\right)\left(x-\dfrac{17}{12}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\ge 0,\\ \left(x-\dfrac{5}{3}\right)\left(x-\dfrac{7}{4}\right)>0,\\ (x-1)(x-1,5)>0,\\ \left(x-\dfrac{17}{12}\right)(x-2)\ne 0,\\ (x-2)(x-0,5)\ne 0,\\ x<3.\end{cases}$$

Для решения первых трех неравенств системы используем метод интервалов.

Самостоятельно рассмотрите рисунки и выберите общую часть для решения системы.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};1\right)\cup\left[\dfrac{8}{5};\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7}{4};2\right)\cup(2;3)$.

Замечание. В данном неравенстве логарифмы можно привести к одному основанию $3-x$, и затем после преобразований применить теорему 2 и ее следствие 2 к неравенству

$$\frac{\log_{3-x}(2x^2-5x+3)-\log_{3-x}(12x^2-41x+35)}{\left(\log_{3-x}(12x^2-41x+35)\right)\left(\log_{3-x}(2x^2-5x+3)\right)}\ge 0.$$

Перейдем к неравенствам, содержащим показательные или показательно-степенные выражения. Основания этих выражений считаем положительными.

Теорема 4. Знаки выражений

$$h(x)^{f(x)}-h(x)^{g(x)} \text{ и } \left(h(x)-1\right)\left(f(x)-g(x)\right)$$

совпадают для всех значений x таких, что $h(x)>0$.

Доказательство. По теореме 1 для возрастающей функции $p(t)=\lg t$ на множестве $(0;+\infty)$ получаем, что знак выражения $h(x)^{f(x)}-h(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком выражения $\lg h(x)^{f(x)}-\lg h(x)^{g(x)}$ или выражения $\left(f(x)-g(x)\right)\lg h(x)$.

Далее, по следствию 2 теоремы 1 знак выражения $\left(f(x)-g(x)\right)\lg h(x)$ совпадает со знаком выражения

$$\left(f(x)-g(x)\right)(10-1)\left(h(x)-1\right)$$

или

$$\left(h(x)-1\right)\left(f(x)-g(x)\right)$$

для всех значений x таких, что $h(x)>0$.

Следствие 1. Знаки выражений

$$h(x)^{f(x)}-1 \text{ и } \left(h(x)-1\right)f(x)$$

совпадают для всех значений x таких, что $h(x)>0$.

Следствие 2. Для числа $a>0$ знаки выражений

$$a^{f(x)}-a^{g(x)} \text{ и } (a-1)\left(f(x)-g(x)\right)$$

совпадают для всех допустимых значений x.

Пример 111. *Решить неравенство*

$$\frac{4^{x^2+3x-2}-(0,5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\le 0.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в следующем виде

$$\frac{2^{2x^2+6x-4}-2^{-(2x^2+2x-1)}}{5^x-5^0}\le 0.$$

Используя теорему 4, получаем равносильное неравенство

$$\frac{(2-1)(2x^2+6x-4+2x^2+2x-1)}{(5-1)(x-0)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{4x^2+8x-5}{x}\le 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, находим решение.

Ответ: $(-\infty;-2,5]\cup(0;0,5]$.

Пример 112. *Решить неравенство*

$$(x^2-1)^{2+x}>(x^2-1)^{5x-3}.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в следующем виде

$$(x^2-1)^{2+x}-(x^2-1)^{5x-3}>0,$$

и используем метод рационализации

$$\begin{cases}(x^2-1-1)(2+x-5x+3)>0,\\ x^2-1>0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(5-4x)>0,\\ (x-1)(x+1)>0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-\sqrt{2},\\ 1,25<x<\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(1,25;\sqrt{2}\right)$.

Теорема 5. Знаки выражений

$$f(x)^{h(x)}-g(x)^{h(x)} \text{ и } \big(f(x)-g(x)\big)h(x)$$

совпадают для всех значений x таких, что $f(x)>0$, $g(x)>0$.

Указание. См. доказательство теоремы 4.

Следствие 1. Знаки выражений

$$\sqrt[2n+1]{f(x)}-\sqrt[2n+1]{g(x)} \text{ и } f(x)-g(x)$$

совпадают для всех допустимых значений x, где $n\in\mathbb{N}$.

Следствие 2. Знаки выражений

$$\sqrt[2n]{f(x)}-\sqrt[2n]{g(x)} \text{ и } f(x)-g(x)$$

совпадают для всех значений x таких, что $f(x)>0$, $g(x)>0$, $n\in\mathbb{N}$.

Пример 113. *Решить неравенство*

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right)\ge 0.$$

Решение. Заменим данное неравенство равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{3}-1\right)\left(\log_x\sqrt{3-x}-1\right)\ge 0,\\ \log_x\sqrt{3-x}>0,\\ 3-x>0,\\ x>0,\\ x\ne 3,\\ x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)(x-1)(\sqrt{3-x}-x)\ge 0,\\ (x-1)\left(\sqrt{3-x}-1\right)>0,\\ x<3,\\ x>0,\\ x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(3-x-x^2)\le 0,\\ (x-1)(3-x-1)>0,\\ x<3,\\ x>0,\\ x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+\dfrac{\sqrt{13}+1}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}\right)\ge 0,\\ 1<x<2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{13}-1}{2}\le x<2.$$

Замечание. При использовании метода рационализации учтено, что согласно теореме 5 знак множителя $\sqrt{3-x}-x$ совпадает со знаком выражения $(3-x)-x^2$, а знак множителя $\sqrt{3-x}-1$ совпадает со знаком выражения $(3-x)-1$ при имеющихся ограничениях на переменную x.

При решении неравенства $(x-1)(x-2)<0$ системы учтены условия $x<3,\ x>0,\ x\ne 1$. Условие $1<x<2$ позволяет исключить множитель $x-1>0$ в первом неравенстве системы.

Ответ: $\left[\dfrac{\sqrt{13}-1}{2};\ 2\right)$.

Пример 114. *Решить неравенство*

$$(x^2+x+1)^{x^2-5x+6}>(x+2)^{x^2-5x+6}.$$

Решение. Перепишем данное неравенство в следующем виде

$$(x^2+x+1)^{x^2-5x+6}-(x+2)^{x^2-5x+6}>0$$

и используем метод рационализации

$$\begin{cases}(x^2+x+1-x-2)(x^2-5x+6)>0,\\ x^2+x+1>0,\\ x+2>0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)>0,\\ x>-2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<-1,\\ 1<x<2,\\ x>3.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-2;-1)\cup(1;2)\cup(3;+\infty)$.

Замечание. Так же, как и при доказательстве теоремы 5, можно показать, что знак выражения $f(x)^{h(x)}-g(x)^{p(x)}$ совпадает со знаком выражения $(a-1)\left(\log_a f(x)^{h(x)}-\log_a g(x)^{p(x)}\right)$, где $f(x)>0$, $g(x)>0$, $a>0$, $a\ne 1$.

Отдельно рассмотрим рационализацию для выражения $|f(x)|-|g(x)|$.

> Теорема **6.** Знаки выражений
> $$|f(x)|-|g(x)| \text{ и } \left(f(x)-g(x)\right)\left(f(x)+g(x)\right)$$
> совпадают для всех допустимых значений x.

Указание. Для доказательства рассмотреть выражения $|f(x)|-|g(x)|$ и $f^2(x)-g^2(x)$ и воспользоваться свойством возрастающей функции $p(t)=t^2$ на множестве $[0;+\infty)$.

Пример 115. *Решить неравенство*
$$\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)\le 2.$$

Решение. Запишем неравенство в виде
$$\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)-\log_{|x+2|}(x+2)^2\le 0$$
и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации
$$\begin{cases}(|x+2|-1)(4+7x-2x^2-(x+2)^2)\le 0,\\ 4+7x-2x^2>0,\\ x+2\ne 0,\\ |x+2|\ne 1.\end{cases}$$

Знак множителя $(|x+2|-1)$ совпадает со знаком $((x+2)^2-1)$ по теореме 6.

Получим равносильную систему неравенств
$$\begin{cases}((x+2)^2-1)(-3x^2+3x)\le 0,\\ (x+0{,}5)(x-4)<0,\\ x\ne -3,\ x\ne -2,\ x\ne -1\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+1)(x+3)(x-1)\ge 0,\\ (x+0{,}5)(x-4)<0,\\ x\ne -3,\ x\ne -2,\ x\ne -1.\end{cases}$$

Окончательно получаем (см. рис. 25), что решением являются все значения x такие, что $-0{,}5<x\le 0$, $1\le x<4$.

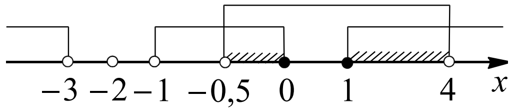


Рис. 25

Ответ: $(-0{,}5;0]\cup[1;4)$.

Выпишем основные выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G (см. табл. 2) при соответствующих ограничениях на переменную x.

Табл. 2

№	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$\log_a f-\log_a g$ $\log_a f-1$ $\log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$\log_h f-\log_h g$ $\log_h f-1$ $\log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h-\log_g h$	$(f-1)(g-1)\times$ $\times(h-1)(g-f)$
4 4а 4б	h^f-h^g h^f-1 a^f-a^g	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$ $(a-1)(f-g)$
5 5а	f^h-g^h $\sqrt[n]{f}-\sqrt[n]{g}$	$(f-g)h$ $f-g$
6	$\lvert f\rvert-\lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$

4.5. Графический метод

Графическое представление неравенств обладает несколькими несомненными преимуществами:

а) построив графики функций, входящих в неравенство, можно определить, как влияет на решение взаимное расположение графиков;

б) график подчас позволяет аналитически сформулировать необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи, т.е. графические приемы эффективно применяются для изображения результатов исследования там, где чисто аналитическая запись громоздка.

в) ряд утверждений позволяет на основании графической информации делать вполне строгие и обоснованные заключения о решениях неравенства.

Пример 116. На рис. 26 изображены графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, заданных на промежутке $[-3;6]$. Решите неравенство $f(x)>g(x)$.

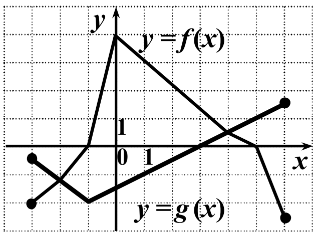


Рис. 26

Решение. Графики данных функций пересекаются в двух точках с абсциссами -2 и 4 соответственно. График функции $y=f(x)$ расположен выше графика функции $y=g(x)$ при всех значениях $x\in(-2;4)$.

Ответ: $(-2;4)$.

Пример 117. (МФТИ, 2009). Решите неравенство

$$\log_{|x|}(\sqrt{x+5}+4)\ge 2\log_{x^2}(2x+8).$$

Решение. Область определения данного неравенства определяется условиями

$$x\ne 0,\ |x|\ne 1,\ x\ge -5,\ x>-4,$$

и представляет собой промежуток $(-4;+\infty)$ с выброшенными из него точками $-1,0,1$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $|x|>1$. В этом случае исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{|x|}(\sqrt{x+5}+4)\ge \log_{|x|}(2x+8),$$

которое равносильно неравенству

$$\sqrt{x+5}\ge 2x+4. \qquad (*)$$

Построим графики функций $y=\sqrt{x+5}$ и $y=2x+4$ (см. рис. 27).

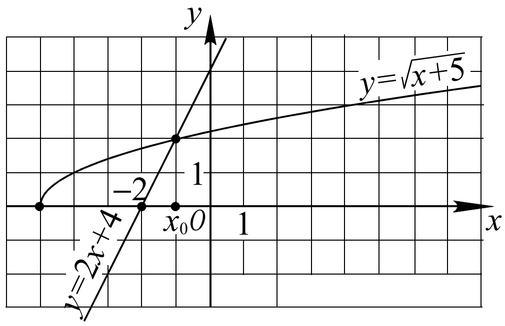


Рис. 27

Из рис. 27 видно, что последнему неравенству удовлетворяют все значения $x\in[-5;x_0]$, где x_0 – корень уравнения $x+5=(2x+4)^2$ такой, что $x_0>-2$. Уравнение $4x^2+15x+11=0$ имеет корни -1 и $-\frac{11}{4}$, поэтому $x_0=-1$. Отсюда с учетом области определения неравенства при условии $|x|>1$ находим множество решений неравенства $(*)$:

$$-4<x<-1.$$

2. Пусть $0<|x|<1$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{x+5}\le 2x+4.$$

Откуда (см. рис. 27) следует $x\ge -1$. С учетом области определения неравенства при условии $0<|x|<1$ находим множество решений неравенства, которое является объединением интервалов $(-1;0)$ и $(0;1)$.

Ответ: $-4<x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<1$.

Пример 118. При каких значениях a неравенство $\sqrt{1-x^2} > a - x$ имеет решение?

Решение. График функции $y=\sqrt{1-x^2}$ или $x^2+y^2=1\ (y \ge 0)$ есть полуокружность (см. рис. 28).

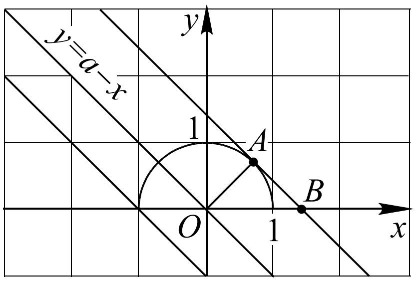


Рис. 28

Функция $y=a-x$ задает семейство прямых с угловым коэффициентом $k=-1$. С увеличением a прямая $y=a-x$ перемещается вправо.

Исходное неравенство будет выполняться до тех пор, пока точки окружности будут лежать выше точек прямой, т.е. пока прямая не станет касательной к окружности. В этом случае значение $a=OB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ находим из прямоугольного треугольника OAB. Значение $a=\sqrt{2}$ можно найти и аналитически, если решить уравнение $\sqrt{1-x^2}=a-x$, и после возведения в квадрат потребовать, чтобы дискриминант полученного квадратного уравнения был равен нулю.

***Ответ*:** $a<\sqrt{2}$.

5. Геометрические методы решения

Геометрическая интерпретация неравенств позволяет легко и красиво решать как простые, так и сложные задачи. Наиболее распространенная интерпретация неравенств связана с модулем или расстоянием между точками на координатной прямой. Обобщением этой интерпретации является расстояние между точками на плоскости.

5.1. Расстояние между точками на координатной прямой

Геометрический смысл модуля: модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками координатной прямой, координаты которых соответствуют этим числам. Например, запись $|a-b|$ означает расстояние между точками a и b; $|a+b|$ – расстояние между точками a и $-b$; $|a|=|a-0|$ – расстояние между точками a и 0.

Пример 119. *Решить неравенство*

$$|x-2|>5.$$

Решение. Запись $|x-2|$ есть расстояние от точки x до точки 2. Для решения данного неравенства необходимо на координатной оси найти такие точки, расстояние от которых до точки 2 больше 5. Справа от точки 2 расположена точка 7 на расстоянии 5 единиц, а слева – точка (–3). Поэтому данному неравенству удовлетворяют все значения

$$x\in(-\infty;-3)\cup(7;+\infty).$$

***Ответ*:** $(-\infty;-3)\cup(7;+\infty)$.

Пример 120. Решить неравенство

$$|x-5|>|x+2|.$$

Решение. Рассмотрим уравнение

$$|x-5|=|x+2|.$$

Так как $|x-5|$ и $|x+2|=|x-(-2)|$ – это расстояния от точки x до точек 5 и –2 соответственно, то из данного равенства следует, что точка x – середина отрезка $[-2;5]$, и поэтому $x=\dfrac{-2+5}{2}=1{,}5$.

Значит, решениями данного неравенства являются все числа $x \in (-\infty; 1{,}5)$, т.е. все точки, расстояния от каждой из которых до точки 5 больше расстояния до точки (–2).

Ответ: $(-\infty; 1{,}5)$.

Пример 121. *Решить неравенство*

$$|x+5|+|x-3|>8.$$

Решение. Так как расстояние между точками –5 и 3 равно 8, то решениями уравнения

$$|x+5|+|x-3|=8$$

являются все числа из отрезка $[-5;3]$. Для любой точки, расположенной вне отрезка $[-5;3]$ (справа или слева), сумма расстояний от точек –5 и 3 больше 8.

Ответ: $(-\infty;-5)\cup(3;+\infty)$.

5.2. Расстояние между точками на координатной плоскости

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ на координатной плоскости вычисляется по формуле

$$M_1M_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Для любых n точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ при $n\ge 3$ справедливо неравенство

$$M_1M_2+M_2M_3+\ldots+M_{n-1}M_n \ge M_1M_n, \quad (1)$$

причем знак равенства достигается только, когда точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ лежат на отрезке M_1M_n и следуют друг за другом в указанном порядке. В частности, если даны три точки M_1, M_2, M_3, то неравенство (1) имеет вид

$$M_1M_2+M_2M_3\ge M_1M_3$$

и называется *неравенством треугольника.*

Если на плоскости введена декартова система координат, то через координаты точек $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2), M_3(x_3;y_3)$ оно записывается следующим образом

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}\ge$$
$$\ge\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}. \quad (2)$$

Пример 122. *Решить неравенство*

$$\sqrt{(x-\sqrt2-4)^2+(x-\sqrt3+1)^2}+$$
$$+\sqrt{(x-\sqrt2+2)^2+(x-\sqrt3-7)^2}\le 10.$$

Решение. Заметим, что число $u=\sqrt{(x-\sqrt2-4)^2+(x-\sqrt3+1)^2}$ можно рассматривать как расстояние между точками на координатной плоскости $A(\sqrt2+4;\sqrt3-1)$ и $B(x;x)$. Точно также число $v=\sqrt{(x-\sqrt2+2)^2+(x-\sqrt3-7)^2}$ можно рассматривать как расстояние между точками на координатной плоскости $C(\sqrt2-2;\sqrt3+7)$ и $B(x;x)$ (или $C_1(\sqrt3+7;\sqrt2-2)$ и $B(x;x)$, где точка C_1 симметрична точке C относительно прямой $y=x$).

Поэтому левую часть исходного неравенства можно рассматривать как длину ломаной ABC (или ABC_1), причем точка B лежит на прямой $y=x$. Из положения точки B (см. рис. 29) и равенства BC и BC_1 следует, что для решения достаточно рассмотреть только случай с точками A, B, C.

Заметим, что $AB+BC\ge AC$, но $AC=$

$$=\sqrt{\left((\sqrt2+4)-(\sqrt2-2)\right)^2+\left((\sqrt3-1)-(\sqrt3+7)\right)^2}=$$
$$=\sqrt{6^2+8^2}=10.$$

Следовательно, исходное неравенство будет выполняться только в случае, если точка B лежит на отрезке AC. Это возможно только в случае, когда B есть точка пересечения B_0 прямых AC и $y=x$.

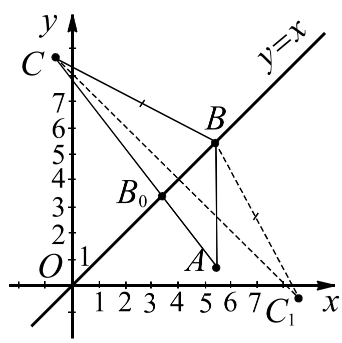


Рис. 29

Уравнение прямой AC в виде $y = kx + b$ находим из системы уравнений (подставляя в это уравнение координаты точек A и C):

$$\begin{cases} \sqrt{3} - 1 = k(\sqrt{2} + 4) + b, \\ \sqrt{3} + 7 = k(\sqrt{2} - 2) + b. \end{cases}$$

Отсюда $k = -\dfrac{4}{3}$ и $b = \sqrt{3} + \dfrac{4\sqrt{2}}{3} + \dfrac{13}{3}$.

Тогда координаты точки B_0 найдем, подставив $y = x$ в уравнение прямой AC. Получим

$$x = -\frac{4}{3}x + \sqrt{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{13}{3}.$$

Отсюда $x = \dfrac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 13}{7}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 13}{7}$.

Замечание. Рассмотрение точки, симметричной точке A относительно прямой $y = x$ приводит к тому же ответу.

5.3. Векторная интерпретация неравенства

Векторы успешно могут быть применены не только в геометрии, но и при решении неравенств.

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для скалярного произведения этих векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между векторами, справедливы следующие оценки

$$-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \le \vec{a} \cdot \vec{b} \le |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|, \qquad (3)$$

причем экстремальные значения скалярного произведения достигаются в случаях коллинеарности векторов. Запишем неравенства (3) в координатной форме:

для векторов на плоскости

$$-\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \le a_1 a_2 + b_1 b_2 \le$$
$$\le \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2};$$

для векторов в пространстве

$$-\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \le$$
$$\le a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \le \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}.$$

Пример 123. *Решить неравенство*

$$2\sqrt{x-1} + 5x \ge \sqrt{(x^2+4)(x+24)}.$$

Решение. Рассмотрим два вектора $\vec{a} = \{a_1, a_2\} = \{2; x\}$ и $\vec{b} = \{b_1, b_2\} = \{\sqrt{x-1}; 5\}$, заданные в декартовой системе координат. Тогда неравенство можно записать в виде

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \ge \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \text{ т.е.}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} \ge |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

В силу неравенства (3) получаем $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Поскольку рассматриваемые векторы – ненулевые, то из полученного равенства следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Следовательно, существует такая константа k, что $\vec{b} = k\vec{a}$, а это означает, что

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = 2k, \\ 5 = kx. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы получаем, что $k \ne 0$, тогда из первого следует $k > 0$ (соответственно $x > 0$). Исключая из второго уравнения $k > 0$, получим

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = \dfrac{10}{x}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \dfrac{100}{x^2}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 - 100 = 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Перебирая целые делители числа 100, заметим, что уравнение $x^3 - x^2 - 100 = 0$ имеет целый корень $x = 5$. Тогда, раскладывая левую часть этого уравнения на множители, получим:

$$x^3 - x^2 - 100 = (x-5)(x^2 + 4x + 20).$$

Квадратное уравнение $x^2 + 4x + 20 = 0$ не имеет действительных корней, так как его дискриминант отрицателен.

Следовательно, $x = 5$ – единственный корень кубического уравнения, а так как условие $x > 0$ выполнено, то число $x = 5$ будет и решением исходного неравенства.

Ответ. 5.

6. Решение неравенств разными способами

Рассмотрим на одном примере разные способы решения неравенства.

Пример 124. Решить неравенство:

$$\log_x 2 < \log_{6-x} 2 .$$

1-*й способ* (обобщенный метод интервалов).

$$\log_x 2 < \log_{6-x} 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} < \frac{1}{\log_2(6-x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2(6-x)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(6-x)-\log_2 x}{\log_2 x\cdot\log_2(6-x)} < 0 .$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\log_2(6-x)-\log_2 x}{\log_2 x\cdot\log_2(6-x)}$. Ее область определения задается условиями

$$\begin{cases} 6-x>0, \\ x>0, \\ 6-x\ne 1, \\ x\ne 1. \end{cases}$$

Отсюда $D(f)=(0;1)\cup(1;5)\cup(5;6)$.

Функция $f(x)$ непрерывна на своей области определения и обращается в нуль при $x=3$. Используя «метод пробной точки», определим знак $f(x)$ на промежутках $(0;1),(1;3),(3;5),(5;6)$.

$$f(0,5)=\frac{\log_2 11}{\log_2 0,5\cdot\log_2 5,5}<0;$$

$$f(2)=\frac{\log_2 2}{\log_2 2\cdot\log_2 4}>0;$$

$$f(4)=\frac{\log_2 0,5}{\log_2 4\cdot\log_2 2}<0;$$

$$f(5,5)=\frac{-\log_2 11}{\log_2 5,5\cdot\log_2 0,5}>0.$$

Следовательно, решениями неравенства являются все значения $x\in(0;1)\cup(3;5)$.

2-*й способ*. Решим неравенство «методом рационализации».

$$\log_x 2 < \log_{6-x} 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \big((6-x)-x\big)(x-1)\big((6-x)-1\big)<0 \\ 6-x>0, \\ 6-x\ne 1, \\ x>0, \\ x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(x-1)(5-x)<0 \\ x<6, \\ x\ne 5, \\ x>0, \\ x\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1, \\ 3<x<5. \end{array}\right.$$

3-*й способ* (метод расщепления).

$$\frac{\log_2(6-x)-\log_2 x}{\log_2 x\cdot\log_2(6-x)}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2(6-x)-\log_2 x>0, \\ \log_2 x\cdot\log_2(6-x)<0 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} \log_2(6-x)-\log_2 x<0 \\ \log_2 x\cdot\log_2(6-x)>0 \end{cases} (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

Решим систему (1):

$$\begin{cases} \log_2(6-x)-\log_2 x>0, \\ \log_2 x\cdot\log_2(6-x)<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(6-x)>\log_2 x, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x>0, \\ \log_2(6-x)<0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x<0 \\ \log_2(6-x)>0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<3, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1, \\ 5<x<6 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ x<5 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<3, \\ \left[\begin{array}{l} 5<x<6 \\ 0<x<1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1 .$$

Решим систему (2):

$$\begin{cases} \log_2(6-x)-\log_2 x<0 \\ \log_2 x\cdot\log_2(6-x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(6-x)<\log_2 x \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2 x>0, \\ \log_2(6-x)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2 x<0 \\ \log_2(6-x)<0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 6-x < x \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1, \\ 6-x > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < 6-x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 6 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1, \\ x < 5 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 5 < x < 6 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 6 \\ 1 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 5.$$

Объединяя решения систем (1) и (2), получаем $(0;1)\cup(3;5)$.

4-*й способ* (решение неравенства на промежутках).

Неравенство имеет смысл при значениях x таких, что

$$\begin{cases} 6-x > 0, \\ 6-x \neq 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6, \\ x \neq 5, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (0;1)\cup(1;5)\cup(5;6).$$

Равенство $\log_x 2 = \log_{6-x} 2$ выполняется на множестве $(0;1)\cup(1;5)\cup(5;6)$, если $x = 6-x$, то есть при $x = 3$.

Получаем четыре промежутка $(0;1), (1;3), (3;5), (5;6)$.

Рассматривая неравенство на каждом из промежутков, получаем:

если $x \in (0;1)$, то $6-x > 5$ и верны неравенства $\log_x 2 < 0$, $\log_{6-x} 2 > 0$ и $\log_x 2 < \log_{6-x} 2$;

если значения $x \in (1;3)$, то $6-x > x > 1$ и верно неравенство $\log_x 2 > \log_{6-x} 2$, т.е. исходное неравенство не выполняется;

если значения $x \in (3;5)$, то $1 < 6-x < x$ и верно неравенство $\log_x 2 < \log_{6-x} 2$;

если значения $x \in (5;6)$, то $0 < 6-x < 1$ и верны неравенства $\log_x 2 > 0$, $\log_{6-x} 2 < 0$ и $\log_x 2 > \log_{6-x} 2$, т.е. исходное неравенство не выполняется.

В итоге получаем множество решений исходного неравенства $(0;1)\cup(3;5)$.

5-*й способ* (графический).

Рассмотрим функции $f(x) = \log_x 2$, $D(f) = (0;1)\cup(1;+\infty)$, и $g(x) = \log_{6-x} 2$, $D(g) = (-\infty;5)\cup(5;6)$. Отсюда

$$D(f)\cap D(g) = (0;1)\cup(1;5)\cup(5;6).$$

Так как $f(x) = \dfrac{1}{\log_2 x}$ и $f'(x) = \left(\dfrac{1}{\log_2 x}\right)' = -\dfrac{1}{\log_2^2 x}\cdot\dfrac{1}{x\ln 2}$, то замечаем, что $f'(x) < 0$ при всех значениях $x \in D(f)$, т.е. функция $f(x)$ убывает на промежутках $(0;1)$ и $(1;+\infty)$.

Соответственно $g(x) = \dfrac{1}{\log_2(6-x)}$ и

$$g'(x) = \left(\frac{1}{\log_2(6-x)}\right)' = \frac{1}{\log_2^2(6-x)}\cdot\frac{1}{(6-x)\ln 2},$$

то замечаем, что $g'(x) > 0$ при всех значениях $x \in D(g)$, т.е. функция $g(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty;5)$ и $(5;6)$.

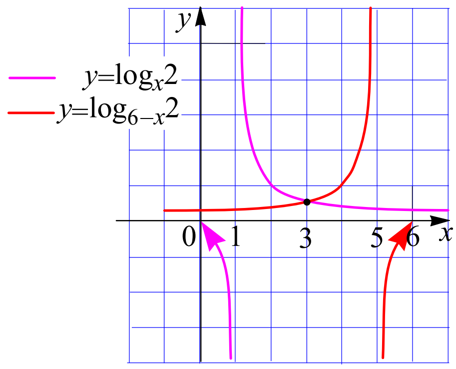


Рис. 30

На рис. 30 изображены эскизы графиков функций $f(x)$ и $g(x)$. Из уравнения $f(x) = g(x)$ или $\log_x 2 = \log_{6-x} 2$ получаем $x = 3$. Учитывая характер монотонности функций $f(x)$ и $g(x)$, и то, что при $x \in (0;1)$ $f(x) < 0$, а $g(x) > 0$, а при $x \in (5;6)$ $f(x) > 0$, а $g(x) < 0$, получаем множество решений данного неравенства $(0;1)\cup(3;5)$.

Ответ: $(0;1)\cup(3;5)$.

Пример 125. *Решить неравенство*:

$$(\log_3 x+1)(\log_3 x-2)\le 4$$

Решение. 1-*й способ* (метод замены).

Пусть $\log_3 x=a$, тогда имеем неравенство $(a+1)(a-2)\le 4$ или $a^2-a-6\le 0$. Отсюда $-2\le a\le 3$. Возвращаемся к первоначальной переменной $-2\le \log_3 x\le 3$; $\log_3 \frac{1}{9}\le \log_3 x\le \log_3 27$. По свойству возрастающей функции $y=\log_3 t$ на множестве $(0;+\infty)$ получаем $\frac{1}{9}\le x\le 27$.

2-*й способ* (метод рационализации). Данное неравенство приведем к виду

$$\log_3^2 x-\log_3 x-6\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\log_3 x+2)(\log_3 x-3)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\log_3 x+\log_3 9)(\log_3 x-\log_3 27)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_3(9x)\cdot(\log_3 x-\log_3 27)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(3-1)(9x-1)(3-1)(x-27)\le 0,\\ x>0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{9}\le x\le 27.$$

3-*й способ* (обобщенный метод интервалов). Приведем исходное неравенство к виду $\log_3^2 x-\log_3 x-6\le 0$ и рассмотрим функцию

$$f(x)=\log_3^2 x-\log_3 x-6,\text{ где } x>0.$$

Решая уравнение $\log_3^2 x-\log_3 x-6=0$, находим нули функции $f(x)$: $x=\frac{1}{9}$ или $x=27$. На интервалах $\left(0;\frac{1}{9}\right)$, $\left(\frac{1}{9};27\right)$ и $(27;+\infty)$ функция $f(x)$ сохраняет постоянный знак.

Так как $f\left(\frac{1}{27}\right)>0$, $f(1)<0$, $f(81)>0$, то $f(x)\le 0$ при всех значениях $x\in\left[\frac{1}{9};27\right]$.

4-*й способ* (метод расщепления). Преобразуем данное неравенство

$$\log_3^2 x-\log_3 x-6\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\log_3 x+2)(\log_3 x-3)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_3 x+2\ge 0,\\ \log_3 x-3\le 0.\end{cases}\\ \begin{cases}\log_3 x+2\le 0,\\ \log_3 x-3\ge 0.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_3 x\ge \log_3\frac{1}{9},\\ \log_3 x\le \log_3 27.\end{cases}\\ \begin{cases}\log_3 x\le \log_3\frac{1}{9},\\ \log_3 x\ge \log_3 27.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge\frac{1}{9},\\ x\le 27.\end{cases}\\ \begin{cases}x\le\frac{1}{9},\\ x\ge 27.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\ \frac{1}{9}\le x\le 27.$$

Ответ: $\frac{1}{9}\le x\le 27$.

7. Системы неравенств

Для решения системы неравенств с одной переменной к каждому неравенству применяют те же методы, которые были рассмотрены выше.

Системы рациональных неравенств

Пример 126. (Диагностическая работа 24.01.13. ЕГЭ-2013). *Решить систему неравенств*:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{0,5x\sqrt{5}-1}+\dfrac{0,5x\sqrt{5}-2}{0,5x\sqrt{5}-3}\ge 2, & (1) \\ \left(\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{x-4}{2}\right)^2\le\dfrac{25}{4}. & (2) \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство

$$\frac{2}{0,5x\sqrt{5}-1}+\frac{0,5x\sqrt{5}-2}{0,5x\sqrt{5}-3}\ge 2.$$

Пусть $0,5x\sqrt{5}-1=t$. Тогда неравенство примет вид:

$$\frac{2}{t}+\frac{t-1}{t-2}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{2}{t}+\frac{t-1}{t-2}-2\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(t-2)+t(t-1)-2t(t-2)}{t(t-2)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-t^2+5t-4}{t(t-2)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(t-4)(t-1)}{t(t-2)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<t\le 1, \\ 2<t\le 4. \end{array}\right.$$

Выполнив обратную замену, получим:

$$\left[\begin{array}{l} 0<0,5x\sqrt{5}-1\le 1, \\ 2<0,5x\sqrt{5}-1\le 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{\sqrt{5}}<x\le\dfrac{4}{\sqrt{5}}, \\ \dfrac{6}{\sqrt{5}}<x\le 2\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Решим второе неравенство исходной системы.

$$\left(\frac{2}{x-4}+\frac{x-4}{2}\right)^2\le\frac{25}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}\le\frac{2}{x-4}+\frac{x-4}{2}\le\frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x-4}+\dfrac{x-4}{2}\ge -\dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{2}{x-4}+\dfrac{x-4}{2}\le\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Решим первое неравенство полученной системы:

$$\frac{2}{x-4}+\frac{x-4}{2}\ge -\frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-4)^2+5(x-4)+4}{2(x-4)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x}{2(x-4)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{2(x-4)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le x\le 3, \\ x>4. \end{array}\right.$$

Решим второе неравенство полученной системы:

$$\frac{2}{x-4}+\frac{x-4}{2}\le\frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-4)^2-5(x-4)+4}{2(x-4)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-13x+40}{2(x-4)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x-8)}{2(x-4)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<4, \\ 5\le x\le 8. \end{array}\right.$$

Пересекая множества решений $[0;3]\cup(4;+\infty)$ и $(-\infty;4)\cup[5;8]$, получаем множество решений второго неравенства исходной системы $[0;3]\cup[5;8]$.

Так как $0<\dfrac{2}{\sqrt{5}}<\dfrac{4}{\sqrt{5}}<\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{36}{5}}<$ $<\sqrt{\dfrac{45}{5}}=3$, а $4<2\sqrt{5}=\sqrt{20}<\sqrt{25}<5$, то пересекая множества решений $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right]\cup\left(\dfrac{6}{\sqrt{5}};2\sqrt{5}\right]$ системы (1) и $[0;3]\cup[5;8]$ системы (2) с учетом выполненных оценок, получим, что решениями данной в условии системы неравенств являются все значения $x\in\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right]\cup\left(\dfrac{6}{\sqrt{5}};3\right]$.

Ответ. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right]\cup\left(\dfrac{6}{\sqrt{5}};3\right]$.

Системы рациональных и показательных неравенств

Пример 127. (Диагностическая работа 22.11.12. ЕГЭ 2013). *Решить систему неравенств*:

$$\begin{cases} 3^x+10\cdot 3^{-x}\le 11, & (1) \\ \dfrac{2x^2-5x}{x-3}\le x. & (2) \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство

$$3^x+10\cdot 3^{-x}\le 11.$$

Пусть $3^x=t$, где $t>0$. Тогда неравенство примет вид

$$t+\frac{10}{t}-11\le 0 \Leftrightarrow \frac{t^2-11t+10}{t}\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{(t-1)(t-10)}{t}\le 0.$$

С учетом условия $t>0$ получаем значения $t\in[1;10]$.

Выполнив обратную замену, получим:

$$\left[\begin{array}{l} 3^x\ge 1, \\ 3^x\le 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0\le x\le \log_3 10.$$

Решим второе неравенство системы.

$$\frac{2x^2-5x}{x-3}\le x \Leftrightarrow \frac{2x^2-5x}{x-3}-x\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x}{x-3}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{x-3}\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0, \\ 2\le x<3. \end{array}\right.$$

Заметим, что $2=\log_3 9<\log_3 10<$ $<\log_3 27=3$. Пересекая множества решений $[0;\log_3 10]$ системы (1) и $(-\infty;0]\cup[2;3)$ системы (2) с учетом выполненных оценок, получим, что решениями данной в условии системы неравенств являются все значения $x\in\{0\}\cup[2;\log_3 10]$.

Ответ. $\{0\}\cup[2;\log_3 10]$.

Пример 128. (Диагностическая работа 18.12.12. ЕГЭ 2013). *Решить систему неравенств*:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5^{x+1}-1}+\dfrac{5^{x+1}-2}{5^{x+1}-3}\ge 2, & (1) \\ \left(\dfrac{2}{25x^2+40x+7}+\dfrac{25x^2+40x+7}{2}\right)^2\ge 4 & (2) \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство

$$\frac{2}{5^{x+1}-1}+\frac{5^{x+1}-2}{5^{x+1}-3}\ge 2.$$

Пусть $5^{x+1}-1=t$. Тогда неравенство примет вид

$$\frac{2}{t}+\frac{t-1}{t-2}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{2}{t}+\frac{t-1}{t-2}-2\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2(t-2)+t(t-1)-2t(t-2)}{t(t-2)}\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{-t^2+5t-4}{t(t-2)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(t-4)(t-1)}{t(t-2)}\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<t\le 1, \\ 2<t\le 4. \end{array}\right.$$

Выполнив обратную замену, получим:

$$\left[\begin{array}{l} 0<5^{x+1}-1\le 1, \\ 2<5^{x+1}-1\le 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{5}<5^x\le \dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{3}{5}<5^x\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x\le \log_5\dfrac{2}{5}, \\ \log_5\dfrac{3}{5}<x\le 0. \end{array}\right.$$

Решим второе неравенство системы.

$$\left(\frac{2}{25x^2+40x+7}+\frac{25x^2+40x+7}{2}\right)^2\ge 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{25x^2+40x+7}-\frac{25x^2+40x+7}{2}\right)^2\ge 0.$$

Замечаем, что полученное неравенство справедливо при всех значениях x кроме тех, при которых $25x^2+40x+7=0$, т.е. $x\ne -\dfrac{7}{5}$ и $x\ne -\dfrac{1}{5}$.

Сравним числа $\log_5\dfrac{3}{5}$ и $-\dfrac{1}{5}$. Имеем

$$\log_5\frac{3}{5}\vee-\frac{1}{5}\Leftrightarrow\log_5\frac{3}{5}\vee\log_5\frac{1}{\sqrt[5]{5}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{3}{5}\vee\frac{1}{\sqrt[5]{5}}\Leftrightarrow 3^5\vee 5^4\Leftrightarrow 243<625.$$

Отсюда $\log_5\frac{3}{5}<-\frac{1}{5}$. Заметим, что $-\frac{7}{5}<-1$.

Пересекая множества решений $\left(-1;\log_5\frac{2}{5}\right]\cup\left(\log_5\frac{3}{5};0\right]$ системы (1) и $\left(-\infty;-\frac{7}{5}\right)\cup\left(-\frac{7}{5};-\frac{1}{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{5};+\infty\right)$ системы (2) с учетом выполненных оценок, получим, что решениями данной в условии системы неравенств являются все значения

$$x\in\left(-1;\log_5\frac{2}{5}\right]\cup\left(\log_5\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{5};0\right].$$

Ответ:
$$\left(-1;\log_5\frac{2}{5}\right]\cup\left(\log_5\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{5};0\right].$$

Системы показательных неравенств

Некоторые показательные неравенства удается решить, используя свойства возрастания и убывания показательной функции. Иногда предлагают показательные неравенства, которые введением новой переменной удается свести к алгебраическому неравенству. В большинстве случаев предложенные показательные неравенства определены при всех действительных значениях переменной.

Пример 129. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases}8^{3-4x}\cdot 0{,}125<\left(\dfrac{32}{\sqrt{2}}\right)^{2-4x},\\ 9^{x^2-x}+12\cdot 3^{x^2}-5\cdot 3^{2x+2}\le 0.\end{cases}$$

Решение. 1. Решим первое неравенство системы:

$$8^{3-4x}\cdot 0{,}125<\left(\frac{32}{\sqrt{2}}\right)^{2-4x}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (2^3)^{3-4x}\cdot 2^{-3}<\left(\frac{2^5}{2^{0,5}}\right)^{2-4x}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2^{6-12x}<2^{9-18x}\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 6-12x<9-18x\ \Leftrightarrow\ x<\frac{1}{2}.$$

2. Решим второе неравенство системы. При делении обеих его частей на $3^{2x}>0$, получим $3^{2x^2-4x}+12\cdot 3^{x^2-2x}-45\le 0$ или $a^2+12a-45\le 0$, где $a=3^{x^2-2x}$.

Находим решения квадратного неравенства $-15\le a\le 3$. Учитывая, что $a>0$, получаем $0<a\le 3$.

Теперь решаем двойное неравенство

$$0<3^{x^2-2x}\le 3\Leftrightarrow 3^{x^2-2x}\le 3\Leftrightarrow x^2-2x\le 1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}.$$

3. Теперь запишем решение системы, учитывая, что $1-\sqrt{2}<\frac{1}{2}<1+\sqrt{2}$:

$$\begin{cases}x<\dfrac{1}{2},\\ 1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow 1-\sqrt{2}\le x<\frac{1}{2}.$$

Ответ: $1-\sqrt{2}\le x<\frac{1}{2}$.

Системы рациональных и логарифмических неравенств

Пример 130. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases}\log_{x^2+\frac{1}{4}}\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}\right)\ge 1,\\ x^2-3x-2>0.\end{cases}$$

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Возможны два случая.

1. Если $0<x^2+\frac{1}{4}<1\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{3}}{2}<x<\frac{\sqrt{3}}{2}$, то в этом случае исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}>0,\\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}\le x^2+\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+x+2>0,\\ 2x^2-x-1\ge 0.\end{cases}$$

Решением этой системы неравенств является множество $(-\infty;-0{,}5]\cup[1;+\infty)$.

С учетом полученного ранее условия находим все значения $x\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2}\right]$.

2. Если $x^2+\dfrac{1}{4}>1$, т.е. $|x|>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то в этом случае исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\ge x^2+\frac{1}{4}.$$

Отсюда находим все значения $x\in[-0{,}5;1]$. С учетом полученного ранее условия получаем значения $x\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};1\right]$.

Объединим полученные решения:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right].$$

Рассмотрим второе неравенство. Решением неравенства является множество:

$$\left(-\infty;\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right).$$

Чтобы найти решения исходной системы неравенств, заметим, что:

$$\frac{3+\sqrt{17}}{2}>\frac{3+\sqrt{16}}{2}=\frac{7}{2}>1;$$

$$\frac{3-\sqrt{17}}{2}<\frac{3-\sqrt{16}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Сравним числа $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$.

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\vee\frac{3-\sqrt{17}}{2}\Leftrightarrow-\sqrt{3}\vee 3-\sqrt{17}\Leftrightarrow$$

(прибавим к обеим числам $\sqrt{3}+\sqrt{17}$)

$$\Leftrightarrow\sqrt{17}\vee 3+\sqrt{3}\Leftrightarrow 17\vee 12+6\sqrt{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\vee 6\sqrt{3}.$$

Так как $\sqrt{3}>1$, то $6\sqrt{3}>5$ и тогда $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$.

Следовательно, решением данной в условии системы является множество:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right).$$

Ответ: $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Пример 131. (ЕГЭ 2013). *Решить систему неравенств*:

$$\begin{cases}\log_{4-x}\dfrac{x+6}{(x-4)^6}\ge-6, & (1)\\ x^3+9x^2+\dfrac{40x^2+2x-10}{x-5}\le 2. & (2)\end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x}\frac{x+6}{(x-4)^6}\ge-6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_{4-x}\frac{x+6}{(x-4)^6}+\log_{4-x}(4-x)^6\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_{4-x}\frac{(x+6)(4-x)^6}{(x-4)^6}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_{4-x}(x+6)\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-x>1\\x+6\ge 1\end{cases}\\ \begin{cases}0<4-x<1\\0<x+6\le 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<3\\x\ge-5\end{cases}\\ \begin{cases}3<x<4\\-6<x\le-5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-5\le x<3.$$

Решим второе неравенство системы:

$$x^3+9x^2+\frac{40x^2+2x-10}{x-5}-2\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^4+4x^3-5x^2}{x-5}\le 0\Leftrightarrow\frac{x^2(x^2+4x-5)}{x-5}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2(x+5)(x-1)}{x-5}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le-5,\\x=0,\\1\le x<5.\end{array}\right.$$

Пересекая множества решений $[-5;3)$ системы (1) и $(-\infty;-5]\cup\{0\}\cup[1;5)$ системы (2), получим, что решениями данной в условии системы неравенств являются все значения $x\in\{-5\}\cup\{0\}\cup[1;3)$.

Ответ. $\{-5\}\cup\{0\}\cup[1;3)$.

Системы показательных и логарифмических неравенств

При решении систем показательных и логарифмических неравенств следует учитывать комментарии, которые были сделаны выше.

Пример 132. (**МИОО**). *Решить систему неравенств* $\begin{cases} 8^x+8\ge 4^{x+1}+2^{x+1}, \\ \log_{x-1}7>2. \end{cases}$

Решение. Решим первое неравенство системы

$$8^x-4^{x+1}+8-2^{x+1}\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4^x(2^x-4)-2(2^x-4)\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (4^x-2)(2^x-4)\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (4^x-4^{0,5})(2^x-2^2)\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-0,5)(x-2)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0,5 \\ x\ge 2. \end{array}\right.$$

Второе неравенство системы равносильно совокупности двух систем неравенств.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>1 \\ (x-1)^2<7 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x-1<1 \\ (x-1)^2>7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2 \\ 1-\sqrt{7}<x<1+\sqrt{7} \end{cases} \\ \begin{cases} 1<x<2 \\ \left[\begin{array}{l} x<1-\sqrt{7} \\ x>1+\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2<x<1+\sqrt{7},$$

так как $1-\sqrt{7}<1$ и $2<1+\sqrt{7}$ (докажите самостоятельно).

Решением исходной системы является множество $(2;1+\sqrt{7})$.

Ответ: $(2;1+\sqrt{7})$.

Пример 133. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} \dfrac{2\cdot 81^x+3^x-87}{81^x-3}\ge 2, & (1) \\ \log_2^2(x+4)-4\log_2(x+4)+3\le 0. & (2) \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим первое неравенство. Пусть $3^x=t$, где $t>0$. Тогда имеем

$$\frac{2\cdot t^4+t-87}{t^4-3}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{2\cdot t^4+t-87}{t^4-3}-2\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{t-81}{t^4-3}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{t-81}{(t^2-\sqrt{3})(t^2+\sqrt{3})}\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{t-81}{t^2-\sqrt{3}}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<t<\sqrt[4]{3}, \\ t\ge 81. \end{array}\right.$$

Отсюда получаем $\begin{cases} 3^x<\sqrt[4]{3}; \\ 3^x\ge 81 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<\dfrac{1}{4}, \\ t\ge 4. \end{array}\right.$

Рассмотрим второе неравенство. Пусть $\log_2(x+4)=a$. Тогда имеем

$$a^2-4a+3\le 0 \Leftrightarrow 1\le a\le 3.$$

Отсюда получаем $1\le\log_2(x+4)\le 3$ или $2\le x+4\le 8 \Leftrightarrow -2\le x\le 4$.

В итоге получаем, что решение исходной системы есть множество:

$$\left[-2;\frac{1}{4}\right)\cup\{4\}.$$

Ответ: $\left[-2;\dfrac{1}{4}\right)\cup\{4\}$.

Пример 134. *Решить систему неравенств* $\begin{cases} 25^x-2\cdot 5^x\ge 3, & (1) \\ \log_{\frac{2}{3}}^2 x+\log_{\frac{2}{3}} x\le 2. & (2) \end{cases}$

Решение. 1. Неравенство (1) данной системы запишем в виде

$$(5^x)^2-2\cdot 5^x-3\ge 0.$$

Пусть $5^x=t$, где $t>0$. Тогда неравенство примет вид: $t^2-2t-3\ge 0$ или $(t-3)(t+1)\ge 0$. Отсюда с учетом неравенства $t>0$ получаем $t\ge 3$.

Выполняя обратную замену, имеем

$$5^x\ge 3 \Leftrightarrow 5^x\ge 5^{\log_5 3} \Leftrightarrow x\ge\log_5 3.$$

2. Второе неравенство системы запишем в виде $\log_{\frac{2}{3}}^2 x+\log_{\frac{2}{3}} x-2\le 0$.

Пусть $\log_{\frac{2}{3}} x=a$. Тогда неравенство примет вид: $a^2+a-2\le 0$ или $(a-1)(a+2)\le 0$. Отсюда получаем $-2\le a\le 1$.

Выполняя обратную замену, имеем $-2 \le \log_{\frac{2}{3}} x \le 1$. Отсюда с учетом того, что основание логарифмической функции меньше 1, получаем $\frac{2}{3} \le x \le \frac{9}{4}$.

3. Так как $0 = \log_5 1 < \log_5 3 < \log_5 5 = 1$, то для получения ответа необходимо сравнить числа $\log_5 3$ и $\frac{2}{3}$.

Так как $\frac{2}{3} = \log_5 5^{\frac{2}{3}} = \log_5 \sqrt[3]{25}$, а $\log_5 3 = \log_5 \sqrt[3]{27}$, то из неравенства $\sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{25}$ следует $\log_5 \sqrt[3]{27} > \log_5 \sqrt[3]{25}$ и $\frac{2}{3} < \log_5 3$.

Следовательно, решениями данной системы неравенств являются все значения $x \in \left[\log_5 3; \frac{9}{4}\right]$.

Ответ: $\left[\log_5 3; \frac{9}{4}\right]$.

Пример 135. *Решить систему неравенств* $\begin{cases} \log_{7-x}(x+2) \le \log_{7-x}(3-x), \\ 32 \cdot 9^x \le 60 \cdot 3^x - 7. \end{cases}$

Решение. 1. Для решения неравенства $\log_{7-x}(x+2) \le \log_{7-x}(3-x)$ системы рассмотрим два случая.

Пусть $7 - x > 1$, т.е. $x < 6$. Тогда рассматриваемое неравенство будет равносильно следующему двойному неравенству $0 < x + 2 \le 3 - x$. Отсюда получаем $-2 < x \le \frac{1}{2}$ с учетом $x < 6$.

Пусть $0 < 7 - x < 1$, т.е. $6 < x < 7$. Тогда рассматриваемое неравенство будет равносильно следующему двойному неравенству $x + 2 \ge 3 - x > 0$. Отсюда получаем $\frac{1}{2} \le x < 3$, что не удовлетворяет неравенству $6 < x < 7$. Следовательно, в этом случае решений нет.

Получили, что данное неравенство имеет решение $-2 < x \le \frac{1}{2}$.

2. Неравенство $32 \cdot 9^x \le 60 \cdot 3^x - 7$ системы запишем в виде

$$32 \cdot (3^x)^2 - 60 \cdot 3^x + 7 \le 0.$$

Пусть $3^x = t$, где $t > 0$. Тогда неравенство примет вид: $32t^2 - 60t + 7 \le 0$ или $\left(t - \frac{1}{8}\right)\left(t - \frac{7}{4}\right) \le 0$. Отсюда с учетом неравенства $t > 0$ получаем $\frac{1}{8} \le t \le \frac{7}{4}$.

Выполняя обратную замену, имеем $\frac{1}{8} \le 3^x \le \frac{7}{4}$ или $\log_3 \frac{1}{8} \le x \le \log_3 \frac{7}{4}$.

3. Сравним числа $\log_3 \frac{1}{8}$ и $\log_3 \frac{7}{4}$ с числами $-2, \frac{1}{2}$.

Имеем $0 = \log_3 1 > \log_3 \frac{1}{8} > \log_3 \frac{1}{9} = -2$, а $\log_3 \frac{7}{4} = \log_3 \sqrt{\frac{49}{16}} > \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$. Следовательно, решение системы неравенств есть множество $\left[\log_3 \frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $\left[\log_3\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right]$.

Пример 136. *Решить систему неравенств* $\begin{cases}\log_{2x-1}\dfrac{x^4+2}{2x+1}\ge 1,\\ 16^x-3\cdot 12^x-4\cdot 9^x<0.\end{cases}$

Решение. 1. Для решения неравенства $\log_{2x-1}\dfrac{x^4+2}{2x+1}\ge 1$ системы рассмотрим два случая.

Пусть $2x-1>1$, т.е. $x>1$. Тогда $2x+1>0$ и

$$\log_{2x-1}\frac{x^4+2}{2x+1}\ge 1\Leftrightarrow\frac{x^4+2}{2x+1}\ge 2x-1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^4+2\ge(2x-1)(2x+1).$$

Из неравенства $x^4-4x^2+3\ge 0$, получаем $\left[\begin{array}{l}x^2\le 1,\\ x^2\ge 3.\end{array}\right.$ С учетом условия $x>1$ имеем $x\ge\sqrt{3}$.

Пусть $0<2x-1<1$, т.е. $0{,}5<x<1$. Тогда $2x+1>0$ и

$$\log_{2x-1}\frac{x^4+2}{2x+1}\ge 1\Leftrightarrow 0<\frac{x^4+2}{2x+1}\le 2x-1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^4-4x^2+3\le 0\Leftrightarrow 1\le x^2\le 3.$$

С учетом условия $0{,}5<x<1$ получаем, что во втором случае решений нет.

Следовательно, решением первого неравенства данной в условии системы является множество $[\sqrt{3};+\infty)$.

2. Неравенство $16^x-3\cdot 12^x-4\cdot 9^x<0$ системы запишем в виде

$$\frac{16^x}{9^x}-3\cdot\frac{12^x}{9^x}-4<0\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}-3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x-4<0.$$

Пусть $\left(\frac{4}{3}\right)^x=t$, где $t>0$. Тогда неравенство примет вид: $t^2-3t-4<0$ или $(t-4)(t+1)<0$. Отсюда с учетом неравенства $t>0$ получаем $0<t<4$.

Выполняя обратную замену, имеем $0<\left(\frac{4}{3}\right)^x<4$. Отсюда $x<\log_{\frac{4}{3}}4$.

3. Сравним числа $\log_{\frac{4}{3}}4$ и $\sqrt{3}$. Так как $\log_{\frac{4}{3}}4>\log_{\frac{4}{3}}\frac{16}{9}=2$, то $\log_{\frac{4}{3}}4>\sqrt{3}$.

Следовательно, решение системы неравенств есть множество $\left[\sqrt{3};\log_{\frac{4}{3}}4\right)$.

Ответ: $\left[\sqrt{3};\log_{\frac{4}{3}}4\right)$.

Пример 137. (ЕГЭ 2013). *Решить систему неравенств*:

$$\begin{cases}\log_{x-1}\left(x^2-12x+36\right)\le 0, & (1)\\ 4^{x-2}-35\cdot 2^{x-4}+6\le 0. & (2)\end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство, используя метод рационализации:

$$\log_{x-1}\left(x^2-12x+36\right)\le 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_{x-1}(x-6)^2\le 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1-1)\left((x-6)^2-1\right)\le 0,\\ x-1>0,\\ x-1\ne 1,\\ x-6\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)(x-5)(x-7)\le 0,\\ x>1,\\ x\ne 2,\\ x\ne 6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<2,\\ 5\le x<6,\\ 6<x\le 7.\end{array}\right.$$

Решим второе неравенство $4^{x-2}-35\cdot 2^{x-4}+6\le 0$. Пусть $2^{x-2}=t$, где $t>0$. Тогда неравенство примет вид $t^2-\frac{35}{4}t+6\le 0\Leftrightarrow 4t^2-35t+24\le 0$. Решая уравнение $4t^2-35t+24=0$, находим $D=35^2-16\cdot 24=841=29^2$. Получаем корни уравнения $t_{1,2}=\frac{35\pm 29}{8}$. Отсюда, $t_1=8$ и $t_2=\frac{3}{4}$. Значит, решением неравенства $4t^2-35t+24\le 0$ являются все числа t такие, что $\frac{3}{4}\le t\le 8$.

Выполняя обратную замену, получаем

$$\frac{3}{4} \le 2^{x-2} \le 8 \Leftrightarrow 2^{\log_2 \frac{3}{4}} \le 2^{x-2} \le 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log_2 \frac{3}{4} \le x-2 \le 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+\log_2 \frac{3}{4} \le x \le 5 \Leftrightarrow \log_2 3 \le x \le 5 .$$

Оценим значения $1=\log_2 2<\log_2 3<$ $<\log_2 4=2$. Пересекая множества решений $(1;2)\cup[5;6)\cup(6;7]$ системы (1) и $[\log_2 3;5]$ системы (2) с учетом выполненных оценок, получим, что решениями данной в условии системы неравенств являются все значения $x\in[\log_2 3;2)\cup\{5\}$.

Ответ: $[\log_2 3;2)\cup\{5\}$.

Системы логарифмических неравенств

Некоторые логарифмические неравенства удается решить непосредственно, используя свойства возрастания и убывания логарифмической функции. Иногда используют замену, с помощью которой удается свести данное неравенство к алгебраическому неравенству. При решении логарифмического неравенства необходимо учитывать те значения переменной, при которых определены выражения, содержащие знак логарифма в исходном неравенстве. Кроме того, следует использовать те преобразования неравенства, которые не нарушают равносильности неравенств.

Пример 138. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2 x-5}{1-2\log_x 2} \ge 2\log_2 x, \\ 11\log_9(x^2-12x+27) \le 12+\log_9 \dfrac{(x-9)^{11}}{x-3}. \end{cases}$$

Решение. 1. Первое неравенство системы определено при выполнении условий

$$\begin{cases} x>0, \\ x\ne 1, \\ 1-2\log_x 2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\ne 1, \\ x\ne 4. \end{cases}$$

После замены $\log_2 x = a$ первое неравенство данной системы приводится к виду

$$\frac{a-5}{1-\dfrac{2}{a}} \ge 2a .$$

Решим последнее неравенство

$$\begin{cases} \dfrac{a(a-5)}{a-2}-2a\ge 0, \\ a\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a(a+1)}{a-2}\le 0, \\ a\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\le -1, \\ 0<a<2. \end{array}\right.$$

Отсюда с учетом области допустимых значений переменной первого неравенства системы имеем

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x\le -1, \\ 0<\log_2 x<2. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x\le 0,5, \\ 1<x<4. \end{array}\right.$$

2. Значения x, при которых определены обе части второго неравенства системы, задаются условиями

$$\begin{cases} x^2-12x+27>0, \\ \dfrac{(x-9)^{11}}{x-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x-9)>0, \\ \dfrac{(x-9)^{11}}{x-3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<3, \\ x>9. \end{array}\right.$$

Область определения данного неравенства – есть множество $(-\infty;3)\cup(9;+\infty)$. Для значений x из этого множества исходное неравенство приводится к виду:

$$\log_9|(x-3)^{11}|+\log_9|(x-9)^{11}|\le$$

$$\le 12+\log_9|(x-9)^{11}|-\log_9|x-3| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_9|(x-3)^{11}|+\log_9|x-3|\le 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_9(x-3)^{12}\le 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^{12}\le 9^{12} \Leftrightarrow \ |x-3|\le 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6\le x\le 12 .$$

Учитывая, что значения $x\in(-\infty;3)\cup$ $\cup(9;+\infty)$, получим решения второго неравенства системы: $[-6;3)\cup(9;12]$.

3. Находим общую часть полученных решений: $(0;0,5]\cup(1;3)$.

Ответ: $(0;0,5]\cup(1;3)$.

Пример 139. *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} 1+\lg x^6\cdot\log_5 x>\log_5 x^2+\lg x^3, \\ \log_{\log_2\left(\frac{x}{2}\right)}(x^2-10x+22)>0. \end{cases}$$

Решение. 1. Первое неравенство системы определено при $x>0$. После преобразований и использования метода рационализации получим

$$1+6\lg x\cdot\log_5 x-2\log_5 x-3\lg x>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(3\lg x-1)(2\log_5 x-1)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\lg x-\lg\sqrt[3]{10})(\log_5 x-\log_5\sqrt{5})>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-\sqrt[3]{10})(x-\sqrt{5})>0,\\ x>0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<\sqrt[3]{10},\\ x>\sqrt{5}.\end{array}\right.$$

В процессе решения квадратного неравенства методом интервалов проведено сравнение чисел

$$100<125\Leftrightarrow\sqrt[6]{10^2}<\sqrt[6]{5^3}\Leftrightarrow\sqrt[3]{10}<\sqrt{5}.$$

2. Для второго неравенства системы найдем область определения, заданную системой неравенств

$$\begin{cases}x^2-10x+22>0,\\ \log_2\left(\dfrac{x}{2}\right)>0,\\ \log_2\left(\dfrac{x}{2}\right)\neq 1,\\ \dfrac{x}{2}>0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x-(5-\sqrt{3})\right)\left(x-(5+\sqrt{3})\right)>0,\\ x>2,\\ x\neq 4.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2<x<5-\sqrt{3},\\ x>5+\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Второе неравенство исходной системы заменим равносильной ему системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases}\left(\log_2\left(\dfrac{x}{2}\right)-1\right)\left(x^2-10x+22-1\right)>0,\\ \left[\begin{array}{l}2<x<5-\sqrt{3},\\ x>5+\sqrt{3}.\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{x}{2}-2\right)(x-3)(x-7)>0,\\ \left[\begin{array}{l}2<x<5-\sqrt{3},\\ x>5+\sqrt{3}.\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}3<x<4,\\ x>7,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}2<x<5-\sqrt{3},\\ x>5+\sqrt{3}.\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3<x<5-\sqrt{3},\\ x>7.\end{array}\right.$$

3. Так как $\sqrt{5}<3$, то решением исходной системы неравенств является объединение двух промежутков: $(3;5-\sqrt{3})\cup(7;+\infty)$.

Ответ: $(3;5-\sqrt{3})\cup(7;+\infty)$.

Системы неравенств с модулями

Пример 140. (ЕГЭ-2013). *Решить систему неравенств*:

$$\begin{cases}2^{4x^2+|x|}\cdot 3^{-|x|}\le 1, & (1)\\ |2x-1|<18x^2+5x. & (2)\end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство системы: $2^{4x^2+|x|}\cdot 3^{-|x|}\le 1\Leftrightarrow 2^{4x^2+|x|}\le 3^{|x|}$. Так как обе части неравенства положительны, то логарифмируем их от них по основанию 2.

$$2^{4x^2+|x|}\le 3^{|x|}\Leftrightarrow\log_2 2^{4x^2+|x|}\le\log_2 3^{|x|}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+|x|\le|x|\log_2 3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+|x|(1-\log_2 3)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+|x|\cdot\log_2\frac{2}{3}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|x|\cdot\left(4|x|+\log_2\frac{2}{3}\right)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0\le|x|\le-\frac{1}{4}\log_2\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| \ge 0, \\ |x| \le \log_2 \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_2 \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \le x \le \log_2 \sqrt[4]{\frac{3}{2}}.$$

Можем записать решение первого неравенства в виде $\log_2 \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}} \le x \le \log_2 \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}$.

Решим второе неравенство системы:

$$|2x-1| < 18x^2 + 5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(18x^2+5x) < 2x-1 < 18x^2+5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2+7x-1>0, \\ 18x^2+3x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} & x < -\frac{1}{2}, \\ & x > \frac{1}{9}. \end{aligned} \right.$$

Сравним значения $\log_2 \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}$ и $\log_2 \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}$ с числами $-\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{9}$. Так как $0 < \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}} < 1$, то $\log_2 \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}} < 0$. Кроме того $\log_2 \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}} = -\dfrac{1}{4}\log_2 \dfrac{3}{2} > -\dfrac{1}{4}\log_2 2 = -\dfrac{1}{4}$.

Значит $-\dfrac{1}{2} < -\dfrac{1}{4} < \log_2 \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}} < 0$.

Заметим, что $\log_2 \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{1}{4}\log_2 \dfrac{3}{2} > \dfrac{1}{4}\log_2 \sqrt{2} = \dfrac{1}{8}$. Значит $\log_2 \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}} > \dfrac{1}{8} > \dfrac{1}{9}$

Пересекая множества решений $\left[\log_2 \sqrt[4]{\dfrac{2}{3}}; \log_2 \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}\right]$ системы (1) и $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{9}; \infty\right)$ системы (2) с учетом выполненных оценок, получим, что решениями данной в условии системы неравенств являются все значения $x \in \left(\dfrac{1}{9}; \log_2 \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}\right]$.

Ответ. $\left(\dfrac{1}{9}; \log_2 \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}\right]$.

Системы комбинированных неравенств

Пример 141. (**МИОО**). *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \log_5(x+3) \ge 0, \\ 9^{x+1} - 28 \cdot 3^x + 3 \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Решение системы начнем со второго неравенства.

Пусть $3^x = t$, тогда получим квадратное неравенство $9t^2 - 28t + 3 \ge 0$, имеющее решение $t \le \dfrac{1}{9}$ или $t \ge 3$. Отсюда имеем $3^x \le \dfrac{1}{9}$ или $3^x \ge 3$ и решение второго неравенства системы: $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.

Для решения первого неравенства системы рассмотрим функцию

$$f(x) = \sqrt{x+2} + \log_5(x+3),$$

которая является возрастающей на промежутке $[-2; +\infty)$, как сумма двух возрастающих функций.

Так как $f(-2) = 0$, то $f(x) \ge 0$ для всех значений $x \in [-2; +\infty)$. Следовательно, решением первого неравенства является промежуток $[-2; +\infty)$.

Общим решением двух неравенств системы является множество $\{-2\} \cup [1; +\infty)$.

Ответ: $\{-2\} \cup [1; +\infty)$.

Пример 142. (Диагностическая работа 09.04.13. ЕГЭ-2013). *Решить систему неравенств*:

$$\begin{cases} (x-3)|x-3| - |x-1| \ge 0, & (1) \\ (x^2 - 7x + 6) \cdot \sqrt{11-x} \le 0. & (2) \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство $(x-3)|x-3| - |x-1| \ge 0$, раскрывая модули на промежутках.

Для этого рассмотрим три случая.

1. $x < 1$. Тогда $x-3<0, x-1<0$ и

$$(x-3)|x-3| - |x-1| \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(3-x) - (1-x) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \le 0.$$

В первом случае при $x<1$ решений нет.

2. $1\le x<3$. Тогда $x-3<0$, $x-1\ge 0$ и

$$(x-3)|x-3|-|x-1|\ge 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(3-x)+(1-x)\ge 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x+8\le 0.$$ Нет решений.

3. $x\ge 3$. Тогда $x-3\ge 0$, $x-1\ge 0$ и

$$(x-3)|x-3|-|x-1|\ge 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(1-x)\ge 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-7x+10\ge 0\Leftrightarrow (x-2)(x-5)\ge 0.$$

С учетом условия $x\ge 3$ получаем $x\ge 5$.

Итак, первое неравенство системы имеет множество решений $[5;+\infty)$.

Решим второе неравенство системы: $(x^2-7x+6)\cdot\sqrt{11-x}\le 0$.

$$(x^2-7x+6)\cdot\sqrt{11-x}\le 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{11-x}\le 0,\\ x^2-7x+6\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{11-x}\ge 0,\\ x^2-7x+6\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=11,\\ \begin{cases}11-x\ge 0,\\ x^2-7x+6\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=11,\\ \begin{cases}x\le 11,\\ (x-1)(x-6)\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=11,\\ 1\le x\le 6.\end{array}\right.$$

Пересекая множества решений $[5;+\infty)$ системы (1) и $[1;6]\cup\{11\}$ системы (2), получим, что решениями данной в условии системы неравенств являются все значения $x\in[5;6]\cup\{11\}$.

Ответ. $[5;6]\cup\{11\}$.

Пример 143. (Диагностическая работа 07.05.13. ЕГЭ 2013). *Решить систему неравенств*:

$$\begin{cases}x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}\le 0, & (1)\\ \dfrac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{x}\ge 0. & (2)\end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство $x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}\le 0$. Найдем корни уравнения $x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}=0$. Дискриминант $D=(1-\sqrt{10})^2+4\sqrt{10}=$ $=(1+\sqrt{10})^2$, корни $x_{1,2}=\dfrac{(\sqrt{10}-1)\pm(1+\sqrt{10})}{2}$. Отсюда получаем $x_1=-1$ и $x_2=\sqrt{10}$. Тогда решением первого неравенства являются все значения $x\in[-1;\sqrt{10}]$.

Решим второе неравенство.

$$\frac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{x}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^{|x^2-2x-1|}-9\ge 0,\\ x>0,\end{cases}\\ \begin{cases}3^{|x^2-2x-1|}-9\le 0,\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3^{|x^2-2x-1|}\ge 3^2,\\ x>0,\end{cases}\\ \begin{cases}3^{|x^2-2x-1|}\le 3^2,\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x^2-2x-1|\ge 2,\\ x>0\end{cases}\\ \begin{cases}|x^2-2x-1|\le 2,\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.$$

Решим первую систему совокупности:

$$\begin{cases}|x^2-2x-1|\ge 2,\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-2x-1\ge 2,\\ x^2-2x-1\le -2,\end{array}\right.\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2-2x-3\ge 0,\\ x^2-2x+1\le 0,\end{array}\right.\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x\ge 3.\end{array}\right.$$

Решим вторую систему совокупности:

$$\begin{cases}|x^2-2x-1|\le 2,\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}x^2-2x-1\le 2,\\ x^2-2x-1\ge -2,\end{cases}\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}x^2-2x-3\le 0,\\ x^2-2x+1\ge 0,\end{cases}\\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\quad -1\le x<0$$

Объединяя множества решений систем, получаем множество решений совокупности $[-1;0)\cup\{1\}\cup[3;+\infty)$.

Так как $\sqrt{10}>\sqrt{9}=3$, то пересекая множества решений $[-1;\sqrt{10}]$ системы (1) и $[-1;0)\cup\{1\}\cup[3;+\infty)$ системы (2) с учетом выполненной оценки, получим, что решениями данной в условии системы неравенств являются все значения $x \in [-1; 0) \cup \{1\} \cup [3; \sqrt{10}]$.

Ответ. $[-1; 0) \cup \{1\} \cup [3; \sqrt{10}]$.

Применение свойств неравенств

Обычно при решении систем неравенств с одной переменной каждое неравенство решают независимо друг от друга. В некоторых случаях арифметические действия с данными неравенствами являются ключевым моментом в решении системы неравенств.

Пример 144. (МИОО). *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} x^2 + 6^x + 4 \le 44 \cdot \log_5(x+3), \\ 4x + 6^x \ge 44 \cdot \log_5(x+3). \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему неравенств в следующем виде

$$\begin{cases} x^2 + 6^x + 4 \le 44 \cdot \log_5(x+3), \\ -4x - 6^x \le -44 \cdot \log_5(x+3). \end{cases}$$

При сложении неравенств системы одного знака получаем неравенство $x^2 - 4x + 4 \le 0$, являющееся следствием системы. Отсюда $(x-2)^2 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$. Проверяем, что при $x = 2$ каждое неравенство исходной системы выполняется:

$$\begin{cases} 4 + 36 + 4 \le 44, \\ 8 + 36 \ge 44. \end{cases}$$

Ответ: 2.

Пример145. (МИОО). *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} x^2 + 2^x + 36 \le 78 \cdot \log_3(x+3), \\ 12x + 2^x \ge 78 \cdot \log_3(x+3). \end{cases}$$

Решение. Умножим обе части второго неравенства на –1 и сложим два неравенства полученной системы

$$\begin{cases} x^2 + 2^x + 36 \le 78 \cdot \log_3(x+3), \\ -12x - 2^x \le -78 \cdot \log_3(x+3). \end{cases}$$

Отсюда имеем неравенство

$x^2 - 12x + 36 \le 0$ или $(x-6)^2 \le 0 \Leftrightarrow x = 6$.

При $x = 6$ второе неравенство исходной системы не выполняется:

$$\begin{cases} 36 + 64 + 36 \le 156, \\ 72 + 64 \ge 156. \end{cases}$$

Ответ: нет решений.

В некоторых случаях с помощью известных неравенств удается свести одно из неравенств системы к решению уравнения.

Пример 146. (Диагностическая работа 22.09.12. ЕГЭ-2013). *Решить систему неравенств*:

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 + 4(x+1)^2}{2} \le \dfrac{(3x+1)^2}{4}, & (1) \\ \dfrac{x^3 + 37}{(x+4)^3} \ge 1 + \dfrac{1}{(x+4)^2}. & (2) \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство системы

$$\frac{(x-1)^2 + 4(x+1)^2}{2} \le \frac{(3x+1)^2}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(x-1)^2 + 8(x+1)^2 - (3x+1)^2 \le 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 6x + 9 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)^2 \le 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -3.$$

Для решения системы достаточно проверить, является ли число $x = -3$ решением второго неравенства. Подставляя в него вместо x значение -3, получаем верное числовое неравенство:

$$\frac{(-3)^3 + 37}{(-3+4)^3} \ge 1 + \frac{1}{(-3+4)^2} \Leftrightarrow 10 \ge 2.$$

Ответ. -3.

Пример 147. (МИОО). *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases} 25^x + 3 \cdot 10^x - 4 \cdot 4^x > 0, \\ \log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2 - 12|x| + 37) - \log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2 - \\ \qquad -12|x| + 37) \ge 0. \end{cases}$$

Решение. Выделяя полные квадраты в выражениях под знаками логарифмов, приведем второе неравенство системы к виду

$$\log_{1-\frac{x^2}{37}}\left((|x|-6)^2 + 1\right) \ge \log_{1+\frac{x^2}{37}}\left((|x|-6)^2 + 1\right).$$

Так как при всех допустимых значениях x справедливы неравенства

$$(|x|-6)^2+1\ge 1,$$

$$0<1-\frac{x^2}{37}<1 \text{ и } 1+\frac{x^2}{37}>1,$$

то получаем $\log_{1-\frac{x^2}{37}}\left((|x|-6)^2+1\right)\le 0$, а $\log_{1+\frac{x^2}{37}}\left((|x|-6)^2+1\right)\ge 0$. Следовательно, исходное неравенство будет справедливо только в случае, когда его левая и правая части равны 0, то есть $(|x|-6)^2+1=1$. Это возможно при $x=-6$ или $x=6$.

Подставляя в левую часть первого неравенства системы $x=-6$, получаем

$$25^{-6}+3\cdot 10^{-6}-4\cdot 4^{-6}=\frac{0{,}4^6+3-4\cdot 2{,}5^6}{10^6}<$$

$$<\frac{1+3-4\cdot 2{,}5^2}{10^6}=\frac{-21}{10^6}<0,$$ то есть при $x=-6$ исходное неравенство неверно.

При $x=6$ получаем

$$25^6+3\cdot 10^6-4\cdot 4^6=$$
$$=10^6\left(2{,}5^6+3-4\cdot 0{,}4^6\right)>0,$$

то есть при $x=6$ исходное неравенство верно.

Ответ: 6.

Пример 148. (МИОО). *Решить систему неравенств*

$$\begin{cases}\log_{5x}x^2+\log_{x^2}(5x)\le 2,\\ \log^4_{x-3}(x^2-17)+\log^2_{x^2-17}(x-3)-\log_{5x}25>79.\end{cases}$$

Решение. Запишем первое неравенство системы в следующем виде

$$\log_{5x}x^2+\frac{1}{\log_{5x}x^2}\le 2,$$

которое определено на множестве

$$(0;0{,}2)\cup(0{,}2;1)\cup(1;+\infty).$$

Заметим, что на множестве $(0;0{,}2)\cup(0{,}2;1)$ выражения $5x$ и x^2 положительны и меньше единицы, а на интервале $(1;+\infty)$ – больше единицы, то есть $\log_{5x}x^2>0$. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим имеем

$$\log_{5x}x^2+\frac{1}{\log_{5x}x^2}\ge 2.$$

Значит, с учетом условия получаем уравнение $\log_{5x}x^2=1$, которое в области допустимых значений переменной первого неравенства системы имеет корень $x=5$.

Второе неравенство при $x=5$ выполняется: $\log_2^4 8+\log_8^2 2-\log_{25}25>79$ или $81+\frac{1}{9}-1>79$.

Ответ: 5.

Неравенство с дополнительным условием

Рассмотрим неравенство с дополнительным условием, которое косвенно задает систему неравенств.

Пример 149. *Все решения неравенства* $\frac{2x^2-11x+15}{2^x-6}<0$, *принадлежащие промежутку* $[-3;3]$.

Решение. Для решения данного неравенства воспользуемся методом интервалов.

1. Пусть $f(x)=\frac{2x^2-11x+15}{2^x-6}$.

2. $D(f)=(-\infty;\log_2 6)\cup(\log_2 6;+\infty)$.

3. Найдем нули функции $f(x)$.

$$\frac{2x^2-11x+15}{2^x-6}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=2{,}5,\\ x=3.\end{array}\right.$$

4. Сравним число $\log_2 6$ с числами 2,5 и 3, и затем определим (см. рис. 31) промежутки знакопостоянства функции $f(x)$:

$$\log_2 6<\log_2 8=3$$

и так как справедлива цепочка сравнений

$$\log_2 6\vee 2{,}5 \;\Leftrightarrow\; \log_2 6\vee\log_2 2^{2{,}5} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 6\vee 2^{2{,}5} \;\Leftrightarrow\; 6^2\vee 2^5 \;\Leftrightarrow\; 36>25,$$

то $\log_2 6>2{,}5$.

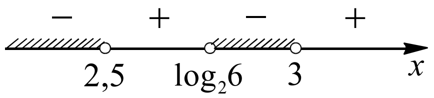


Рис. 31

Следовательно, решения данного неравенства – множество чисел $(-\infty;2{,}5)\cup(\log_2 6;3)$, из которых определяем числа, принадлежащие промежутку $[-3;3]$: $[-3;2{,}5)\cup(\log_2 6;3)$.

Ответ: $[-3;2{,}5)\cup(\log_2 6;3)$.

Пример 150. *Укажите все решения неравенства* $(1-x)\cdot\log_{25-3\cdot 8^x} 2\le\frac{1}{3}$, *входящие в область определения функции* $y=\sqrt{\frac{x-1{,}5}{x-0{,}5}\cdot\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)}$.

Решение. 1. Приведем данное неравенство к следующему виду

$$\frac{1-x}{\log_2(25-3\cdot 8^x)}\le\frac{1}{3}$$

и рассмотрим два случая.

а) Пусть $25-3\cdot 8^x>1$, то есть $8^x<8$ или $x<1$. В этом случае $\log_2(25-3\cdot 8^x)>0$ и исходное неравенство приводится к виду

$$3(1-x)\le\log_2(25-3\cdot 8^x) \text{ или } \frac{8}{8^x}\le 25-3\cdot 8^x.$$

После замены $8^x=a$, где $a>0$, получаем квадратичное неравенство $3a^2-25a+8\le 0$, которое выполняется при $\frac{1}{3}\le a\le 8$. Из неравенства $\frac{1}{3}\le 8^x\le 8$ с учетом условия $x<1$ получаем $-\frac{1}{3}\log_2 3\le x<1$.

б) Теперь рассмотрим случай

$$0<25-3\cdot 8^x<1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}25-3\cdot 8^x>0,\\ 25-3\cdot 8^x<1\end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 1<x<\frac{1}{3}\log_2\frac{25}{3}.$$

В этом случае $\log_2(25-3\cdot 8^x)<0$ и исходное неравенство приводится к виду $3(1-x)\ge\log_2(25-3\cdot 8^x)$ или к совокупности

$$\left[\begin{array}{l}8^x\le\frac{1}{3},\\ 8^x\ge 8\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}x\le-\frac{1}{3}\log_2 3,\\ x\ge 1.\end{array}\right.$$

Отсюда получаем решение для второго случая: $1<x<\frac{1}{3}\log_2\frac{25}{3}$.

Таким образом, имеем решения исходного неравенства: $-\frac{1}{3}\log_2 3\le x<1$ или $1<x<\frac{1}{3}\log_2\frac{25}{3}$.

2. Найдем область определения данной функции, которая задается условием $\frac{x-1{,}5}{x-0{,}5}\cdot\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)\ge 0$. Так как $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)=0$ при $x=0$, то последнее неравенство выполняется. Для $x\ne 0$ имеем $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)<0$ и неравенство $\frac{x-1{,}5}{x-0{,}5}\le 0$, которое выполняется при $x\in(0{,}5;1{,}5]$. Итак, область определения функции $D(y)=\{0\}\cup(0{,}5;1{,}5]$.

3. Сравним числа $\frac{3}{2}$ и $\frac{1}{3}\log_2\frac{25}{3}$:

$$\frac{3}{2}\vee\frac{1}{3}\log_2\frac{25}{3} \;\Leftrightarrow\; \frac{9}{2}\vee\log_2\frac{25}{3} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2^{4{,}5}\vee\frac{25}{3} \;\Leftrightarrow\; 2^9\vee\frac{625}{9} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 512>\frac{625}{9}.$$

Значит, $\frac{1}{3}\log_2\frac{25}{3}<1{,}5$. Тогда условию задачи удовлетворяют все значения $x\in\{0\}\cup(0{,}5;1)\cup\left(1;\frac{1}{3}\log_2\frac{25}{3}\right)$.

Ответ: $\{0\}\cup(0{,}5;1)\cup\left(1;\frac{1}{3}\log_2\frac{25}{3}\right)$.

Системы неравенств с дополнительными условиями

Рассмотрим систему неравенств, в которой из множества ее решений необходимо отобрать решения, удовлетворяющие дополнительному условию.

Пример 151. *Найти сумму целых решений системы неравенств*

$$\begin{cases} \dfrac{2\log_{2x-1}|x|}{\log_{2x-1}(x+7)} \le \dfrac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}, \\ 9^{\log_{\frac{1}{9}}\log_5 x^2} < 5^{\log_{\frac{1}{5}}\log_9 x^2}. \end{cases}$$

Решение. 1. Множество решений первого неравенства системы было получено при рассмотрении примера 39:

$$(-7;-6)\cup[-3;0)\cup(0;1)\cup(1;4].$$

2. Второе неравенство системы определено при условиях

$$\begin{cases} x^2>0, \\ \log_5 x^2>0, \\ \log_5 x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 0, \\ x^2>1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>1. \end{array}\right.$$

Преобразуем это неравенство

$$9^{\log_{\frac{1}{9}}\log_5 x^2} < 5^{\log_{\frac{1}{5}}\log_9 x^2} \Leftrightarrow \log_{x^2}5<\log_{x^2}9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x^2}\frac{5}{9}<0.$$

Последнее неравенство выполняется при $x^2>1$, то есть на всей области определения второго неравенства системы.

3. Получаем решения исходной системы неравенств $(-7;-6)\cup[-3;-1)\cup(1;4]$, содержащие целые решения –3, –2, 2, 3, 4. Сумма целых решений системы равна 4.

Ответ. 4.

Упражнения

В упражнениях 1 – 40 сравните числа:

1. $a=\frac{8}{7}$ и $b=\frac{9}{7}$; **2.** $a=-\frac{6}{11}$ и $b=-\frac{7}{11}$;

3. $a=\frac{6}{9}$ и $b=-\frac{7}{9}$; **4.** $a=-\frac{13}{123}$ и $b=-\frac{13}{129}$;

5. $a=\frac{4}{5}$ и $b=\frac{5}{6}$; **6.** $a=0,(3)$ и $b=\frac{1}{3}$;

7. $a=\frac{124}{119}$ и $b=\frac{137}{129}$. **8.** $a=3^{10}$ и $b=4^{10}$;

9. $a=-0{,}5^{13}$ и $b=-0{,}7^{13}$;

10. $a=0{,}5^{10}$ и $b=0{,}5^{20}$;

11. $a=14^{15}$ и $b=4^{25}$;

12. $a=(2\sqrt{2})^{100}$ и $b=8^{49}$;

13. $a=2^{300}$ и $b=3^{200}$;

14. $a=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{\sqrt{2}}{3}}$ и $b=1$;

15. $a=3^{50}$ и $b=6^{30}$; **16.** $a=3^{52}$ и $b=4^{39}$.

17. $a=2\sqrt{5}$ и $b=\sqrt{19}$;

18. $a=\sqrt[3]{\frac{22}{7}}$ и $b=\sqrt[3]{\pi}$;

19. $a=\sqrt[3]{-\frac{123}{124}}$ и $b=\sqrt[3]{-\frac{122}{123}}$;

20. $a=\sqrt[8]{10}$ и $b=\sqrt[4]{3}$;

21. $a=\sqrt[4]{6+\sqrt{20}}$ и $b=\sqrt{1+\sqrt{5}}$;

22. $a=\sqrt{6}-\sqrt{5}$ и $b=\sqrt{8}-\sqrt{7}$;

23. $a=\sqrt{7}-\sqrt{6}$ и $b=\sqrt{12}-\sqrt{10}$;

24. $a=-3+\sqrt{17}$ и $b=5-\sqrt{15}$.

25. $a=\log_{0,5}5$ и $b=\log_{0,5}6$;

26. $a=\log_2\frac{9}{13}$ и $b=\log_2\frac{11}{15}$;

27. $a=\log_8 5$ и $b=\log_6 5$;

28. а) $a=\log_{0,5}5$ и $b=\log_{0,6}6$;

б) $a=\log_4 0{,}6$ и $b=\log_5 0{,}7$;

в) $a=\log_{0,6}0{,}7$ и $b=\log_{0,5}0{,}8$;

г) $a=\log_3 2$ и $b=\log_4 3$;

29. $a=\log_3 10$ и $b=4(1-\lg 3)$;

30. $a=2^{\log_3 5}$ и $b=5^{\log_3 2}$;

31. $a=4^{\log_5 7}$ и $b=7^{\log_5 4}$;

32. $a=\log_7 29$ и $b=\log_6 13$;

33. $a=\log_2 3+\log_3 2$ и $b=2$;

34. $a=\log_6 7$ и $b=\log_7 8$;

35. $a=\log_3 4$ и $b=\log_5 6$.

36. $a=\log_5 3$ и $b=\dfrac{2}{3}$.

37. $a=\log_2 5$ и $b=2\dfrac{1}{3}$.

38. $a=\log_{\log_3 2}\dfrac{1}{2}$ и $b=1$.

39. $a=\log_3(5+\sqrt{34})$ и $b=\dfrac{7}{3}$.

40. $a=\log_{2+\sqrt{3}} 8$ и $b=1{,}5$.

В упражнениях 41 – 272 решите неравенство:

41. $x^2-x(\cos 2+\cos 3)+\cos 2\cdot\cos 3<0$.

42. $(x-4)^2(x-\sqrt{5})\left(x-2\dfrac{6}{25}\right)\le 0$.

43. $(2x^2-5x+3)(3-x^3)<0$.

44. $(x^2-3x+2)(x^2+x+2011)\le 0$.

45. $\dfrac{x^2-8x+15}{x-5}\ge 0$. **46.** $\dfrac{x^2}{1-\cos x}<\dfrac{x+2}{1-\cos x}$.

47. $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-1}{1-\dfrac{1}{x-7}}\ge 0$. **48.** $\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{2-x}$.

49. $\dfrac{1-4x}{1-x}\le 4$. **50.** $2+\dfrac{3}{x+1}\ge\dfrac{2}{x}>0$.

51. $\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2+5x+3}<\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+7x+4}$.

52. $\dfrac{x^2-4x+4}{(x+1)^2}+\dfrac{x^2+6x+9}{(x-1)^2}\le\dfrac{(2x^2+x+5)^2}{2(x^2-1)^2}$.

53. $\dfrac{x^2-6x+8}{x-1}+\dfrac{x-4}{x^2-3x+2}\le 0$.

54. $(x^2+3x)(2x+3)-16\cdot\dfrac{2x+3}{x^2+3x}\ge 0$.

55. $\dfrac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)}>1$.

56. $\dfrac{1}{x^2-5x+7}\le 5x-x^2-5$.

57. $|x^2+2x-4|>4$.

58. $x^2+|6x-24|\le 16$.

59. $2x-5+2|x-3|<|x+1|$.

60. $|x-2x^2|>2x^2-x$.

61. $2||x-2|-3|<x+4$.

62. $x\big(|x^2-1|-2|x-1|\big)<0$.

63. $|x^3+2x^2+8x-7|\le x^3+4x^2-8x+7$.

64. $|x^3+2x^2-8x|+|x^2-3x-10|\le$
$\le|x^3+3x^2-11x-10|$.

65. $\big||x^2-8x+2|-x^2\big|\ge 2x+2$.

66. $\left|\dfrac{2x-1}{x-2}\right|>2$. **67.** $\left|\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}\right|\le 1$.

68. $\dfrac{(x+1)(x+2)}{x^2-|x|-2}\ge -3x$.

69. $\dfrac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|}\le 0$.

70. $\dfrac{2|x-3|}{|x-5|}<\dfrac{|x-5|}{|x-3|}$.

71. $|x+2|\ge 3+\dfrac{1}{5-|x+2|}$.

72. $\dfrac{(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2}{10x^2-17x-6}\ge 0$.

73. $\left(2x-3-\dfrac{5}{x}\right)\left(\dfrac{14}{x+1}+2+\left(\sqrt{-1-2x}\right)^2\right)\ge 0$.

74. $(x^2-8x+12)\sqrt{x^2-10x+21}\ge 0$.

75. $\sqrt{-x^2-5x}>\sqrt{-x-3}$.

76. $\sqrt{4x-16}<7-x$. **77.** $8-2x-\sqrt{x+1}<0$.

78. $\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}\ge\dfrac{2x-4}{3}$. **79.** $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}}>-2$.

80. $x^2+25\ge 8\sqrt{5-x}+10x$.

81. $\sqrt{x+1}+\sqrt{12-x}\le 5$.

82. $\sqrt{x+5}-\sqrt{3x-5}\ge 2$.

83. $\sqrt{4x-x^2-3}\ge\sqrt{x^2-7x+12}-\sqrt{x^2-5x+6}$.

84. $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9} \ge \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}$.

85. $\frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \le 0$.

86. $\frac{\sqrt{x^2-5x}-4x+26}{7-x} > 2$.

87. $\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{x+1} \le x$.

88. $\frac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1} \le 0$.

89. $\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}$.

90. $\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}-2} \le 3$. **91.** $\sqrt{4-x^2} \ge \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

92. $\sqrt[3]{x^3+2} < |x|$. **93.** $\sqrt{6x-3} < |x+1|$.

94. $\frac{x^2-4x+3}{\sqrt{x-|2x-1|}} \ge 0$.

95. $\sqrt{2x^2+3x-35}+\sqrt{2x^2+x-36} \le |2x+1|$.

96. $\frac{x^3-8+6x(2-x)}{|3-4x|} \le \sqrt{4x-3}$.

97. $\left(x+\frac{4}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2 \ge$

$\ge 5\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2$.

98. $(1-2|x|)\cdot\sqrt{1+x^2} < (4x-1)\sqrt{4x^2-4x+2}$.

99. $\sqrt{2x+44}+\sqrt{28-2x} \ge 4\cdot\sqrt[4]{x^2+8x+97}$.

100. $(0,2)^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$.

101. $\left(\frac{7}{2}\right)^{x-6}\cdot\left(\frac{49}{4}\right)^{\frac{2}{x}} \le \frac{4}{49}$.

102. $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \ge \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

103. $3^{2x-1} < 11^{3-x}$.

104. $2^{2x+1}-3^{2x+1} < 3^{2x}-7\cdot 2^{2x}$.

105. $9\cdot 3^{2x+2}+3\cdot 3^{2x+1}-9^x \le 89$.

106. $3^{1+x}\cdot 2^{1-x}+3^x\cdot 2^{-x} < 10,5$.

107. $2f(x)+f(1-x) < \frac{1}{3}$, где $f(x)=3^{x-x^2}$.

108. $4^{x-1}+2^{x-2}-\frac{3}{2} \ge 0$.

109. $4^{\sqrt{x}}-9\cdot 2^{\sqrt{x}}+8 < 0$.

110. **(МГАП).** $3\cdot 49^x-16\cdot 21^x+21\cdot 9^x < 0$.

111. $5\cdot 3^{2x}+15\cdot 5^{2x-1} \le 8\cdot 15^x$.

112. **(МГАП)** $4^{x^2-x}-10\cdot 2^{x^2}+2^{2x+4} \ge 0$.

113. $2^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}-3^{2x^2-6x+3} \ge 0$.

114. $2^{x^2+3x-3}-2^{x^2+3x-5}-96 \ge 0$.

115. $2^{2x-1}-2^{x-1}\left(2x^{0,5}+x\right)+x\cdot x^{0,5} > 0$.

116. $5\cdot 3^{2x^2-3x-1}-2\cdot 3^{2x^2-3x}+3^{2x^2-3x-3} \ge -72$.

117. $3^{2p^2-p+2}-5^{2p^2-p-1} > 5^{2p^2-p+1}+3^{2p^2-p-1}$.

118. $2^{\sqrt{2x^2-1}} < 4^x-14\cdot 0,25^{2-x}$.

119. $(3+2\sqrt{2})^x+3 < 4\cdot(3-2\sqrt{2})^x$.

120. $2^x\cdot 5^{\frac{1}{x}} > 10$. **121.** $5^{x^2-2x} > 2^{x-2}$.

122. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \ge x+4$.

123. $2^{x^2-4x+5} \le 4x-2-x^2$.

124. $\arccos 2^{x+1}\left(10^{1+x^2}-10^{1-x^2}-99\right) \le 0$.

125. $\left(3^{x+2}-\frac{1}{27}\right)\left(5^{3-2x}-0,2\right) \ge 0$.

126. $x^2\cdot 2^{x+2}-12x^2\cdot 3^x+3^{x+1} > 2^x$.

127. $\frac{8}{11^x+120} \le \frac{8}{11^{x+2}}$.

128. **(МИФИ).** $\frac{7^x-30}{7^{x-1}+1} \le -14$.

129. $3^{x-1} \ge \frac{2-3^x}{3^x-4}$.

130. **(МИЭМ).** $\frac{3^x-25}{x+1} \le \frac{3^x-25}{x-3}$.

131. $\frac{12^x-4^{x+1}-3^{x+1}+12}{x^2-2x+1} < 0$.

132. $\frac{(x+4)\left(3^{\frac{1}{x+1}}+0,3\right)}{x-3} \le 0$.

133. $\dfrac{(2x-5)\left(32^{\frac{1}{x}}-4\right)}{(3^x-8)(x^4+4x+20)}\ge 0$.

134. $\dfrac{(2^x-32)(3^x+27)}{x^2+5x-14}\le 0$.

135. $\dfrac{4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\le 0$.

136. $8\cdot\dfrac{3^{x-2}}{3^x-2^x}>1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

137. $9^{|x|}+6\cdot 3^x\ge 11$.

138. $\left(2^{\frac{x-4}{2}}-1\right)\sqrt{2^x-10\sqrt{2^x}+16}\ge 0.$

139. $\sqrt{17\cdot 9^x-4^x}\ge 3^x-3\cdot 2^x.$

140. $\dfrac{21-2^x-2^{6-x}-|3-2^x|}{5-|2^x-3|}\ge 1.$

141. $\left|\left|3^x+4x-9\right|-8\right|\le 3^x-4x-1$.

142. $\left(\dfrac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x}>\left(\dfrac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}$.

143. $\dfrac{\sqrt{1+3^{-x}}}{\sqrt{1+3^{-x}}-\sqrt{1-3^{-x}}}-\dfrac{3^{-x}-1}{\sqrt{1-9^{-x}}+3^{-x}-1}\ge$

$\ge\dfrac{1+\sqrt{1-9^{-x}}}{3^{-x}}$.

144. $\log_{5x-1}2\le 0$. **145.** $\log_{3x+4}0{,}2>0$.

146. $\log_{\frac{1}{31}}(4x-5)^2<\log_{\frac{1}{31}}(5x-7)^2$.

147. $\log_{\sin 91^\circ}(3x-8)\ge\log_{\sin 89^\circ}4$.

148. $\log_{\frac{\pi}{3}}(x^2-2x-9)\ge\log_{\frac{\pi}{3}}(x+1)$.

149. $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_3(x-2).$

150. **(МГУ).** $2\ln\dfrac{1}{3x-2}+\ln(5-2x)\ge 0$.

151. $\log_2\left(\log_3\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right)<\log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right)$.

152. $9^{\log_{\frac{1}{9}}\log_5 x^2}<5^{\log_{\frac{1}{5}}\log_9 x^2}$.

153. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5>1$.

154. $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{2x-1}{x+2}>1$. **155.** $\dfrac{\log_2 0{,}3}{\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{7-x}{6-2x}}<0$.

156. $\log^2_{0,1}x-1\le 0$.

157. $\log_{\sqrt{11}-\sqrt{5}}(x^2+2x+16-2\sqrt{55})\le 2$.

158. $\left|\log_3(x+2)\right|>2$. **159.** $\log_2\left|1+\dfrac{9}{x^2}\right|<1$.

160. $2<\left|\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)-4\right|\le 3$.

161. $\log_{0,1}\log_2\dfrac{x^2+1}{|x-1|}<0.$

162. $\log_{\frac{1}{2}}x>\log_{\frac{1}{3}}x.$

163. **(ЕГЭ, 2010).**

$\dfrac{\log_4(2-x)-\log_{14}(2-x)}{\log_{14}x-\log_{49}x}\le\log_4 49$.

164. $\log_2\dfrac{3x-2}{x-1}+3\log_8\dfrac{(x-1)^3}{3x-2}<1$.

165. $\log_3((3x^2-1)(6x-7))+\log_{\frac{1}{3}}(6x-7)\ge 1$.

166. $\log_2(x^2-4)-3\log_2\dfrac{x+2}{x-2}>2.$

167. $\log_2(x^2+4x)+\log_{0,5}\dfrac{x}{4}+2\ge$

$\ge\log_2(x^2+3x-4)$.

168. **(МИОО, май 2010).**

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(2x^2-3x-2)\le$

$\le\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x-1)^2+\log_3 4-2$.

169. $\log_{13}(x^2+2x+4)+\log_{13}(x-2)\le$

$\le\log_{13}(x^3-x^2+4x-3)$.

170. $\log_5(x+2)+\log_5(1-x)\le$

$\le\log_5\left((1-x)(x^2-8x-8)\right)$.

171. $\log_3\left((x+2)(x+4)\right)+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7$.

172. (ЕГЭ 2011).

$$3\cdot\log_{11}(x^2+8x-9)\le 4+\log_{11}\frac{(x-1)^3}{x+9}.$$

173. $\log_{\frac{4}{3}}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)+\log_{\frac{4}{9}}\left(\frac{2}{3}\right)\ge 0$.

174. $\log_2\left(\sqrt{x^2-4x}+3\right)>$

$$>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}\right)+1.$$

175. $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_3 x>1$.

176. (ЕГЭ 2010).

$$\frac{\log_{2^{x+4}}4}{\log_{2^{x+4}}(-8x)}\le\frac{1}{\log_2\log_{\frac{1}{2}}2^x}.$$

177. (ЕГЭ, 2010) $\dfrac{\log_{9^{x-6}}(x+2)}{\log_{9^{x-6}}x^2}<1$.

178. (ЕГЭ 2011). $\dfrac{2\log_3(x^2-4x)}{\log_3 x^2}\le 1$.

179. (ЕГЭ 2011). $\dfrac{2\log_{x+4}(x^2-2x)}{\log_{x+4}x^2}\ge 1$.

180. $\log_4(x+2)\cdot\log_x 2\le 1$.

181. $\dfrac{\log_3(1-2x-x^2)}{\log_{3-\sqrt{5}}(x+1+\sqrt{2})}\ge 0$.

182. $\sqrt{\log_{\mathrm{tg}\frac{3\pi}{16}}(x-2)}\ge 1$.

183. $\log_2^2(x^2-2x)+\log_{0,5}(x^2-2x)^3+2\le 0$.

184. $7^{-|x-3|}\cdot\log_2(6x-x^2-7)\ge 1$.

185. $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\dfrac{x-1}{2-x}>-1$.

186. $\log_4 x^2+\log_2^2(-x)>6$.

187. $\log_2^2 x^2-15\cdot\log_2 x-4\le 0$.

188. $\dfrac{\log_2 x-5}{1-2\log_2 x}\ge 2\log_2 x.$

189. $\dfrac{1-\sqrt{1-4\log_8^2 x}}{\log_8 x}<2.$

190.

$$\sqrt{\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+4\log_2\sqrt{x}}<\sqrt{2}\left(4-\log_{16}x^4\right).$$

191. $49^{\log_x 5}-7^{\log_x 5}-2\ge 0$.

192. $\dfrac{\lg(3x+2\sqrt{x}-1)}{\lg(5x+3\sqrt{x}-2)^5}\ge\dfrac{\log_{32}11}{\log_2 11}.$

193. $(3-x)\log_3(x+5)\le 0$.

194. $\dfrac{\log_3 x}{\log_3(3x+2)}<1.$ **195.** $\dfrac{x^2-4}{\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)}<0.$

196. $\dfrac{\log_{x+2,5}^2(1,5-x)}{(x+0,5)(x-1)}\ge 0$.

197. $\dfrac{\lg x}{x^2-x-6}\ge 0$. **198.** $\dfrac{(x-0,5)(3-x)}{\log_2|x-1|}>0$.

199. $\dfrac{\log_4\left(2^x-1\right)}{x-1}\le 1$.

200. $\sqrt{8-2^x}\cdot\log_2\dfrac{4-x}{x+2}\ge 0$.

201. $\dfrac{\log_{0,2}\dfrac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\dfrac{1}{3-2x}}\ge 0.$

202. $\dfrac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)}\le 0.$

203. $\dfrac{\log_2\left(2x^2-13x+20\right)-1}{\log_3(x+7)}\le 0.$

204. $\dfrac{\log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)}{x}\ge 1.$

205. $\dfrac{x+1-\log_3 9x}{1-\log_3 x}\ge 1.$

206. $\dfrac{\sqrt{2+2x-x^2}+x-2}{\log_3\left(\dfrac{5}{2}-x\right)+\log_3 2}\le 0.$

207. $\dfrac{\log_5(x^2-4x-11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}\ge 0.$

208. $\log_{6x+11}5\ge 1$.

209. $\log_{\frac{2x-1}{x}}5<\log_{\frac{2x-1}{x}}x$.

210. $\log_x(3x^2-6x+2)\le\log_x\frac{1}{x+2}+3$.

211. $\log_{x+4}(5x+20)\le\log_{x+4}(x+4)^2$.

212. $\log_x(7-x)<\log_x\left(x^3-6x^2+14x-7\right)-$
$-\log_x(x-1)$.

213. $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(2x^2+x-1\right)\ge\log_{\frac{3x-1}{x+2}}\left(11x-6-3x^2\right)$.

214. $\log_{6x^2-5x+1}2>\log_{\sqrt{6x^2-5x+1}}2$.

215. $\log_{x+1}(2x^2-3x+1)\le 2$.

216. $\log_{x+2}(9x^2+15x-6)<2$.

217. $\log_{1-x}(2x^2+3x+1)\ge 2$.

218. $\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)\le 2$.

219. $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}-x-1\right)\ge 1$.

220. $\log_{2x+3}x^2<1$.

221. $\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{5}{2}x-1\right)\ge -2$.

222. $\log_{\frac{3x-1}{3x+1}}\left(x-\frac{1}{3}\right)\ge 1$.

223. $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right)>0$.

224. $\log_{x^2}\left(\frac{4x-5}{|x-2|}\right)\ge\frac{1}{2}$.

225. (**ЕГЭ 2010**).
$\log_{(x+2)^2}\left(x(x+1)(x+3)(x+4)\right)>1$.

226. $\frac{\log_{2x-1}\left(\log_2(x^2-2x)\right)}{\log_{2x-1}(x^2+6x+10)}\le 0$.

227. $\frac{\lg(5y^2-2y+1)}{\lg(4y^2-5y+1)^3}\le\frac{\log_{5^3}7}{\log_5 7}$.

228. $\log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x\sqrt{6-x}\right)>0$.

229. $\log_{10-x}(9{,}5-x)^2>2\log_{x-8}(x-8)$.

230. $\log_{x+2}(x^2-x+1)>\log_{\frac{x-3}{x-5}}1$.

231. $\log_{x+2}(7x^2-x^3)+\log_{(x+2)^{-1}}(x^2-3x)\ge$
$\ge\log_{\sqrt{x+2}}\sqrt{5-x}$.

232. $\log_{2^x-1}\left(9\cdot 2^{3-2x}-2^{x+1}\right)\le 2$.

233. $\log_{2-2^y}\frac{2^{2y+5}-7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^y}{2^{1-y}-1}+1\le 0$.

234. $\log_x\left(\log_9\left(3^x-9\right)\right)<1$.

235. $\log_{\frac{x}{4}}\left(\log_x\sqrt{4-x}\right)\le 0$.

236. $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0$.

237. $\log_{x^2+2x-3}\frac{|x+4|-|x|}{x-1}>0$.

238. $\frac{(\log_3(10x+3))\cdot(\log_3(3x+10))}{(\log_3 10x)\cdot\log_3 x}\ge 0$.

239.
$\log_{x+2}\left(36+16x-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+2}(x-18)^2\ge 2$.

240. $\frac{6}{2x+1}>\frac{1+\log_2(x+2)}{x}$.

241. $\log_x 2x\le\sqrt{\log_x(2x^3)}$.

242. $\frac{(|2x+1|-x-2)\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+4)+1\right)}{2^{x^2+1}-2^{|x|}}\ge 0$.

243. (**ЕГЭ 2010**).
$\frac{2\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)}\le\frac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}$.

244. (**ЕГЭ 2010**).
$\frac{\log_{3^{x+4}}27}{\log_{3^{x+4}}(-81x)}\le\frac{1}{\log_3\log_{\frac{1}{3}}3^x}$.

245. (**ЕГЭ 2011**).
$\frac{\log_x 2x^{-1}\cdot\log_x 2x^2}{\log_{2x}x\cdot\log_{2x^{-2}}x}<40$.

246. $\frac{\log_{1-4x^2}(|x|-4)^2}{\log_{1-4x^2}\left(10x^2+5x+\frac{1}{2}\right)}\le 2$.

247. $\left(x+\frac{3}{x}\right)\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2\ge$
$\ge 4\cdot\left(\log_{(5-x)}\left(x^2-6x+9\right)\right)^2$.

248.
$$\log_{x+1}\left(19+18x-x^2\right)-\frac{1}{16}\log_{x+1}^2(x-19)^2 \ge 2.$$

249. $\log_{5-4x-x^2}\left(5-9x-2x^2\right)\le \log_{1-x}(1-2x).$

250.
$$\frac{\log_{2x-3}^2\dfrac{1}{3x-5}+\log_{2x-3}\left(9x^2-30x+25\right)+7}{2\log_{2x-3}\left(6x^2-19x+15\right)-1}\le 3.$$

251. $5^{\log x^2}\cdot\log_2 x+5^{\log_2 x}\cdot\log_x 2\le 10.$

252. $x^{\lg x}>10x^{-\lg x}+3.$

253. $\left(\dfrac{x}{10}\right)^{\lg x-2}<100.$

254. $x^{\lg^2 x-3\lg x+1}>1000.$

255. $10^{x^{\lg x}}\cdot 10^{\sqrt{10}^{\lg^2 x}}<1000\,000.$

256. $3^{\frac{(\log_3 x)^2}{4}}\le \dfrac{x^{\frac{\log_3 x}{3}}}{3}.$

257. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}\ge 2.$

258. $\log_2(2^x+1)\cdot\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}+2)>-2.$

259. (МИОО, 2011).
$$(x+1)\log_3 6+\log_3\left(2^x-\frac{1}{6}\right)\le x-1.$$

260. $x\ge\log_2\left(101\cdot 10^x-10^{2+2x}\right)-$
$$-\log_5\left(101\cdot 2^x-5^{2+x}\cdot 2^{2+2x}\right).$$

261. $\log_{\frac{1}{2}}\left(5^{1+\lg x}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+\lg x}\right)\ge -1+\lg x.$

262. (**ЕГЭ 2010**).
$$\log_5\left((3^{-x^2}-5)(3^{-x^2+9}-1)\right)+\log_5\frac{3^{-x^2}-5}{3^{-x^2+9}-1}>$$
$$>\log_5(3^{7-x^2}-4)^2.$$

263. $\left(x+\dfrac{8}{x}\right)\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|\ge$
$$\ge 9\cdot\left|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)\right|.$$

264.
$$\left|\log_{x+1}\sqrt{(x-2)^4}+2\right|\ge -3+\log_{\frac{1}{x+1}}\sqrt{(x-2)^6}.$$

265. $\dfrac{\sqrt{7+12x-4x^2}}{\cos x}\le 0.$

266. $\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{3}\sin x\right)\sqrt{4x-x^2+5}\ge 0.$

267. $\sin^2 3x-\cos^2 3x\le -1.$

268. $\arcsin\dfrac{3}{x}>\dfrac{\pi}{6}.$

269. $(x^2-2x)(\operatorname{tg}^2 x+2^{x+1})\le 0.$

270. $\sqrt{\cos x-1}\ge x^2-16.$

271. $(10x-x^2-24)\log_2\left(\sin^2\dfrac{\pi}{2}x+1\right)\ge 1.$

272. $5^{2x^2-2x+1}\le$
$$\le\sqrt{3\sin\left(\pi x-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)+4\cos\left(\pi x-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}.$$

273. При каких p число 2 является решением неравенства
$$\log_{\frac{x}{2+p^2}}\left(0{,}5p^2+0{,}5-x^2+\frac{6p}{x}\right)\ge -1?$$

В упражнениях 274 – 286 найдите область определения функций:

274. $y=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}}.$

275. $y=\sqrt{1-\log_8(x^2-4x+3)}.$

276. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}^2(x-3)-1}.$

277. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2-1}.$

278. $y=\sqrt[4]{2-\lg|x-2|}.$

279. $y=\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-\dfrac{3x}{2}\right)\right).$

280. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\log_3\dfrac{x+1}{x-1}}.$

281. $y=\sqrt{\sin x-0{,}5}+\log_3(25-x^2).$

282. $f(x)=\left(64\cdot 2^{2-x}-0{,}125^{-2-\sqrt{2-x}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

283. $y=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{3^{2x}-4\cdot 3^x+3}$.

284. $y=\log_5\log_{0,5}\dfrac{3-x}{x+2}$.

285. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\log_6(x-3)}$.

286. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-8{,}3x-17}}{3-x^2}+\ln(16-x^2)$.

287. При каких значениях аргумента график функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+5}{2x+1}}$ лежит выше графика функции $g(x)=\sqrt{5x-3}$?

288. (ЕГЭ 2005). Найдите все значения x, для которых точки графика функции $f(x)=\dfrac{25\cdot 25^x-26\cdot 5^x}{42-10x}$ лежат ниже соответствующих точек графика функции $g(x)=\dfrac{-1}{42-10x}$.

289. (ЕГЭ 2005). Найдите все значения x, для которых точки графика функции $f(x)=\dfrac{\log_{0,7}^2(23+4x)}{45-4x}$ лежат выше соответствующих точек графика функции $g(x)=\dfrac{83}{4x-45}$.

290. (ЕГЭ 2006). Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x)=\dfrac{5x-5}{4x-6}$ и $g(x)=1$ меньше, чем 0,5.

291. (ЕГЭ 2006). Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x)=\log_{\sqrt{2}}(5x+14)$ и $g(x)=10$ меньше, чем 2.

292. (МАИ). Определите множество всех значений x, при которых функции $f(x)=\dfrac{-5}{x-3}$ и $g(x)=2x+4$ имеют одинаковые знаки.

293. (МАИ). Найдите множество значений x, при которых значения функции $f(x)=\dfrac{x}{3-x}$ принадлежат промежутку $(0;1)$.

294. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\sqrt{3+2x-x^2}\ge 0$, удовлетворяющих условию $\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)>0$.

В упражнениях 295 – 398 решите систему неравенств:

295. $\begin{cases}\dfrac{2^{4x+2}}{4^{x+1}}>1,\\ 1+\log_3(x-4)\le\log_3(x+21).\end{cases}$

296. $\begin{cases}9^x-10\cdot 3^x+9<0,\\ \dfrac{2}{x}<2+\dfrac{3}{x-1}.\end{cases}$

297. $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{32}}\cdot 8^{3x^2}>2^{x+3},\\ |\sqrt{2}x-1|=\sqrt{2}x-1.\end{cases}$

298. $\begin{cases}3^{x+2}+9^{x+1}-810>0,\\ \log_3^2 x+4\log_3 x+3\ge 0.\end{cases}$

299. (**МИОО**). $\begin{cases}9^{x+1}+3\ge 28\cdot 3^x,\\ \log_2(x^2-2x)\le 3.\end{cases}$

300. (**МИОО**). $\begin{cases}8\cdot 4^x-65\cdot 2^x+8\le 0,\\ \log_{|x|}^2(x^4)+\log_3(x^2)\le 18.\end{cases}$

301. $\begin{cases}(x^2-8x+12)\sqrt{x^2-10x+21}\ge 0,\\ 4^{x-1}+2^{x-2}-\dfrac{3}{2}\ge 0.\end{cases}$

302. $\begin{cases}\log_2\dfrac{3x-2}{x-1}+3\log_8\dfrac{(x-1)^3}{3x-2}<1,\\ \dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}\ge\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}.\end{cases}$

303. (**МИОО**).
$$\begin{cases}\dfrac{3\cdot 64^x+2^x-70}{64^x-2}\ge 3,\\ \log_3^2(x+3)-3\log_3(x+3)+2\le 0.\end{cases}$$

304. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \le 0, \\ 9^{\log_{\frac{1}{9}}\log_5 x^2} < 5^{\log_{\frac{1}{5}}\log_9 x^2}. \end{cases}$

305. $\begin{cases} 2^{x^2+3x-3} - 2^{x^2+3x-5} - 96 \le 0, \\ \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2x-1}{x+2} > 1. \end{cases}$

306. $\begin{cases} \dfrac{2^{x+1}-45}{2^{x-1}-4{,}4} \le 0, \\ \log_2(x-3) < \log_{0,5} \dfrac{1}{6-x}. \end{cases}$

307. $\begin{cases} 2\cdot 3^{2x+4} - 245\cdot 3^x + 3 \le 0, \\ \log_2(x^2+4x+5) > 2. \end{cases}$

308.
$\begin{cases} 5\cdot 3^{2x} + 15\cdot 5^{2x-1} \ge 8\cdot 15^x, \\ \log_2\left(\log_3\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right) < \log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right). \end{cases}$

309. $\begin{cases} \dfrac{(2^x-32)(3^x+27)}{x^2+5x-14} \le 0, \\ \log_{0,1}^2 x - 1 \le 0. \end{cases}$

310. $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x \ge x+4, \\ \log_2(x^2-4) - 3\log_2 \dfrac{x+2}{x-2} > 2. \end{cases}$

311. $\begin{cases} \dfrac{2^{4x+2}}{4^{x+1}} > 1, \\ 1 + \log_3(x-4) \le \log_3(x+21). \end{cases}$

312. $\begin{cases} \dfrac{\log_3(1-2x-x^2)}{\log_{3-\sqrt{5}}(x+1+\sqrt{2})} \ge 0, \\ \dfrac{\log_{0,5}(1-2x)}{\log_2\left(\dfrac{8}{3}x\right)} \le -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

313. $\begin{cases} \dfrac{7^x-30}{7^{x-1}+1} \le -14, \\ \log_3(1-2x) \ge \log_3(5x-2). \end{cases}$

314. $\begin{cases} 2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}, \\ \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(-x^2+6x+3) \ge -2. \end{cases}$

315. $\begin{cases} 4\cdot 3^{x+2} - 2\cdot 5^{x+2} \le 5^{x+3} - 3^{x+3}, \\ \lg(x^2-2x-2) \le 0. \end{cases}$

316. $\begin{cases} 5^{2x+1} > 5^x + 4, \\ \log_3(x^2-x) \ge \log_3(3x+2). \end{cases}$

317. $\begin{cases} 2\cdot 3^{2x^2} + 4 \le 3^{x^2+2}, \\ \log_8(x^2-4x+3) < 1. \end{cases}$

318. $\begin{cases} 3^x < 1 + 12\cdot 3^{-x}, \\ 2\ln \dfrac{1}{3x-2} + \ln(5-2x) \ge 0. \end{cases}$

319. $\begin{cases} \dfrac{x-2\sqrt{x}-8}{2^x-4} \ge 0, \\ \dfrac{\log_2 x - 5}{1-2\log_x 2} \ge 2\log_2 x. \end{cases}$

320. $\begin{cases} \dfrac{2x^2-11x+15}{2^x-6} < 0, \\ \dfrac{1}{2}\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}} x^2 \ge \log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}} \sqrt{2x+3}. \end{cases}$

321. $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}(2x^2-3x+1)} < 1, \\ 2 + \dfrac{\log_2^2 x}{1+\log_2 x} > \log_2 x. \end{cases}$

322. $\begin{cases} \dfrac{4^x}{2^x-1} \le \dfrac{2^x+12}{3}, \\ \log_4(3\cdot 4^{x+1} - 8) < 2x+1. \end{cases}$

323. $\begin{cases} 2^x + 2^{|x|} \ge 2\sqrt{2}, \\ \log_{0,5}(6|x|-3) \le \log_{0,5}(4-x^2). \end{cases}$

324. $\begin{cases} \dfrac{2^{x+1}-22}{2^x-2} \ge 1, \\ \log_5^2 x + |\log_5 x| \ge 6. \end{cases}$

325. $\begin{cases} \dfrac{1}{4^{\sqrt{x}} - 3\cdot 2^{\sqrt{x}} + 2} < \dfrac{1}{6}, \\ \log_{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{5}{2}x - 1\right) \ge -2. \end{cases}$

326. (**МИОО**).
$$\begin{cases}25^x-30\cdot 5^x+125\ge 0,\\ \log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1)\le 0.\end{cases}$$

327. (**МИОО**).
$$\begin{cases}x^2+2^x+36\le 68\cdot\log_3(x+3),\\ 12x+2^x\ge 68\cdot\log_3(x+3).\end{cases}$$

328. (**МИОО**). $\begin{cases}\log_{\log_x 2x}(5x-2)\ge 0,\\ 15^x-9\cdot 5^x-3^x+9\le 0.\end{cases}$

329. (**МИОО**). $\begin{cases}\log_{\log_x 3x}(4x-1)\ge 0,\\ 21^x-9\cdot 7^x-3^x+9\le 0.\end{cases}$

330. (**МИОО**). $\begin{cases}6^x+\left(\dfrac{1}{6}\right)^x>2,\\ 2^{x^2}\le 4\cdot 2^x.\end{cases}$

331. (**МИОО**). $\begin{cases}7^x+\left(\dfrac{1}{7}\right)^x>2,\\ 3^{x^2}\le 9\cdot 3^{-x}.\end{cases}$

332. (**МИОО**).
$$\begin{cases}\log_2(100-x^2)\le 2+\log_2(x+1),\\ \log_{0,3}(2\,|\,x+5\,|+|\,x-11\,|-30)<1.\end{cases}$$

333. (**МИОО**).
$$\begin{cases}\log_4(81-x^2)\le 2+\log_4(x+4),\\ \log_{0,2}(3\,|\,x+4\,|+|\,x-10\,|-38)<1.\end{cases}$$

334. (**Демовариант ЕГЭ 2012 и 2013**).
$$\begin{cases}4^x\le 9\cdot 2^x+22,\\ \log_3(x^2-x-2)\le 1+\log_3\dfrac{x+1}{x-2}.\end{cases}$$

335 (ЕГЭ 2013).
$$\begin{cases}\log_{6-x}\dfrac{(x-6)^2}{x-2}\ge 2,\\ \dfrac{x^2-x-14}{x-4}+\dfrac{x^2-8x+3}{x-8}\le 2x+3.\end{cases}$$

336. (**МИОО**).
$$\begin{cases}16^x+12^x-2\cdot 9^x<0,\\ \log_{1-\frac{x^2}{26}}(x^2-10\,|\,x\,|+26)-\log_{1+\frac{x^2}{26}}(x^2-\\ \qquad -10\,|\,x\,|+26)\ge 0.\end{cases}$$

337. (ЕГЭ 2013).
$$\begin{cases}\log_{7-2x}(x+6)\le 0,\\ x-\dfrac{x-3}{x+6}-\dfrac{x^2+27x+90}{x^2+8x+12}\le -1.\end{cases}$$

338. (**МИОО**). $\begin{cases}4^{x+1}-17\cdot 2^x+4\le 0,\\ \log^2_{|x|}x^2+\log_2 x^2\le 6.\end{cases}$

339. (**МИОО**). $\begin{cases}4\log_9(x+4{,}5)-1\ge 3^{4x^2-9},\\ 3-4\log_9(x+4{,}5)\ge 3^{9-4x^2}.\end{cases}$

340. (**МИОО**). $\begin{cases}\log_7(x^2-9)\le 1\\ \dfrac{2x^2+x-28}{6^{x-6}+5^{x-5}-4}\le 0.\end{cases}$

341. (**МИОО**). $\begin{cases}\log^2_7(x^2+4x-20)\le x-3\\ \log^2_7(x^2+2x-14)\le 3-x.\end{cases}$

342. $\begin{cases}5\cdot 3^{2x^2-3x-1}-2\cdot 3^{2x^2-3x}+3^{2x^2-3x-3}\ge -72,\\ \log_{\frac{1}{3}}(x+1)\le\log_3(x-2).\end{cases}$

343. $\begin{cases}4^{x^2-x}-10\cdot 2^{x^2}+2^{2x+4}\ge 0,\\ \log_{9x}3x+\log_{3x^2}9x^2\le\dfrac{5}{2}\end{cases}$

344. $\begin{cases}(2+\sqrt{3})^{\log_2 x}+(2-\sqrt{3})^{\log_2(4x)}\le\dfrac{4}{2+\sqrt{3}},\\ \log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x+3)-2\log_{\frac{1}{3}}(4-x)\ge 0.\end{cases}$

345. $\begin{cases}\dfrac{9^{x+0,5}+1}{3-3^{2x}}\le 3^{2x}+1,\\ \dfrac{\log_3(1-2x-x^2)}{\log_{3-\sqrt{5}}(x+1+\sqrt{2})}\ge 0.\end{cases}$

346. (**МИОО**).
$$\begin{cases}(9\cdot 9^x-10\cdot 3^x+1)\cdot\log_{x+1}|\,x-3{,}5\,|\ge 0,\\ 9^{x+1}+\log_{x+1}|\,x-3{,}5\,|+1\ge 10\cdot 3^x.\end{cases}$$

347. (**МИОО**).
$$\begin{cases}4^{x+1}-33\cdot 2^x+8\le 0,\\ 2\log_2\dfrac{x-1}{2x+3}+\log_2(2x+3)^2\ge 2.\end{cases}$$

348. (**МИОО**).
$$\begin{cases}2^x+16\cdot 2^{-x}\ge 17,\\ 2\log_9(4x^2+1)\le\log_3(3x^2+4x+1).\end{cases}$$

349. (**МИОО**). $\begin{cases} 4^x - 6\cdot 2^x + 8 \ge 0, \\ \log_3 \dfrac{2x^2+3x-5}{x+1} \le 1. \end{cases}$

350. (**МИОО**). $\begin{cases} 4^{x-3} + 2^x\left(\dfrac{x}{8} - 2\right) - 16x \le 0, \\ 7^x - 7^{1-x} + 6 > 0. \end{cases}$

351. (**МИОО**). $\begin{cases} \log_{(x-1)^2}(x^2-4x+4) < 0, \\ \log_2(x^2-3x+3) > 1. \end{cases}$

352. (**ЕГЭ 2013**).

$$\begin{cases} \dfrac{1}{5x-12} + \dfrac{2x^2-6x+1}{x-3} \ge 2x, \\ \log_{x+1}(2x+7)\cdot \log_{x+1}\dfrac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4} \le -2. \end{cases}$$

353. (**МИОО**).

$$\begin{cases} 7^{x-1} + 7^x + 7^{x+1} > 171, \\ \log_3 \dfrac{1}{x} + \log_3(x^2+3x-9) \le \\ \qquad \le \log_3\left(x^2 + 3x + \dfrac{1}{x} - 10\right). \end{cases}$$

354. (**МИОО**).

$$\begin{cases} 9^{x-3} - 9^{x-2} + 9^{x-1} > 511, \\ \log_7 \dfrac{3}{x} + \log_7(x^2-7x+11) \le \\ \qquad \le \log_7\left(x^2 - 7x + \dfrac{3}{x} + 10\right). \end{cases}$$

355. (**МИОО**).

$$\begin{cases} 9^{x+1} - 244\cdot 3^x + 27 \le 0, \\ 2\log_2 \dfrac{x-1}{10x+11} + \log_2(10x+11)^2 \ge 2. \end{cases}$$

356. (**МИОО**).

$$\begin{cases} 4^x - 12\cdot 2^x + 32 \ge 0, \\ \log_x(x-2)\cdot \log_x(x+2) \le 0. \end{cases}$$

357. (**МИОО**). $\begin{cases} 17\cdot \log_{17}(x+14) \ge x^2 + 8, \\ 17\cdot \log_{17}(x+14) \le 6x - 1. \end{cases}$

358. (**МИОО**). $\begin{cases} 2^x + \dfrac{16}{2^x} \ge 10, \\ \log_{x+2}(x-2) \le 0. \end{cases}$

359. (**МИОО**). $\begin{cases} 3\cdot 9^x - 28\cdot 3^x + 9 \le 0, \\ \log_{x^2}(x-1)^2 \le 1. \end{cases}$

360. (**МИОО**). $\begin{cases} 13^{x-6} + \ln^2(x-7) \ge 13, \\ 7 + \sqrt{13-x} \ge 7^{x-12}. \end{cases}$

361. (**МИОО**). $\begin{cases} \sqrt{x+3} + \log_2(x+5) \ge 0, \\ 8\cdot 4^x - 33\cdot 2^x + 4 \ge 0. \end{cases}$

362. (**ЕГЭ 2013**).

$$\begin{cases} 4^x - 29\cdot 2^x + 168 \le 0, \\ \dfrac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \ge x^2 - \dfrac{1}{x-4} + \dfrac{5}{x}. \end{cases}$$

363. (**МИОО**).

$$\begin{cases} \dfrac{9\cdot 2^x - 24}{2^x - 4} \ge 2^x + 4, \\ \log_2(x+1) \ge \dfrac{\log_2(x+1)}{\log_2(x+1) - 1}. \end{cases}$$

364. (**МИОО**). $\begin{cases} 9^x - 4\cdot 3^x + 3 \ge 0, \\ \log_{\frac{2x^2+3x+1}{3x+1}} |x| \le 0. \end{cases}$

365. $\begin{cases} (x-1)\lg 2 + \lg(2^{x+1}+1) < \lg(7\cdot 2^x + 12), \\ \log_x(x+2) > 2. \end{cases}$

366. $\begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x^2-16x+64} > 0, \\ \lg\sqrt{x+7} > \lg(x-5) - 2\lg 2. \end{cases}$

367. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-8)(2-x)}}{\log_{0,3}\left(\dfrac{10}{7}(\log_2 5 - 1)\right)} \ge 0, \\ 2^{x-3} - 31 > 0. \end{cases}$

368. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2}}{\log_5\left(\dfrac{1}{3}(\log_3 5 - 1)\right)} \ge 0, \\ x - \sqrt{x} - 2 \ge 0. \end{cases}$

369. $\begin{cases} \log_{x+3}(x^2 - x) < 1, \\ \log_{x^2 - \frac{3}{2}x}(3 - 2^x) > 0. \end{cases}$

370. $\begin{cases} \log_{3-2x} x < 2, \\ \log_x(\log_2(4^x - 6)) \le 1. \end{cases}$

371. $\begin{cases} 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} > 2\sqrt[4]{3}, \\ \log_2^2 x + 6 \ge 5\log_2 x. \end{cases}$

372. (МИОО, 06.03.13).

$$\begin{cases} \log_{x+1}(2x-5) + \log_{2x-5}(x+1) \le 2, \\ 25^x - 20^x - 2\cdot 16^x \le 0. \end{cases}$$

373. (ЕГЭ 2013).

$$\begin{cases} 2^x + 17\cdot 2^{3-x} \le 25, \\ \dfrac{x^2-3x-5}{x-4} + \dfrac{3x^2-15x+2}{x-5} \le 4x+1. \end{cases}$$

374. (МИОО, 27.09.11).

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x+5}{4+x} - \dfrac{1}{x^2+9x+20}\right)\sqrt{-7x-x^2} \ge 0, \\ x\cdot\sqrt{8} - 7x + 14\sqrt{8} > 57. \end{cases}$$

375. (МИОО, 07.12.11).

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-6x+5}{2x-3} \le 1, \\ 25x^2 - 4|8-5x| < 80x - 64. \end{cases}$$

376. (МИОО, 07.12.11).

$$\begin{cases} \log_{x+5}(6-x)\cdot\log_{4-x}(x+3) \ge 0, \\ |2x-6|^{x+1} + |2x-6|^{-x-1} \le 2. \end{cases}$$

377. (МИОО, 07.12.11).

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+1)\cdot\log_{x+5}(4-x) \ge 0, \\ \left|\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}\right|^{x-1,2} + \left|\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}\right|^{1,2-x} \le 2. \end{cases}$$

378. $\begin{cases} \log_{x+10}(1-3x+3x^2-x^3) \ge 0, \\ \dfrac{2}{x^2+12x+32} \ge \dfrac{1}{x^2+10x+24}. \end{cases}$

379. (Трен. работа №1, alexlarin.net).

$$\begin{cases} 4(x^2+x) \le 3|2x+1| - 3, \\ \left(\sqrt{25-x} + 2 + \sin x\right)\left(25^x - 5^{x+\log_5 2}\right) \le 0. \end{cases}$$

380. (Трен. работа №2, alexlarin.net).

$$\begin{cases} \dfrac{3^x - 9}{10\cdot 3^{x+1} - 3^4 - 3^{2x}} < 0, \\ \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2x} + 5 + 2\sqrt{6} \le \\ \le \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x \left(\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^3} + \sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right). \end{cases}$$

381. (Трен. работа №7, alexlarin.net).

$$\begin{cases} |2x-1| + |2x+1| \le 3 - |2x|, \\ 2x(x+1) + \dfrac{874}{875} > (x+1)^2 - x\left(\dfrac{1}{35} + \dfrac{1}{25}\right). \end{cases}$$

382. (Трен. работа №9, alexlarin.net).

$$\begin{cases} \dfrac{x - 7\sqrt{x} + 10}{2 - \sqrt{x}} \ge \dfrac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 3}, \\ \dfrac{\sqrt{20 - x^2 + x}}{2x - 3} \le \dfrac{\sqrt{20 - x^2 + x}}{x - 6}. \end{cases}$$

383. (Трен. работа №11, alexlarin.net).

$$\begin{cases} x^{\log_2 x} \ge \dfrac{4}{x}, \\ \dfrac{3^{5x} - 3}{9^x - 30\cdot 3^x + 81} < 0. \end{cases}$$

384. (Трен. работа №12, alexlarin.net).

$$\begin{cases} \dfrac{6}{3^x - 1} < 3^x, \\ \sqrt{x^2 + 3x - 18} \le \dfrac{6\sqrt{x^2 + 3x - 18}}{x + 2}. \end{cases}$$

385. (Трен. работа №13, alexlarin.net).

$$\begin{cases} \left(\log_2 \dfrac{5x+4}{4x}\right)\sqrt{x^4 - 5x^2 + 4} > 0, \\ (3^x - 1)\sqrt{x^2 - 4x + 3} \le 0. \end{cases}$$

386. (Т.р. №16, alexlarin.net).

$$\begin{cases} 4^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}} + 3\cdot 6^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}} \ge 4\cdot 9^{\frac{x^2-2}{x^2+x+1}}, \\ \log_{\frac{1}{3}}|x-2| - \log_{2-x} 3 \le 2. \end{cases}$$

387. (Трен. работа №20, alexlarin.net).

$$\begin{cases} 4^{\log_2 x} + x^2 < 8, \\ \log_{\frac{1}{\log_2 x}}\left(4x^2 - 20x + 22\right) < 0. \end{cases}$$

388. (Трен. работа №24, alexlarin.net).

$$\begin{cases}\sqrt{3}\cdot 4^x \le \sqrt{2}\cdot 9^x,\\ \dfrac{\log_3 x-7}{\log_x 3-3}\le 2.\end{cases}$$

389. (Форум alexlarin.net).

$$\begin{cases}2^{2x+1}-2^{x+2}-2^x\le 3,\\ \log_{x+\frac{2}{9}}3\le \log_{\sqrt{x}}3.\end{cases}$$

390. (Трен. работа №26, alexlarin.net).

$$\begin{cases}7^{x-\frac{1}{8}x^2}<7^{1-x}\cdot\left(\sqrt[8]{7}\right)^{x^2}+6,\\ \log_x 2<\log_{6-x}2.\end{cases}$$

391. (Трен. работа №28, alexlarin.net).

$$\begin{cases}\dfrac{2^x-2^{2-x}-3}{2^x-2}\ge 0,\\ \log_4(3-3x)^2\ge \log_2(x^2-1).\end{cases}$$

392. (Трен. работа №29, alexlarin.net).

$$\begin{cases}\dfrac{4^x+5}{2^x-11}\ge -1,\\ \log_3\log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)\le 0.\end{cases}$$

393. (Трен. работа №30, alexlarin.net).

$$\begin{cases}2^{x+3}-x^3\cdot 2^x\le 16-2x^3,\\ \log_{0,1}(10^x-9)\ge x-1.\end{cases}$$

394. (Трен. работа №32, alexlarin.net).

$$\begin{cases}15\cdot\dfrac{4^{x-2}}{4^x-3^x}>1+\left(\dfrac{3}{4}\right)^x,\\ \log_{x\sqrt[6]{3}}(3x^6+2x^2-6)>6.\end{cases}$$

395. (Трен. работа №33, alexlarin.net).

$$\begin{cases}x^2+2x>x\cdot\log_3(27\cdot 9^{x-1}-3^x+3),\\ \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)\ge -2.\end{cases}$$

396. (Трен. работа №34, alexlarin.net).

$$\begin{cases}\log_5\dfrac{5-x}{2-x}\ge \log_{25}\sqrt{(x-5)^4}-1,\\ \dfrac{128}{729}\cdot\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x}}\ge \dfrac{4^x}{\sqrt[4]{81^{2x-1}}}.\end{cases}$$

397. (Трен. работа №39, alexlarin.net).

$$\begin{cases}9^{\sqrt{x^2-3}}+3<28\cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1},\\ \log_{x-2}(3x-x^2)\le 2.\end{cases}$$

398. Трен. работа alexlarin.net).

$$\begin{cases}\log_{17-x^2}(21+x^2+10x)\le\\ \qquad\le\dfrac{1}{2}\left(\log_{3+\sqrt{7}}(8+3\sqrt{7})+\log_{3+\sqrt{7}}2\right),\\ \sqrt[3]{2}^{\,x^2+4x+1}-\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}-1\right)^x\le 0.\end{cases}$$

399. Найдите все натуральные значения x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{x-5}{x}<\dfrac{2x}{3-x},\\ \log_{\sqrt{2}}(x-1)<4.\end{cases}$$

400. Найдите все целые значения x, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x+8}{x+2}>2,\\ \lg(x-1)<1.\end{cases}$$

401. (МАИ). Найдите множество значений x, при которых наибольшее из чисел $6-2x-x^2$ и $2+x$ не меньше 3.

402. (МАИ). Найдите множество значений x, при которых наименьшее из чисел $4-x^2$ и $1-x$ не больше 0,5.

403. (ЕГЭ 2005). Найдите все значения a, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b=4^a+2^{3+a}-3$ и $c=2^{3-a}-4^{-a}-9$ меньше 6.

404. (ЕГЭ 2005). Найдите положительные значения a, при каждом из которых наименьшее из двух чисел $b=6a^2(2a^{-2}-a)-a^6$ и $c=a^{-6}-6a^{-3}+1$ **не меньше** – 4.

405. (ЕГЭ 2005). Найдите все значения $a>1$, при каждом из которых наименьшее из двух чисел $b=2\log_a(27a)-\log_a^2 3+1$ и $c=\log_3^2 a-\log_3(9a^6)+6$ больше – 4.

Ответы

1. $a<b$. **2.** $a>b$. **3.** $a>b$. **4.** $a<b$. **5.** $a<b$. **6.** $a=b$. **7.** $a<b$. **8.** $a<b$. **9.** $a>b$. **10.** $a>b$. **11.** $a>b$. **12.** $a>b$. **13.** $a<b$. **14.** $a>b$. **15.** $a>b$. **16.** $a>b$. **17.** $a>b$. **18.** $a>b$. **19.** $a<b$. **20.** $a>b$. **21.** $a=b$. **22.** $a>b$. **23.** $a<b$. **24.** $a<b$. **25.** $a>b$. **26.** $a<b$. **27.** $a<b$.
28. а) $a>b$. *Указание.* $\log_{0,5}5>\log_{0,6}5>$ $>\log_{0,6}6$. **б)** $a<b$. *Указание.* $\log_5 0{,}7>$ $>\log_5 0{,}6>\log_4 0{,}6$. **в)** $a>b$. *Указание.* $\log_{0,6}0{,}7>\log_{0,5}0{,}7>\log_{0,5}0{,}8$. **г)** $a<b$. *Указание.* Из неравенства $\log_2 3>\log_3 4>$ >0 примера 21 получаем $\dfrac{1}{\log_2 3}<\dfrac{1}{\log_3 4}$ и $\log_3 2<\log_4 3$. **29.** $a>b$. *Указание.* Сравните разность чисел с нулем.
30. $a=b$. *Указание.* Использовать тождество $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$. **31.** $a=b$. **32.** $a>b$. *Указание.* Использовать способ «укрупнения» чисел. **33.** $a>b$. **34.** $a>b$. *Указание.* Использовать неравенство Коши.
35. $a>b$. **36.** $a>b$. **37.** $a<b$. **38.** $a>b$. **39.** $a<b$. **40.** $a>b$. **41.** $(\cos 3;\cos 2)$.
42. $\left[\sqrt{5};2\dfrac{6}{25}\right]\cup\{4\}$. **43.** $(1;\sqrt[3]{3})\cup(1{,}5;+\infty)$.
44. $[1;2]$. **45.** $[3;5)\cup(5;+\infty)$.
46. $(-1;0)\cup(0;2)$. **47.** $(1;2]\cup(7;8)$.
48. $(-\infty;0)\cup[1;2)$. **49.** $(-\infty;1)$. **50.** $[0{,}5;+\infty)$.
51. $\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{4}{3}\right)\cup(-1;1)$. **52.** $-\dfrac{1}{7}$.
53. $(-\infty;1)\cup(2;4]$.
54. $[-4;-3)\cup[-1{,}5;0)\cup[1;+\infty)$.
55. $(-\infty;-7)\cup(-4;-2)$. **56.** $\{2;3\}$.
57. $(-\infty;-4)\cup(-2;0)\cup(2;+\infty)$.
58. $[2;4]$. **59.** $(-\infty;-2)\cup(0;4)$.
60. $(0;\,0{,}5)$. **61.** $(-2;2)\cup(2;14)$.
62. $(-\infty;-3)\cup(0;1)$. **63.** $[-3;1],\ [7;+\infty)$.
64. $[-4;-2]\cup[0;2]\cup\ \cup[5;+\infty)$.
65. $(-\infty;0]\cup[1;2]\cup[5;+\infty)$.
66. $\left(\dfrac{5}{4};2\right)\cup(2;+\infty)$. **67.** $(-\infty;-1)\cup(-1;2{,}5]$.
68. $\left[\dfrac{2}{3};1\right]\cup(2,+\infty)$. **69.** $x<\dfrac{1}{3}$.
70. $(1-\sqrt{8};3)\cup(3;1+\sqrt{8})$.
71. $(-\infty;-7)\cup(3;+\infty)\cup\{-6;2\}$.
72. $(-\infty;-2-\sqrt{3}]\cup(-0{,}3;-2+\sqrt{3}]\cup\{1\}\cup$ $\cup(2;+\infty)$. **73.** $[-3;-1)\cup(-1;-0{,}5]$.
74. $(-\infty;2]\cup\{3\}\cup[7;+\infty)$.
75. $(-2-\sqrt{7};-3]$. **76.** $[4;5)$. **77.** $(3;+\infty)$.
78. $[-3;5]$. **79.** $(0{,}5;2]$. **80.** $(-\infty;1]\cup\{5\}$.
81. $[-1;3]\cup[8;12]$. **82.** $\left[\dfrac{5}{3};9-2\sqrt{13}\right]$.
83. 3. **84.** $[-4;1]\cup\{2\}$. **85.** $(-3;0)\cup\{0{,}5;2\}$.
86. $(-\infty;0]\cup[5;7)\cup(9;+\infty)$. **87.** $[-2;-1)\cup$ $\cup[0;1]$. **88.** $[-7;-6)\cup[-5;-1]\cup\{1\}$.
89. $(1;2)\cup(4;5]$. **90.** $[0;1]\cup(4;16]$.
91. $[-2;0)\cup(0;\sqrt{3}]$. **92.** $(-\infty;-1)$.
93. $[0{,}5;2)\cup(2;+\infty)$. **94.** $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.
95. $\left[\dfrac{-1-\sqrt{145}}{2};-5\right]\cup\left[4;\dfrac{-1+\sqrt{145}}{2}\right]$.
96. $\left(\dfrac{3}{4};7\right]$. **97.** $(0;1]\cup\{3\}\cup[4;5)\cup(5;6]$.
98. $x>\dfrac{1}{3}$. **99.** -4. **100.** $\left(\dfrac{5}{3};2\right)$.
101. $(-\infty;0)\cup\{2\}$. **102.** $[-2;-1)\cup[1;+\infty)$.
103. $\left(-\infty;\dfrac{1+3\log_3 11}{2+\log_3 11}\right)$. **104.** $x>1$.
105. $(-\infty;0]$. **106.** $(-\infty;1)$.
107. $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **108.** $[1;+\infty)$.
109. $(0;9)$. **110.** $\left(1;\log_{\frac{7}{3}}3\right)$. **111.** $[0;1]$.
112. $(-\infty;-1]\cup[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}]\cup[3;+\infty)$.
113. $\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.
114. $(-\infty;-5]\cup[2;+\infty)$.
115. $[0;0{,}5)\cup(1;+\infty)$. **116.** $[-1;2{,}5]$.
117. $-0{,}5<p<1$. **118.** $(5;+\infty)$.
119. $x<0$. **120.** $(0;1)\cup(\log_2 5;+\infty)$.
121. $(-\infty;\log_5 2)\cup(2;+\infty)$. **122.** $(-\infty;-1]$.
123. 2. **124.** -1. **125.** $[-5;2]$.

126. $\left(-\infty;\ \log_{\frac{2}{3}} 3\right) \cup (-0{,}5;\ 0{,}5)$.

127. $x \le 0$. **128.** $\left(-\infty; \log_7 \dfrac{16}{3}\right]$.

129. $(-\infty, 1] \cup (\log_3 4, +\infty)$.

130. $(-1; 2\log_3 5] \cup (3; +\infty)$.

131. $(\log_4 3; 1) \cup (1; \log_3 4)$.

132. $[-4; -1) \cup (-1; 3)$. **133.** $0 < x < \log_3 8$; $x = 2{,}5$. **134.** $(-\infty; -7) \cup (2; 5]$.

135. $(-\infty; -2{,}5] \cup (0; 0{,}5]$. **136.** $\left(0;\ \log_{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$.

137. $(-\infty; -1] \cup [\log_3(\sqrt{20} - 3); +\infty)$.

138. $\{2\} \cup [6; +\infty)$. **139.** $x \ge \log_{\frac{3}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

140. $x > 3$. **141.** 0; 2.

142. $\left(-\sqrt{2+\sqrt{3}}; -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) \cup \left(-\sqrt{2-\sqrt{3}}; 0\right) \cup$ $\cup \left(0; \sqrt{2-\sqrt{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}; \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$.

143. $x > 0$. **144.** $\left(\dfrac{1}{5}; \dfrac{2}{5}\right)$. **145.** $\left(-\dfrac{4}{3}; -1\right)$.

146. $\left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{7}{5}\right) \cup \left(\dfrac{7}{5}; 2\right)$. **147.** $\left(2\dfrac{2}{3}; 4\right]$.

148. $[5; +\infty)$. **149.** $\left(2; \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$. **150.** $\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{5+\sqrt{34}}{9}\right]$. **151.** $x < -2$. **152.** $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **153.** $(1; 4)$. **154.** $(0{,}5; 1)$.

155. $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$. **156.** $[0{,}1; 10]$.

157. $[-2; 0]$. **158.** $\left(-2; -\dfrac{17}{9}\right) \cup (7; +\infty)$.

159. $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

160. $\left[-\dfrac{127}{384}; -\dfrac{21}{64}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{4}; -\dfrac{1}{6}\right]$.

161. $(-\infty; -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}; 1) \cup (1; +\infty)$.

162. $(0; 1)$. **163.** $(0; 1) \cup (1; 2)$.

164. $\left(1-\sqrt{2}; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(1; 1+\sqrt{2}\right)$. **165.** $\left(1\dfrac{1}{6}; +\infty\right)$.

166. $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$. **167.** $(1; 17]$. **168.** -1.

169. $(2; 5]$. **170.** $(-2; -1]$. **171.** $(-2; 3)$.

172. $[-20; -9) \cup (1; 2]$. **173.** $\left[0; \dfrac{27}{16}\right]$. **174.** $[-1; 0]$. **175.** $\left(0; 10^{\frac{\lg 0{,}5 \cdot \lg 2}{\lg 1{,}5}}\right) \cup \left(0; \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{1{,}5} 3}\right)$.

176. $[-8; -4) \cup (-4; -1) \cup \left(-\dfrac{1}{8}; 0\right)$.

177. $(-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; 6) \cup (6; +\infty)$.

178. $(-1; 0) \cup (4; 5]$.

179. $(-4; -3) \cup (-3; -1) \cup [3; +\infty)$.

180. $(0; 1) \cup [2; +\infty)$. **181.** $\left[-2; -\sqrt{2}\right) \cup$ $\cup \left[0; -1+\sqrt{2}\right)$. **182.** $2 < x \le 2 + \operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{16}$.

183. $[1-\sqrt{5}; 1-\sqrt{3}] \cup [1+\sqrt{3}; 1+\sqrt{5}]$. **184.** 3. **185.** $\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{17}{9}\right)$. **186.** $(-\infty; -4) \cup \left(-\dfrac{1}{8}; 0\right)$.

187. $\sqrt[4]{0{,}5} \le x \le 16$. **188.** $(0; 0{,}5] \cup \left(\sqrt{2}; 2\sqrt[4]{2}\right]$.

189. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{4}; 1\right) \cup (1; \sqrt{8})$. **190.** $\left(0; \dfrac{1}{4}\right] \cup [1; 4)$.

191. $1 < x \le 5^{\log_2 7} = 7^{\log_2 5}$. **192.** $\left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{39-3\sqrt{69}}{50}\right)$. **193.** $(-5; -4] \cup [3; +\infty)$.

194. $(0; +\infty)$. **195.** $(-\infty; -2) \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup$ $\cup (1; \sqrt{2}) \cup (2; +\infty)$. **196.** $(-2{,}5; -1{,}5) \cup$ $\cup (-1{,}5; -0{,}5) \cup \{0{,}5\} \cup (1; 1{,}5)$.

197. $(0; 1] \cup (3; +\infty)$. **198.** $(0; 0{,}5) \cup (2; 3)$.

199. $(1; +\infty)$. **200.** $(-2; 1] \cup \{3\}$.

201. $(0{,}5; 1)$. **202.** $\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right]$.

203. $(-7; -6) \cup [2; 2{,}5) \cup (4; 4{,}5]$.

204. $\left(\log_2 \dfrac{2}{3}; 0\right) \cup [1; +\infty)$. **205.** $[2; 3)$.

206. $\left[1-\sqrt{3}; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(2; \dfrac{5}{2}\right)$.

207. $(-\infty; -2) \cup (-2; 2-\sqrt{15}) \cup [6; +\infty)$.

208. $\left(-\dfrac{5}{3}; -1\right]$. **209.** $(0{,}5;\ 1) \cup (5;\ +\infty)$.

210. $(0;-1+\sqrt{2}]\cup\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}};2\right]$.

211. $(-4;-3)\cup[1;+\infty)$. **212.** $1<x<2$, $3<x<7$. **213.** $\{1\}\cup(1,5;3)$. **214.** $0<x<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{6}$. **215.** $(-1;0)\cup(0;0,5)\cup(1;5]$.

216. $\left(\frac{1}{3};\frac{5}{8}\right)$. **217.** $(-\infty;-5]$.

218. $(-0,5;0]\cup[1;4)$.

219. $[-\sqrt{8};-1)\cup\left[\frac{-2+\sqrt{44}}{5};1\right)$.

220. $(-1,5;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)$.

221. $[0,5;1),[2;+\infty)$. **222.** $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$.

223. $(1;1,5)\cup(2;2,5)\cup(3;+\infty)$.

224. $\left[\sqrt{6}-1;2\right)\cup(2;5]$. **225.** $(-\infty;-2-\sqrt{3+\sqrt{5}})\cup(-3;-2-\sqrt{3-\sqrt{5}})\cup$ $\cup(-2+\sqrt{3-\sqrt{5}};-1)\cup(-2+\sqrt{3+\sqrt{5}};+\infty)$.

226. $\left(\sqrt{2}+1;1+\sqrt{3}\right]$. **227.** $[-3;0)\cup\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup$ $\cup\left(1;\frac{5}{4}\right)$. **228.** $(2;5)$. **229.** $(9;9,5)\cup(9,5;9,75)$.

230. $(-1;0)\cup(1;3)\cup(5;+\infty)$. **231.** $-2<x<-1$, $3<x<5$. **232.** $(0;1)\cup\left[\frac{3}{2};\frac{2}{3}(1+\log_2 3)\right)$.

233. $\frac{\log_2 7-5}{3}<y\le-\frac{2}{3}; 0<y<1$.

234. $(\log_3 10;+\infty)$. **235.** $\left(1;\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right]$.

236. $(-2;-1]\cup(1;2)$. **237.** $\left(-1-\sqrt{5};-3\right)\cup$ $\cup(\sqrt{5}-1;5)$. **238.** $(0;0,1)\cup(1;\infty)$. **239.** 2.

240. $-\frac{1}{2}<x<0$. *Указание.* Рассмотреть графики функций $y=1+\log_2(x+2)$ и $y=\frac{6x}{2x+1}$. **241.** $\left(0;\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]\cup(2;+\infty)$. **242.** $(-4;1]$. **243.** $(-7;-6),[-3;0),(0;1),(1;4]$.

244. $[-9;-4)\cup(-4;-1)\cup\left(-\frac{1}{81};0\right)$. **245.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\cup\left(\sqrt[3]{2};\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

246. $\left(-\frac{1}{2};\frac{-5-\sqrt{5}}{20}\right)\cup\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{20};0\right)\cup$ $\cup\left(0;\frac{-5+\sqrt{45}}{20}\right)\cup\left[\frac{-3+\sqrt{44}}{10};\frac{1}{2}\right)$.

247. $(0;1]\cup\{2\}\cup(3;4)\cup(4;5)$. **248.** 3.

249. $(-5;-2-2\sqrt{2}]\cup[-4;0)\cup$ $\cup(0;0,5)$.

250. $\frac{7}{4}$. **251.** $(0;1)\cup\{2\}$. *Указание.* Рассмотреть два случая $0<x<1$ и $x>1$. Во втором случае применить неравенство Коши. **252.** $\left(0;10^{-\sqrt{\lg 5}}\right)\cup\left(10^{\sqrt{\lg 5}};+\infty\right)$.

253. $(1;1000)$. **254.** $x>1000$.

255. $\left(10^{-\sqrt{\lg 4}};10^{\sqrt{\lg 4}}\right)$. **256.** $\left(0;3^{-2\sqrt{3}}\right]\cup$ $\cup\left[3^{2\sqrt{3}};+\infty\right)$. **257.** $\left(0;\frac{1}{4}\right]\cup[4;+\infty)$.

258. $(-\infty;0)$. **259.** $(-\log_2 6;-\log_2 3]$.

260. $(-\infty;-2]\cup[0;\lg 101-2)$. *Указание.* Воспользуйтесь тождеством $x=\log_5 5^x$.

261. $0,1<x\le 0,5$. **262.** $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

263. $\{3\}\cup[8;+\infty)$. **264.** $\left(-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup$ $\cup\left(0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{13}}{2};0\right)$.

265. $\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{7}{2}\right]$.

266. $\left(0;\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[\pi;\frac{4\pi}{3}\right]\cup\{-1;5\}$. **267.** $\frac{\pi k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$. **268.** $[3;6)$. **269.** $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};2\right]$.

270. 0. **271.** 5. **272.** 0,5.

273. $(-\infty;-7)\cup(1;1,5]$. **274.** $\{-1\}\cup(1;+\infty)$.

275. $[-1;1)\cup(3;5]$. **276.** $(3;3,5]\cup[5;+\infty)$.

277. $\left[-\frac{1}{3};0\right)\cup(0;1]$. **278.** $[-98;2)\cup(2;102]$.

279. $\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)$. **280.** $[2;+\infty)$.

281. $\left(-5;-\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$.

282. $(-\infty;-7]\cup\{2\}$.
283. $[-4;0)\cup(0;1)\cup(1;4]$.
284. $(0{,}5;3)$. **285.** $(3;4)\cup(4;+\infty)$.
286. $(-4;-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3};-1{,}7]$.
287. $[0{,}6;1)$. **288.** $(-2;0)\cup(4{,}2;+\infty)$.
289. $(-5{,}75;11{,}25)$.
290. $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)\cup(4;+\infty)$. **291.** $(0{,}4;10)$.
292. $(-2;3)$. **293.** $(0;1{,}5)$. **294.** 2.
295. $(4;16{,}5]$. **296.** $(1;2)$. **297.** $x>\dfrac{7}{9}$. **298.** $x>2$. **299.** $\{-2\}\cup(2;4]$.
300. $[-3;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;3]$.
301. $[1;2]\cup\{3\}\cup[7;+\infty)$.
302. $\left(1-\sqrt{2};\dfrac{2}{3}\right)\cup\{2\}$. **303.** $\left[0;\dfrac{1}{6}\right)\cup\{6\}$.
304. $(-3;-1)\cup\{2\}$. **305.** $(0{,}5;1)$.
306. $(\log_2 8{,}8;\log_2 22{,}5]$.
307. $[-4;-2-\sqrt{3})\cup(-2+\sqrt{3};\log_3 1{,}5]$.
308. $x<-2$. **309.** $(2;5]$. **310.** $(-\infty;-2)$.
311. $(4;16{,}5]$. **312.** $\left[\dfrac{1}{6};\dfrac{3}{8}\right)$. **313.** $\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{3}{7}\right]$.
314. $(0;3-\sqrt{7}]\cup[3+\sqrt{7};3+2\sqrt{3})$.
315. $[-1;1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3};3]$.
316. $[2+\sqrt{6};+\infty)$. **317.** $(-1;1)$.
318. $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{5+\sqrt{34}}{9}\right]$. **319.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]\cup(1;2)$.
320. $[-1;0)\cup(0;2{,}5)\cup(\log_2 6;3)$.
321. $\left(0;\dfrac{1}{4}\right)\cup\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **322.** $\left(\log_4\dfrac{2}{3};0\right)\cup\left[\log_2\dfrac{3}{2};2\right]$. **323.** $(-2;\log_2(\sqrt{2}-1)]\cup[1;2)$. **324.** $\left(0;\dfrac{1}{25}\right]\cup[25;+\infty)$.
325. $\left[\dfrac{1}{2};1\right)\cup(4;+\infty)$. **326.** 2. **327.** 6.
328. $(0{,}4;0{,}5)\cup(1;2]$. **329.** $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;2]$.
330. $[-1;0)\cup(0;2]$. **331.** $[-2;0)\cup(0;1]$.
332. $(9{,}3;10)$. **333.** $(8{,}1;9)$. **334.** $(2;\log_2 11]$.

335. $(5;6)$. **336.** -5. **337.** $(-6;-5]$.
338. $[-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2]$. **339.** $-1{,}5$. *Указание*. См. пример 144. Учесть далее, что $3^{4x^2-9}-2+3^{9-4x^2}=\left(3^{2x^2-4{,}5}-3^{4{,}5-24x^2}\right)^2$. **340.** $\{-4\}\cup[3{,}5;4]$. *Указание*. Учесть, что $y=6^{x-6}$ и $y=5^{x-5}$ – возрастающие функции. **341.** 3.
342. $\left[\dfrac{1+\sqrt{13}}{2};2{,}5\right]$. **343.** $\left(0;\dfrac{1}{27\sqrt{3}}\right]\cup\left(\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup[1;1+\sqrt{2}]\cup[3;+\infty)$.
344. $[0{,}25;1)$. **345.** $[-2;-\sqrt{2})\cup\{0\}$.
346. $(0;2{,}5]\cup[4{,}5;+\infty)$. **347.** $[-2;-1{,}5)\cup\{3\}$. **348.** 0; 4. **349.** $\left(-\dfrac{5}{2};-2\right]\cup\{2\}$.
350. $(0;7]$. *Указание*. Привести первое неравенство к виду $(2^{x-7}-1)(2^x+8x)\le 0$.
351. $\left(0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};3\right)$.
352. $[\sqrt{6};2{,}5]\cup(3;+\infty)$ **353.** $[2;+\infty)$. *Указание*. Учесть, что на ОДЗ неравенство $\log_3 a+\log_3 b\le\log_3(a+b-1)$ равносильно неравенству $(a-1)(b-1)\le 0$.
354. $[5;+\infty)$. **355.** $[-2;-1{,}1)\cup\{3\}$. **356.** 3.
357. 3. **358.** 3. **359.** $(-1;0)\cup(0;0{,}5]\cup(1;2]$.
360. $(7;13]$. **361.** $\{-3\}\cup[2;+\infty)$.
362. $\{3\}\cup(4;\log_2 21]$. **363.** 0; 3.
364. $\left(-\dfrac{1}{3};0\right)\cup\{1\}$. **365.** $(1;2)$.
366. $(5;8)\cup(8;29)$. **367.** 8. **368.** 4.
369. $(-3;-2)\cup\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};\log_2 3\right)$.
370. $(\log_4 7;1{,}5)$. **371.** $\left(0;\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup(\sqrt{3};4]\cup[8;+\infty)$. **372.** $(2{,}5;3)$. **373.** $\{3\}\cup(4;\log_2 17]$.
374. $[-7;-6]\cup(-5;\sqrt{8}-7)$.
375. $(0{,}8;1{,}5)\cup\{2\}$. **376.** -1 и 2,5.
377. 1,2. **378.** $(-9;-8)\cup(-6;-4)\cup(-4;0]$.
379. $[-1{,}5;-1]\cup[0;\log_5 2]$. **380.** $(1;1{,}5]$.

381. $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{-6-\sqrt{71}}{175}\right)\cup\left(\dfrac{-6+\sqrt{71}}{175};\dfrac{1}{2}\right]$.

382. $[0;1,5)\cup\{5\}$. **383.** $(0;0,2)\cup[2;3)$.

384. $\{-6\}\cup[3;4]$. **385.** $(-\infty;-4)\cup\{3\}$.

386. $[-\sqrt{2};1)$. **387.** $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$.

388. $\left[\dfrac{1}{3};1\right)\cup\left(1;\sqrt[3]{3}\right)\cup[9;+\infty)$.

389. $\left(0;\dfrac{1}{9}\right]\cup\left[\dfrac{4}{9};\dfrac{7}{9}\right)\cup(1;\log_2 3]$.

390. $(0;1)$. **391.** $[-4;1)\cup\{2\}$.

392. $\left(2-\sqrt{2};\dfrac{3}{4}\right]$. **393.** $(\lg 9;1]$.

394. $\left(\sqrt{3};\log_{\frac{3}{4}}\dfrac{1}{4}\right)$.

395. $(-\infty;-1)\cup[\log_6 5;1)$.

396. $(0;0,5]\cup(5;7]$. **397.** $(2;\sqrt{7})$.

398. $\left[-2;-\dfrac{1}{2}\right]$. **399.** 2. **400.** 2; 3.

401. $[-3;+\infty)$.

Указание. $\max\{b;c\}\ge d\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b\ge d,\\ c\ge d.\end{array}\right.$

402. $(-\infty;-\sqrt{3,5}]\cup[0,5;+\infty)$.

Указание. $\min\{b;c\}\le d\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b\le d,\\ c\le d.\end{array}\right.$

403. $(-\infty;-\log_2 5)\cup(-\log_2 3;0)$.

Указание. $\max\{b;c\}<d\Leftrightarrow\begin{cases}b<d,\\ c<d.\end{cases}$

404. $\left(0;\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}\right]\cup\left[1;\sqrt[3]{2}\right]$.

Указание. $\min\{b;c\}\ge d\Leftrightarrow\begin{cases}b\ge d,\\ c\ge d.\end{cases}$

405. $\left(\sqrt[7]{3};9\right)\cup(81;+\infty)$.

Список и источники литературы

1. Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А., Рязановский А.Р., Семенов П.В. Единый государственный экзамен 2008. Математика. Учебно-тренировоч-ные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2007.

2. Дорофеев Г.В. Обобщение метода интервалов // Математика в школе, 1969, №3.

3. ЕГЭ 2013. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 заданий части 2(С) / И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров, В.С. Панферов, С.Е. Посицельский, А.В. Семенов, А.Л. Семенов, М.А. Семенова, И.Н. Сергеев, В.А. Смирнов, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль, И.В. Ященко; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2013, 215, [1] с. (Серия «ЕГЭ. Типовые тестовые задания») ISBN 978-5-377-05523-5

4. ЕГЭ 2013. Математика. Типовые тестовые задания / И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров, В.С. Панферов, С.Е. Посицельский, А.В. Семенов, А.Л. Семенов, М.А. Семенова, И.Н. Сергеев, В.А. Смирнов, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль, И.В. Ященко; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко – М.: Издательство «Экзамен», 2013, 55, [1] с. (Серия «ЕГЭ. Типовые тестовые задания») ISBN 978-5-377-05524-2

5. ЕГЭ 2013. Математика. Типовые тестовые задания / И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров, В.С. Панферов, С.Е. Посицельский, А.В. Семенов, А.Л. Семенов, М.А. Семенова, И.Н. Сергеев, В.А. Смирнов, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль, И.В. Ященко; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко – М.: Издательство «Экзамен», 2013, 55, [1] с. (Серия «ЕГЭ. Типовые тестовые задания») ISBN 978-5-377-05529-7

6. ЕГЭ 2013: Математика: самое полное издание типовых вариантов заданий /авт.-сост. И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко – Москва: АСТ: Астрель, 2013. – 111, [1] с. – (Федеральный институт педагогических измерений).

7. ЕГЭ 2013. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко –

М.: Издательство «Национальное образование», 2012. – 192 с. – (ЕГЭ-2013. ФИПИ – школе).

8. Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы. Условия и решения. Вып. 1-6, 8, 12, 14, 18, 25. – М.: Школьная Пресса, – (Библиотека журнала «Математика в школе»), 1993-2003.

9. Корянов А.Г. Применение свойств функции $y = \log_x a$. // «Математика для школьников», − М.: «Школьная пресса», 2012, – № 6. − С. 3–15.

10. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Логарифмические неравенства в заданиях С3 ЕГЭ. // «Математика для школьников», − М.: «Школьная пресса», 2012, – № 1. − С. 3–12., № 2. − стр. 3–10.

11. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Методы решения логарифмических неравенств (часть I и часть II). // «Математика в школе», − М.: «Школьная пресса», 2012, № 6. − С. 3–11., № 7. − С. 3–11.

12. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Материалы курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников» лекции 1-4. − М.: Педагогический университет «Первое сентября». 2012, – 104 с.

13. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: задачник для 10-11 классов / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А. Олейник, Т.В. Соколова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2009. – 477 с.

14. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 11 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2011. – 391 с.

15. Панферов В.С., Сергеев И.Н. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С3 / под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2010.

16. Панферов В.С., Сергеев И.Н. Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач; ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.

17. Потапов М.К., Шевкин А.В., Вуколова Т.М. О решении неравенств вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$ // Математика в школе, 2005, №5.

18. Прокофьев А. А., Корянов А.Г. Системы неравенств с одной переменной в экзаменационных заданиях. // Математика в школе. 2013. №2. – С. 15-27.

19. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников. Лекция 3. Решение неравенств алгебраическими методами. // Математика. – М., 2011, – №16, − С. 50-61.

20. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников. Лекция 4. Решение неравенств функционально графическим методом. // Математика. – М., 2011, – №17, − С. 49-61.

21. Самсонов П.И. О применении метода декомпозиции неравенств // Математика. Всё для учителя, 2011, №10.

22. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения. 10-11 классы: Учебно-метод. пособие / С.Н. Олехник, М.К. Потапов, П.И. Пасиченко. – М.: Дрофа, 2001.

23. www.mathege.ru – Математика ЕГЭ 2013 (открытый банк заданий)

24. www.alexlarin.narod.ru – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

25. http:///eek.diary.ru/ – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.