Урок – семинар (2ч.) в 9 классе

**по теме «Векторы в математике и физике»**

План

1. Из истории возникновения и развития понятия вектора.
2. Сравнительный анализ понятий. Связанных с вектором, в математике и физике.
3. Векторный метод решения задач в математике.
4. Применение понятия вектора в задачах физики.

Литература

1. Геометрия, 7-9, А.В. Погорелов
2. Физика, 9 И.К. Кикоин, А.К. Кикоин
3. Глейзер Г.И. История математики в 8-10 кл.
4. Гусев, Ю.М. Колягин и др. «Векторы в школьном курсе геометрии» М.Просвещение.,1976
5. Энциклопедический словарь юного математика, Москва «Педагогика». 1985
6. Математика хiх века, под редакцией А.Н. Колмогорова, А.П. Юшкевича, изд. Наука, М.1981
7. Математика в понятиях, определениях и терминах. Под ред. Л.В. Собинина ч.1 . Библиотека учителя математики. М. Просвещение.1978

Ход семинара

Вводное слово учителя

 Понятие вектора является одним из фундаментальных понятий современной математики. Об этом достаточно красноречиво говорит уже простое перечисление терминов и понятий: векторное исчисление, векторное поле, векторная функция, вектор кривизны, векторное пространство, векторное расслоение, векторное произведение, векторные поля на сферах.

 А физика? Её разделы – механика, электротехника – немыслимы без применения векторного исчисления.

 Не случайно, что с понятием вектора вы знакомитесь и на уроках математики, и на уроках физики. Но в каждом учебном предмете векторы рассматриваются так, как это удобно для исследуемого вопроса. Цель нашего семинара – обобщить все, что вы узнали о векторах в математике и физике, выделить типы задач, решаемых с помощью векторов. Взглянуть на историю развития понятия вектора.

 Итак, первый вопрос.

 Учащийся рассказывает историю возникновения и развития понятия вектора (см. приложение 4)

Класс слушает, каждый может внести добавления в свои записи или дополнить ответ учащегося.

 Учитель:

 Обратим внимание на то, что возникнув, понятие вектора сразу нашло применение в физике. Посмотрим, как в наше время выглядят понятия, связанные с вектором, в математике и физике.

 Учащийся проводит сравнительный анализ понятий, связанных с вектором, в математике и физике.

См презентацию №1.

1. Определение вектора.
2. Равные векторы.
3. Координаты вектора.
4. Сложение векторов.
5. Вычитание векторов.
6. Умножение вектора на число.
7. Коллинеарные векторы.
8. Разложение вектора по ортам.
9. Скалярное произведение векторов.

Ответ на этот вопрос можно разделить между 2-3 учащимися (см. приложение №5). Ученики класса проверяют составленные ими таблицы сравнительного анализа.

Учитель: В математике можно выделить целые классы задач, применение к которым векторного метода облегчает решение, а иногда делает возможным решение «недоступной» задачи.

Учащийся по таблице рассказывает. К каким типам задач применим векторный метод и алгоритм применения этого метода (см. приложение1)

Учитель предлагает классу решить по вариантам задачи (1 вариант – задача по математике, 2 вариант – задача по физике).

Вариант1. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Вариант 2. Определить величину собственной скорости катера, который, несмотря на течение реки со скоростью 1$\frac{м}{с}$ , движется перпендикулярно течению со скоростью 2,4$\frac{м}{с}$.

После 15 минут самостоятельной работы задачи обсуждаются у доски.

Приложение 1.

Векторный метод решения задач

|  |  |
| --- | --- |
| **Что требуется доказать (найти)** | **Что достаточно доказать (найти)** |
| 1. АВ II СД

АBCD | $\vec{AB}=$ λ $\vec{CD}$, λ≠0АBCD  |
| 1. Вϵ АС

(три точки принадлежат одной прямой)$$\frac{AB}{BC}$$ABCABC | $\vec{AB}$ = $\frac{m}{n}\vec{BC}$  |
| 1. АВ ⊥ СД

АBCD | $\vec{AB}$ · $\vec{CD}$ = 0АBCD |
| 1. Найти длину отрезка АВ

AB | Найти $\left|\vec{AB}\right|$AB1. Выбрать базисные векторы, у которых известны модули и угол между ними.
2. Разложить $\vec{AB}$ по базисным векторам.
3. Найти $\vec{AB}^{2}$, $\left|\vec{AB}\right|$=$\sqrt{\vec{AB}^{2}}$
 |
| 5.Найти угол между прямыми.АBCα? | Найти $\vec{AB} $^$\vec{AC}$АBCα?1. Выбрать базисные векторы, у которых известно отношение модулей и угол между ними.
2. Разложить $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ по базисным векторам.
3. Вычислить cosα

Cosα=$\frac{\vec{AB}}{\left|\vec{AB}\right|}\frac{\vec{AC}}{\left|\vec{AC}\right|}$ |

Приложение 2.

 Векторный метод решения задач.

Задача 1. (теорема косинусов).

Доказать, что квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Задача 2. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Задача 3. Доказать, что диагонали ромба пересекаются под прямым углом.

Задача 4. Доказать теорему о средней линии треугольника.

Задача 5. Доказать, что диагонали прямоугольника равны.

Задача 6. Доказать теорему Фалеса.

Задача 7. ( г 7-9, &10 №55)

Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит их в отношении 2:1, считая от соответствующей вершины.

Задача 8. Треугольник АОВ повернут в своей плоскости вокруг вершины о на 90⁰, причем вершина А перешла в А′, вершина В – в В′. Доказать, что медиана стороны АВ′ в треугольнике ОАВ′ является высотой для треугольника ОАВ′.

Задача 9. В трапеции АВСД боковая сторона СД перпендикулярна основанию АД, ВС=а, АД=в, (а$˱˂в). На основании АД $ существует такая точка М, что МВ˔АС и МС˔ВД.

Задача 10. Дан квадрат АВСД. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах АВ и ВС, причём BP=BQ. Точка H – основание перпендикуляра. Опущенного из точки В на отрезок ДС. Доказать, что ˪DHQ=90⁰.

Задача 11. Выразите длину медианы треугольника АВС, проведенной из вершины В через длины сторон треугольника, если ВС=а, АС=в, АВ=с.

Задача 12. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Приложение 3. Задачи физики. Решаемые векторным методом.

Задача 1. К одной точке тела приложены силы$\vec{F}\_{1}$ и$\vec{F}\_{2}$, угол между которыми α=60⁰. Найти величину равнодействующей . $\vec{F}$этих сил. Если $\left|\vec{F}\_{1}\right|$=3Н, $\left|\vec{F}\_{2}\right|$=5Н.

Задача 2. (Физика – 8, упр.2, №1)

Группа туристов, двигаясь с постоянной по модулю скоростью 5$\frac{км}{ч}$, сначала в течении 1ч. Идет на север, затем в течение 0,5ч. Идет на восток (под углом 90⁰ к направлению на север) и, наконец. В течение 1ч.30мин. – на юг (под углом 180⁰ к первоначальному направлению). Где окажется группа после прохождения этих трех участков. Сколько времени ей потребуется на возвращение в исходную точку по прямой при движении с той же скоростью?

Задача 3. Человек, стоящий на берегу реки шириной d=1км, хочет переправится на другой берег, в прямо противоположную точку. Он может сделать это двумя способами: 1) плыть все время под углом к течению так, что результирующая скорость будет все время перпендикулярна берегу; 2) плыть прямо к противоположному берегу, а расстояние, на которое его снесет течением, пройти затем по берегу пешком. Плавает он со скоростью 2,5$\frac{км}{ч}$, а идет со скоростью 4$\frac{км}{ч}$. Скорость течения реки 2$\frac{км}{ч}$. Какой способ позволит переправиться скорее и на сколько минут?

Учебник физики:

1). Упр.1, №3; 3). Упр.27, №3;

2). Упр.2, №1; 4). Упр.28, №1,2.

Задача 1.

A

B

C

D

Дано: АВСД – параллелограмм

Доказать: $АС^{2}$+$ВД^{2}$= 2$АД^{2}$+ 2$ АВ^{2}$

При обсуждении задачи ставятся следующие вопросы:

1. Можно ли эту задачу решать векторным методом?

Ответ: можно, т.к. в задаче речь идет об отыскании длин отрезков, т.е. это задача 4 типа.

1. Каков алгоритм решения такой задачи?

Ответ: 1) выбираем базисные векторы $\vec{AD}=\vec{a} и \vec{AB}=\vec{b}.$

 2).Выражаем интересующие нас векторы через базисные

$$\vec{AC}=\vec{a}+\vec{b}; \vec{BD}=\vec{a}-\vec{b}$$

 3). Вычисляем

 $\vec{AC}^{2}+\vec{BD}^{2}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^{2}+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^{2}=\vec{a}^{2}+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{2}+\vec{a}^{2}-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{2}=2\vec{a}^{2}+2\vec{b}^{2}=$

$$=2AD^{2}+2AB^{2}$$

Итак, $АС^{2}$+$ВД^{2}=$2$АД^{2}$+2$АВ^{2}$.

Задача 2.

 Дано$\left|\vec{V\_{реки}}\right|$ = 1$\frac{м}{с}$

? $\vec{V}\_{собств}$

 $\vec{V}\_{реки}$

 $\vec{V}\_{рез}$

$\vec{\left|V\_{рез.}\right|}$ = 2,4$\frac{м}{с}$

$\vec{V\_{рез}}$ $\vec{V\_{реки}}$

Найти: $\left|\vec{V\_{соб.}}\right|$

Вопросы:1) Что общего у этой задачи с предыдущей?

Ответ: в задаче опять требуется найти модуль вектора, следовательно, задачу можно решить тем же математическим методом, что и предыдущую, т.е. путем отыскания $→^{2}$

$\vec{V\_{соб.}}$= $\vec{V\_{рез.}}$ - $\vec{V\_{реки}}$ $\vec{V\_{соб}}^{2}$ = $\vec{V\_{рез.}}^{2}$ - 2 $\vec{V\_{рез.}}$ $\vec{V\_{реки}} $ + $\vec{V\_{реки}}^{2}$ = $2,4^{2}$- 0 +$1^{2}$= 6,76.

$\left|\vec{V\_{соб.}}\right|$ = $\sqrt{\vec{V\_{соб.}}^{2}}$ *=*$\sqrt{6,76}$*=2,6(*$\frac{м}{с}$*).*

$Учитель обращает $ *вни*мание учеников на то , что две очень разные по внешнему виду задачи. Взятые даже из разных учебных предметов. Были решены одним и тем же математическим методом.

Подводя итоги семинара, учитель отмечает наиболее интересные ответы учащихся, анализирует трудности, возникшие у отдельных ребят при решении задач, отмечает еще раз важность освоения общего метода решения задач с помощью векторов. Следует поощрить тех учеников, которые взялись за решение наиболее трудных задач из предложенного списка.

 Каждый учащийся сдает на проверку учителю все материалы, подготовленные к семинару. Обсуждение задач, предложенных к семинару, продолжается на занятиях кружка или факультатива.

 Самостоятельная работа.

Вариант 1.

1). Доказать, что диагонали квадрата равны и пересекаются под прямым углом.

2). Определить величину собственной скорости катера, который несмотря на течение реки со скоростью 1$\frac{м}{с}$, движется перпендикулярно течению со скоростью 2,4$\frac{м}{с}$.

Решение.

A

B

C

D

$$\vec{b}$$

$$\vec{a}$$

1. Пусть $\vec{АD}$=$\vec{a}\vec{, AB}$=$\vec{b}$-базисные векторы. Тогда $\vec{AC}$=$\vec{a}$+$\vec{b}$, $\vec{ BD}$=$\vec{a}$-$\vec{b}$ .

$\vec{AC^{2}}$=$\vec{a^{2}}$ + 2$\vec{a }\vec{b}$+$\vec{b}^{2}$=$\vec{a}^{2}$+$\vec{b}^{2 , }\vec{ BD}^{2}=\vec{a}^{2}-2\vec{a} \vec{b}+\vec{b^{2}}=\vec{a^{2}}+\vec{b}^{2}$

($\vec{a}$ $\vec{b}$ = 0 , т.к.$\vec{ a }$ $\vec{b}$ ). Значит$,\vec{\left| AC\right|}$= $\vec{\left|BD\right|}$.

$\vec{AC} · \vec{BD}\vec{ }$= ($\vec{ a}$ + $\vec{b}$ )( $\vec{a}$ – $\vec{b}$)= $\vec{a^{2}}$ - $\vec{b^{2}}$ = $\vec{\left|a\right|}^{2}$ - $\vec{\left|b\right|}^{2}$ = 0 ( т.к. $\vec{\left|a\right| }$= $\vec{\left|b \right|}$).

 Значит, $\vec{AC}$ ̝ $\vec{BD}$.

2). $\vec{V\_{соб.}}$ =$\vec{V\_{рез.}}$ - $\vec{V\_{теч.}}$

 $\vec{V}\_{собств}$

 $\vec{V}\_{реки}$

 $\vec{V}\_{рез}$

 $\vec{V\_{соб.}}^{2}$ = $\vec{V\_{рез.}}^{2}$ – 2 $\vec{V\_{рез.}}$ $\vec{V\_{теч.}}$ + $\vec{V\_{теч.}}^{2}$ = $2,4^{2}$ – 0 + $1^{2}$ = 6,76.

$\vec{V\_{соб.}} $= 2,6$\frac{м}{с}$.

$Вариант 2$.

 1). Доказать, что четырёхугольник с вершинами А(8;2), В(0;8), С(-6;0), Д(2;-6) является .

 прямоугольником.

 2). К одной точке тела приложены силы $\vec{F\_{1}}$ и $\vec{F\_{2}}$, угол между которыми α=60⁰. Найти величину равнодействующей $\vec{F}$ этих сил, если $\left|\vec{F\_{1}}\right|$=3H, $\vec{\left|F\_{2}\right|}$=5H.

Решение.

A

B

C

D

1).

 $\vec{AD}$ ( -6; -8) , $\vec{BC}$ ( -6; -8)

Значит, $ \vec{AD}$ = $\vec{BC}$ , т.е. AD BC и AD=BC. Следовательно, ABCD – параллелограмм.

$\vec{AD}$ ( -6, -8 ), $\vec{AB}$ ( -8, 6 ). Найдем $\vec{AD}$·$\vec{AB}$ = -6·( -8) + ( -8 )̇̇̇ ̇6 = 0

$Значит. $$\vec{AD }$$\vec{AB}$. Следовательно, ABCD – прямоугольник.

$2)$. $\vec{F}$ =$\vec{F\_{1}}$ + $\vec{F\_{2}}$

$\vec{F}^{2} $= $\vec{F\_{1}}^{2}$ + 2 $\vec{F\_{1}}\vec{F\_{2}}$ +$\vec{F\_{2}}^{2}$ = 9 +2·3̇·5̇cos60⁰ +25 = 49Н

$Решение задачи №9$.

A

B

C

D

$$\vec{a}$$

$$\vec{b}$$

$$\vec{h} ?$$

 $1$). Пусть $\vec{BC}$ =$\vec{a}$ и $\vec{AD}$ = $\vec{b}$ базисные, тогда $\vec{MD}$ = λ·$\vec{b}$ $\left|\vec{CD}\right|$ = $\left|\vec{h}\right|$ ?

 2). $\vec{MC}$ = λ·$\vec{b}$ - $\vec{h,}$ $\vec{BD}$ = $\vec{a}$ + $\vec{h}$, $\vec{MC}$̇ ·$\vec{BD}$ = 0

 $\left( λ·\vec{b} - \vec{h}\right)$· $\left(h ⃗ + a ⃗\right)$ = 0·$\vec{}$

 $λ·\vec{b}$·$\vec{h}$ - $\vec{h}^{2}$ + λ·$\vec{b}$·$\vec{a}$ - $\vec{a}·\vec{h}$ = 0, λ·$\vec{b}·\vec{h}$ = 0 и $\vec{a}$·$\vec{h}$ =0, то λ·$\vec{b}$·$\vec{a}$ = $\vec{h}^{2}$, но угол между векторами $\vec{b }$ $и \vec{a}$ равен 0. Получаем , что λ·b·a = $h^{2}$.(1)

$3).$$\vec{AC}$= $\vec{b}$ - $\vec{h}$, $\vec{BM}$ = $\vec{a}$ +$\vec{h}$ - λ·$\vec{b}$. $\vec{AC}$·$\vec{BM}$ = 0, то $\left(b ⃗ - h ⃗\right)$· $\left(a ⃗ + h ⃗ - λ·b ⃗\right)$ = 0,

$\vec{a}$·$\vec{b}$ + $\vec{b}$·$\vec{h}$ - λ·$\vec{b}\vec{b}$ - $\vec{a}$·$\vec{h}$ - $\vec{h}^{2}$ + $\vec{h}$·λ·$\vec{b}$ = 0, $\vec{a}$·$\vec{b}$ - λ·$\vec{b}^{2}$ - $\vec{h}^{2}$ = 0 , a·b - λ$b^{2}$ -$h^{2}$ =0 (2).

$4).$ Уравнения (1) и (2) образуют систему уравнений $\left\{\begin{array}{c}λ·a·b-h^{2=0}\\a·b-λ·b^{2}-h^{2}\end{array}\right.$ , λ·a·b – ab + λ$b^{2}$=0 отсюда

$λ$= $\frac{ab}{b\left( a+b\right)}$. Из равенства (1) $h^{2}$ = λab = $\frac{a^{2}\left(·b^{2}\right)}{b\left(a+b\right)}$ = $\frac{ba^{2}}{a+b}$, h=$\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$

$$Решение задачи 3 \left(физика\right)$$

1 случай.

? $\vec{V}\_{соб}$

 $\vec{V}\_{теч}$

 $\vec{V}\_{рез}$

 $\vec{S}$

 $\left|\vec{V\_{соб.,}}\right|$ = 2,5$\frac{км}{ч}$ $\left|\vec{V\_{теч.}}\right|$= 2$\frac{км}{ч}$ $\left|\vec{s}\right|$ = 1 км

$ $S- вектор перемещения, он не совпадает с вектором собственной скорости $\vec{V\_{соб.}}$ , но одинаково направлен с результирующим вектором скорости $\vec{V\_{рез}}$.

$\vec{V\_{рез}}$ = $\vec{V\_{соб}}$ - $\vec{V\_{теч}}$ ; $\left|\vec{V\_{рез}}\right|$ = $\sqrt{\left|\vec{V\_{соб}}\right|^{2}-\left|\vec{V\_{теч.}}\right|^{2}}$ (теорема Пифагора)

$v\_{рез.}$=$\sqrt{2,5^{2}-2^{2}}$ = $\sqrt{2,25}$=1.5$\left(\frac{км}{ч}\right)$; t=$\frac{\left|\vec{S}\right|}{\left|\vec{V\_{рез.}}\right|}$= $\frac{1км}{1,5км/ч}$=$\frac{2}{3}$ч= 40мин.

 $\vec{V}\_{с}$

 $\vec{V}\_{теч}$

 $\vec{V}\_{рез}$

 $\vec{S}\_{1}$

 $\vec{S}$

 $\vec{S}\_{2}$

$2$ случай.

Во втором случае $\left|\vec{S}\right|$ не известен , но используем известную ширину реки, т.е. $\left|\vec{S\_{1}}\right|$=1, $S\_{1}$- вектор , одинаково направленный с вектором собственной скорости $\vec{V\_{соб.}}$

$t\_{1}$=$\frac{\left|\vec{s\_{1}}\right|}{\left|\vec{V\_{соб}}\right|}$=$\frac{1км}{2,5 км/ч}$= 0,4ч=24мин. (время движения по реке) .

$\left|\vec{S\_{2}}\right|$= $\left|\vec{V\_{теч.}}\right|$·$t\_{1}$. $\left|\vec{S\_{2}}\right|$ = 2$\frac{км}{ч}$·0,4ч=0,8км; $t\_{2}$=$\frac{\left|\vec{S\_{2}}\right|}{4}$=$\frac{0,8км}{4км/ч}$=0,2ч=12мин.

$t=t\_{1}$+$t\_{2}$= 24мин. +12мин. = 36мин.

$Ответ:$ 40мин.-36мин.=4мин. Двигаясь вторым способом человек попадет в точку противоположного берега на 4 минуты раньше.

Приложение 4.

История возникновения и развития понятия вектора.

 Векторы появились в математике лишь в 40-х годах хIх столетия в работе немецкого математика, физика и филолога Германа Гроссмана «Учение о линейном протяжении» (1844г.). Г.Гроссман (1809-1877) был преподавателем гимназии в Штеттине. Известен как исключительно оригинальный математик и физик. В физике ему принадлежит учение об электрическом токе, учение о цветах и теория гласных звуков. Он еще не знает слова «вектор», но работает с отрезками, придумывает правила их сложения и умножения такие, что по сути дела вводит понятие вектора.

 Независимо от Г. Гроссмана к понятию вектора пришел ирландский математик Уильям Роуэн Гамильтон. Векторное исчисление он систематически изложил в «Лекциях о кватернионах» (1853г.). Гамильтон ввел и сами термины «скаляр» (от латинского слова «skala» - лестница, шкала) и «вектор» (от латинского слова «vector» - переноситель). Гамильтон рассматривал вектор как символ переносного движения. Гамильтон широко применял векторную алгебру для рассмотрения новых видов «чисел» - кватернионов и для изучения вопросов механики. Например, он впервые записал условие равновесия системы сил. Векторный анализ Гамильтона был применен к теории электромагнитного поля английским физиком Дж.К.Максвеллом (1831-1879) в его «Трактате об электричестве и магнетизме», в котором было предсказано существование электромагнитных волн, впоследствие открытых Генрихом Герцем (1857-1894) и положенных в основу радиотехники.

 Трактат Максвелла привлек к векторному исчислению внимание физиков, и профессор Йельского университета (США) Джозайя Виллард Гиббс (1839-1903) в «Элементах векторного анализа» и английский инженер и физик Оливер Хевисайд (1850-1925) в «Электромагнитной теории» объединили векторные исчисления Гамильтона и Гроссмана и придали векторной алгебре её современный вид.

 Конец хiх и хх в. Ознаменовались широким развитием векторного исчисления и его приложений. В настоящее время понятия вектора и векторного пространства используются в линейной алгебре, аналитической и дифференциальной геометрии, функциональном анализе, специальной и общей теории относительности, во многих разделах физики.