Метод координат в решении задач С2

Во многих стереометрических задачах С2, связанных с нахождением расстояния между скрещивающимися прямыми, расстояния между прямой и плоскостью или угла между прямой и плоскостью, угла между плоскостями бывает сложно найти правильное геометрическое решение. Не раз отмечали и наши эксперты по проверке работ ЕГЭ, что применение метода координат дает больше положительных результатов.

Немного теоретических и практических навыков приобретают наши ученики в курсе стереометрии 11 класса, где мы учим их определять координаты точки в пространстве, рассматриваем координаты векторов, находим углы между векторами через скалярное произведение в координатах. Готовя наших учеников к ЕГЭ, мы понимаем, что, к сожалению, мало уроков отводится на изучение геометрии и материала наших учебников явно недостаточно. Благо, сейчас кроме справочников большие возможности нам предоставляет интернет, где очень много информации различного рода: от статей до видеоуроков.

Прежде всего, рассматривая задачи на применения метода координат, надо объяснить учащимся, что вводя систему координат для многогранников, направление осей можно выбирать произвольно. Очень удобно это в прямоугольном параллелепипеде или кубе, сложнее в призмах и пирамидах, основаниями которых служит не прямоугольник.

Задача 1

Найти угол между прямыми АВ1 и ВС1 в кубе АВСDА1В1С1D1.

Решение

Введем систему координат с центром в точке В.

В(0;0;0;), А(1;0;0), В1(0;0;1), С1(0;1;1)

Угол между прямыми АВ1 и ВС1 можно рассмотреть как угол между направляющими векторами АВ1 и ВС1. Тогда cos α = |( АВ1,ВС1)|

|АВ1|·|ВС1|

АВ1{-1;0;1}, ВС1{0;1;1}

cos α = -1·0 + 0·1 + 1·1 = 1

√(-1)²+0²+1² ·√0²+1²+1² 2 т. е. α = 60°.

При решении задач методом координат на вычисление угла между прямой и плоскостью или угла между плоскостями необходимо составлять уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Уравнение плоскости имеет вид: ax+by+cz+d=0  , где a, b, c и d – числовые коэффициенты.

Пусть  нам нужно написать уравнение плоскости, которая проходит через точки K(x_1;y_1;z_1), L(x_2;y_2;z_2) и  M(x_3;y_3;z_3).

Так как точки принадлежат плоскости, то при подстановке их координат в уравнение плоскости, мы получим верные равенства.

Так как у нас три точки, мы должны получить систему из трех уравнений с четырьмя неизвестными. Преобразуем уравнение, разделив обе его части на число  d. Получим:

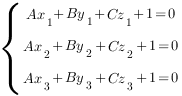
{a/d}x+{b/d}y+{c/d}z+1=0  

Мы можем переписать  это уравнение в виде: Ax+By+Cz+1=0  

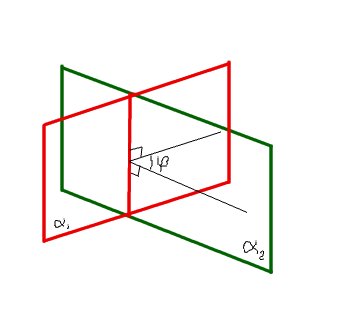
**Внимание!** Если плоскость проходит через начало координат, то d=0.

Чтобы найти коэффициенты А, В и С, подставим координаты точек K(x_1;y_1;z_1), L(x_2;y_2;z_2) и M(x_3;y_3;z_3) в уравнение плоскости Ax+By+Cz+1=0  .

Получим систему уравнений:



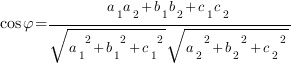
Решив ее, мы найдем значения коэффициентов А, В и С.

[](http://ege-ok.ru/wp-content/uploads/2012/03/ug1.jpg)**Величина двугранного угла измеряется величиной соответствующего линейного угла.** Пусть наши плоскости  {alpha}_1 и {alpha}_1 заданы уравнениями:

{alpha}_1:  a_1{x}+b_1{y}+c_1{z}+d_1=0

{alpha}_2:  a_2{x}+b_2{y}+c_2{z}+d_2=0

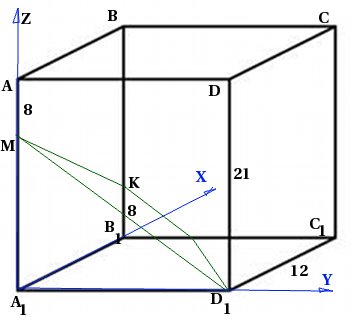
**Косинус угла varphi  между плоскостями находится по формуле, похожей на формулу косинуса угла между векторами:**



В ответе мы записываем delim{|}{cos{varphi}}{|}, так как величиной угла между плоскостями называется величина **меньшего** двугранного угла.

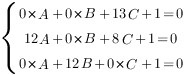
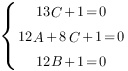
Задача 2

**В правильной четырехугольной призме** АВСDА1В1С1D1**со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре**АА1**взята точка М так, что**АМ = 8 см**. На ребре**ВВ1**взята точка K так,  что**ВК = 8 см. **Найдите угол между плоскостью**D1MK **и плоскостью CC1D.**

[](http://ege-ok.ru/wp-content/uploads/2012/03/edkub21.jpeg)Сделаем чертеж. Введем систему координат с началом в точке А1. Составим уравнения плоскостей D1MK **и CC1D.**

D1MK: D1(0;12;0), M(0;0;21-8), K(12;0;8)

Подставим координаты точек в уравнение плоскости Ax+By+Cz+1=0  :

Отсюда: C=-1/{13}, B=-1/{12}, A={-5}/{12*13}

Подставим найденные коэффициенты в уравнение плоскости:

{-5}/{12*13}x- 1/{12}y-1/{13}z+1=0

Чтобы избавиться от дробных коэффициентов, умножим обе части уравнения плоскости на -{12*13}. Получим уравнение плоскости D1MK: 5x+13y+12z-156=0

(а1 = 5, b1 = 13, c = 12).

Аналогично составляем уравнение плоскости **CC1D: С(12;12;21), С1(12;12;0), D(0;12;0).**

12А + 12В + 21С + 1 = 0, С = 0

12А + 12В + 1 = 0, А = 0

12В + 1 =0 В = - 1/12

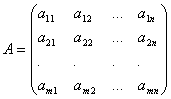
-1/12 у + 1 =0 или у – 12 = 0 (а2 = 0, b2 = 1, с2 = 0)

соs φ = \_|5·0 + 13·1 + 12·0|\_ = \_13\_ = 1 φ = 45°.

√52+132+122 · √02+12+02 13√2 √2

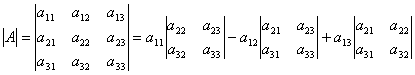
Уравнение плоскости можно составить с помощью матрицы, точнее вычисления ее определителя. Для этого необходимо познакомить учащихся с азами теории матриц.

Матрица – это прямоугольная таблица чисел, состоящая из ***m*** одинаковой длины строк или ***n*** одинаковой длины столбцов.

В общем виде матрицу размером *m*×*n* записывают так

Нам необходимо показать, как вычислять определитель матрицы второго порядка - число, получаемое следующим образом:

http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image091.gif

и определитель матрицы третьего порядка: .

Уравнение плоскости, проходящей через точки K(x_1;y_1;z_1), L(x_2;y_2;z_2) и M(x_3;y_3;z_3)  получим из определителя

х – х1 у- у1 z – z1

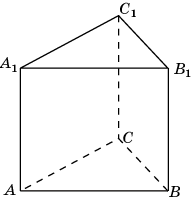
х2 – х1 у2 - у1 z2 – z1 = 0

х3 – х1 у3- у1 z3 – z1  где х, у, z – переменные величины.

Приравнивая к нулю значение определителя матрицы, и получается уравнение плоскости.

Задача 3

В правильной треугольной призме все ребра равны 1. Найти косинус угла между плоскостями АСВ1 и А1ВС1.

 Введем систему координат, например, с

началом в точке А. Тогда А(0;0;0), В(1;0;0),

А1(0;0;1), В1(1;0;1).

Сложнее найти координаты точек С и С1.

Т.к. угол в основании треугольника 60°, то

ось у не совпадает с АС.

Рассмотрим отдельно треугольник АВС в

х координатной плоскости ху: АВ = 1, хс = ½,

ус = √3/2.

Т.о. С(1/2, √3/2; 0), С1(1/2, √3/2; 1).

Составим уравнение плоскости АСВ1  и плоскости А1ВС1.

АСВ1: А(0;0;0), В1(1;0;1), С(1/2, √3/2; 0)

x-0 у-0 z-0

1-0 0-0 1-0 = 0

½-0 √3/2-0 0-0

x· 0 1 - y· 1 1 + z· 1 0 = x·(0-√3/2)-y·(0-½) +z·(√3/2-0)

√3/2 0 ½ 0 ½ √3/2

-√3/2x +½y+√3/2 z = 0 , т.е. коэф. А=-√3/2, В=½, С=√3/2

Вектор нормали плоскости АСВ1 n1(-√3/2; ½; √3/2).

А1ВС1: А1(0;0;1), В(1;0;0), С1(1/2, √3/2; 1)

x-0 у-0 z-1

1-0 0-0 0-1 = 0

½-0 √3/2-0 1-1

x· 0 -1 - y· 1 -1 +z· 1 0 =x·(0+√3/2)-y·(0+½) +z·(√3/2-0)

√3/2 0 ½ 0 ½ √3/2

√3/2x -½y+√3/2 z = 0 , т.е. коэф. А=√3/2, В=-½, С=√3/2

Вектор нормали плоскости А1СВ1 n2(√3/2; -½; √3/2)

Угол между плоскостями рассмотрим как угол между векторами- нормалями к каждой плоскости (т.е. векторами перпендикулярными плоскостям), которые имеют координаты, равные коэффициентам а, b, c в уравнениях плоскостей.

α = (n1, n2) и косинус между векторами-нормалями вычисляется через скалярное произведение векторов:

cos α = |( n1, n1)|

|n1|·|n1|

Основные этапы: ввести систему координат, составить через три точки уравнения плоскостей, их коэффициенты использовать для вычисления косинуса угла между плоскостями.

Много других различных задач можно решить методом координат: найти расстояние между прямой и плоскостью, расстояние между прямыми и т.д.