Разработка небольшого курса лекций на тему "центр масс и его применение в геометрии" предназначена для преподавателей факультативов, математических кружков, педагогов дополнительного образования. От слушателей предполагается умение работать с векторами и площадями треугольников.

## Геометрия масс

**Определение.** *Материальной точкой* называется точка с приписанной ей вещественным числом. Это число мы будем называть *массой* материальной точки. Обозначать материальную точку $A$ с массой $m$ мы будем просто: $mA$. Например, $1A$, $7B$, $-3C$, $0D$.

**Определение.** Пусть имеются несколько материиальных точек $m_1A_1$, $m_2A_2$, $\dots$, $m_kA_k$, причем сумма масс $m_1+\dots+m_k$ не равна 0. *Центром масс* этой системы материальных точек называется такая точка $Z$, для которой $m_1\overrightarrow{ZA_1}+m_2\overrightarrow{ZA_2}+\dots+m_k\overrightarrow{ZA_k}=\overrightarrow{0}$.

**Замечание 1.** Центр масс — это просто точка на плоскости, не материальная, т.е. без приписанной ей массы.

**Замечание 2.** Из определения сразу видно, что точка нулевой массы не оказывает никакого влияние на центр масс — ее можно просто выкинуть из системы точек. Несмотря на это, не надо забывать о том, что точки нулевой массы не запрещены — нам встретятся примеры их применения!

**Замечание 3.** Точки $A_1,\dots,A_n$ не обязаны быть различными. Никто не мешает поместить в систему одну и ту же точку с двумя разными массами. Конечно, их можно заменить на один экземпляр этой точки с массой, равной сумме этих масс (это очевидно из определения), и этот прием также часто применяется на практике!

**Замечание 4.** Из определения легко понять, что при умножении всех масс на одно число центр масс не меняется.

**Чуть позже** мы докажем, что центр масс существует и единственен, и разберемся, зачем нужно условие о том, что сумма масс не равна 0. А пока приведем простейшие примеры.

**Примеры.** 1. Если система состоит из одной точки $mA$, то центр масс совпадает с точкой $A$, ибо $m\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$.

2. Важный содержательный пример. Пусть система состоит из двух точек $m_1A_1$ и $m_2A_2$. Будем пока для простоты считать, что массы точек положительны.

Запишем определение центра масс $m_1\overrightarrow{ZA_1}+m_2\overrightarrow{ZA_2}=\overrightarrow{0}$ слегка по-другому: $m_1\overrightarrow{ZA_1}=-m_2\overrightarrow{ZA_2}$.

Из этого равенства видно, что вектора $\overrightarrow{ZA_1}$ и $\overrightarrow{ZA_2}$ параллельны, а это значит, что точка $Z$ лежит на прямой $A_1A_2$. Более того, поскольку $m_1,m_2>0$, то эти векторы направлены в разные стороны. Иными словами, точка $Z$ лежит на отрезке $A_1A_2$.

Вопрос о том, где именно она лежит на этом отрезке, решается так же просто: изучим длины наших векторов. Из того же равенства следует, что $|\overrightarrow{ZA_1}|/|\overrightarrow{ZA_2}|=m_2/m_1$. Таким образом, точка $Z$ делит отрезок $A_1A_2$ в отношении $m_2\colon m_1$.

Физический смысл этой точки достаточно хорошо известен. Если закрепить на концах стержня грузики массами $m_1$ и $m_2$, то известно, за какую точку следует подвесить этот стержень, чтобы он оказался в положении равновесия: эта точка должна делить стержень в отношении $m_2\colon m_1$. Обратите внимание на порядок масс в отношении: центр масс находится ближе к *большей* массе (см. рис. 1)

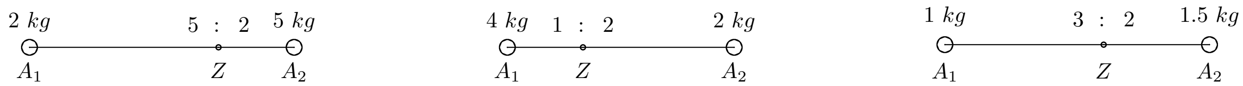


*рис. 1*

**Теорема 1.** Пусть $Z$ — центр масс системы точек $m_iA_i$ (с ненулевой суммой масс), а $O$ — произвольная точка плоскости. Тогда
$$\overrightarrow{OZ}=\frac{m_1\overrightarrow{OA_1}+\dots+m_k\overrightarrow{OA_k}}{m_1+\dots+m_k}=\frac{m_1}{\sum m_i}\overrightarrow{OA_1}+\dots+\frac{m_k}{\sum m_i}\overrightarrow{OA_k}.$$

Эта теорема является обобщением известных фактов такого рода:

вектор из любой точки $O$ в середину отрезка $AB$ равен $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$;

если точка $M$ делит отрезок $AB$ в отношении $2\colon 3$, то $\overrightarrow{OM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$.

**Доказательство теоремы.** Будем доказывать, что $(m_1+\dots+m_k)\overrightarrow{OZ}=m_1\overrightarrow{OA_1}+\dots+m_k\overrightarrow{OA_k}$.

Для этого каждый из векторов $\overrightarrow{OA_i}$ "пропустим через точку $Z$": $\overrightarrow{OA_i}=\overrightarrow{OZ}+\overrightarrow{ZA_i}$. Тогда правая часть нашего равенства превратится в
$$m_1(\overrightarrow{OZ}+\overrightarrow{ZA_1})+\dots+m_k(\overrightarrow{OZ}+\overrightarrow{ZA_k})=(m_1+\dots+m_k)\overrightarrow{OZ}+(m_1\overrightarrow{ZA_1}+\dots+m_k\overrightarrow{ZA_k}).$$
Вторая скобка в этом выражении равна $\overrightarrow{0}$ по определению центра масс. Теорема доказана.

Пришла пора доказать основную теорему.

**Теорема 2.** У любой системы материальных точек (с ненулевой суммарной массой) центр тяжести существует и единственен.

**Доказательство единственности.** Предположим, что нашлось два разных центра масс: $Z$ и $T$. Для них выполнено определение: $m_1\overrightarrow{ZA_1}+m_2\overrightarrow{ZA_2}+\dots+m_k\overrightarrow{ZA_k}=\overrightarrow{0}$, $m_1\overrightarrow{TA_1}+m_2\overrightarrow{TA_2}+\dots+m_k\overrightarrow{TA_k}=\overrightarrow{0}$.

Вычетем из верхнего равенства нижнее:
$$m_1(\overrightarrow{ZA_1}-\overrightarrow{TA_1})+\dots+m_k(\overrightarrow{ZA_k}-\overrightarrow{TA_k})=\overrightarrow{0}.$$

Заметим, что $\overrightarrow{ZA_1} - \overrightarrow{TA_1} = \overrightarrow{ZT}$, и аналогично для каждой $A_i$. Поэтому $m_1\overrightarrow{ZT} + \dots + m_k\overrightarrow{ZT} = \overrightarrow{0}$, то есть $(\sum m_i)\overrightarrow{ZT} = \overrightarrow{0}$. Пользуясь тем, что $m_1 + \dots + m_k \neq 0$, получаем $\overrightarrow{ZT} = \overrightarrow{0}$, т.е. $Z = T$. Единственность доказана.

**Доказательство существования.** Мы просто предъявим центр масс явным образом. Воспользуемся для этого формулой из предыдущей теоремы. Возьмем произвольную точку $O$, и вычислим вектор

$$\frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + m_k\overrightarrow{OA_k}}{m_1 + \dots + m_k}.$$

Отложим этот вектор снова из точки $O$, пусть он закончится в точке $Z$:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + m_k\overrightarrow{OA_k}}{m_1 + \dots + m_k}.$$

Докажем, что точка $Z$ удовлетворяет определению центра масс. На самом деле преобразования, которые мы проделали при доказательстве предыдущей теоремы, были равносильными, т.е. их можно провернуть в обратную сторону. Но давайте проделаем их явно еще раз.

Итак, имеем: $m_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + m_k\overrightarrow{OA_k} = (m_1 + \dots + m_k)\overrightarrow{OZ}$. Тогда

$$m_1\overrightarrow{ZA_1} + \dots + m_k\overrightarrow{ZA_k} = m_1(\overrightarrow{ZO} + \overrightarrow{OA_1}) + \dots + m_k(\overrightarrow{ZO} + \overrightarrow{OA_k}) = (m_1 + \dots + m_k)\overrightarrow{ZO} + (m_1\overrightarrow{OA_1} + \dots + m_k\overrightarrow{OA_k}) =$$

$$= (m_1 + \dots + m_k)\overrightarrow{ZO} + (m_1 + \dots + m_k)\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{0}.$$

Таким образом, точка $Z$ удовлетворяет определению центра масс, и теорема доказана.

**Теорема 3 (теорема о группировке).**

Рассмотрим систему мат. точек $m_1A_1, \dots, m_kA_k, m_{k+1}A_{k+1}, \dots, m_nA_n$. Пусть при этом $m_{k+1} + \dots + m_n \neq 0$ (разумеется, $m_1 + \dots + m_n \neq 0$ тоже). Пусть $X$ — центр масс точек $m_1A_1, \dots, m_kA_k$.

Тогда центр масс исходной системы $m_1A_1, \dots, m_kA_k, m_{k+1}A_{k+1}, \dots, m_nA_n$ совпадает с центром масс системы $m_1A_1, \dots, m_kA_k, (m_{k+1} + \dots + m_n)X$.

Иными словами, можно несколько точек заменить на их центр масс, сместив в него суммарную массу этих точек, и от этой операции общий центр масс не изменится.

**Доказательство.** Пусть $Z$ — центр масс исходной системы, тогда

$$m_1\overrightarrow{ZA_1} + \dots + m_k\overrightarrow{ZA_k} + (m_{k+1}\overrightarrow{ZA_{k+1}} + \dots + m_n\overrightarrow{ZA_n}) = \overrightarrow{0}.$$

Точка $X$ — центр масс последних $n-k$ точек; согласно теореме 1, последняя скобка равна $(m_{k+1} + \dots + m_n)\overrightarrow{ZX}$. Таким образом,

$$m_1\overrightarrow{ZA_1} + \dots + m_k\overrightarrow{ZA_k} + (m_{k+1} + \dots + m_n)\overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{0},$$

что и требовалось доказать.

**Примеры.** Приведем примеры использования этих теорем. Рекомендуется очень внимательно прочитать эти примеры, как следует вникая в логику рассуждения, ибо в таких рассуждениях и заключается смысл этой науки.

**1.** Докажем, что медианы $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 2: 1. Рассмотрим систему материальных точек $A$, $B$, $C$, с единичными массами и найдем ее центр масс. Согласно теореме о группировке, центр масс не изменится, если заменить точки $1A$, $1B$ на материальную точку $2C_1$. Значит, он совпадает с центром масс системы $1C$, $2C_1$, т.е. находится в точке, которая делит медиану $CC_1$ в отношении 2: 1. (См. рис. 2, исходные массы обведены в кружочки, а масса, получающаяся в результате группировки, — в пунктирный кружочек.)

Абсолютно аналогично, центр масс делит в отношении 2: 1 медианы $BB_1$ и $AA_1$. (Здесь неявно используется, что центр масс единственен.) Следовательно, все эти три точки совпадают, и мы доказали нашу теорему.

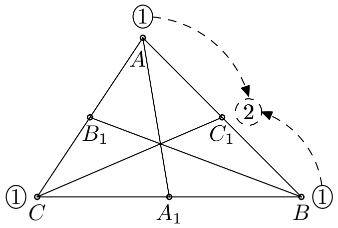


*рис. 2*

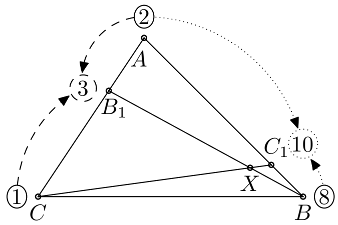


*рис. 3*

**2.** В треугольнике $ABC$ проведены чевианы $BB_1$ и $CC_1$, причем $AB_1 : B_1C = 1 : 2$, и $AC_1 : C_1B = 4 : 1$. Отрезки $BB_1$ и $CC_1$ пересекаются в точке $X$. Узнаем, в каком отношении точка $X$ делит чевианы $BB_1$ и $CC_1$?

Поставим в точку $C$ массу 1, в точку $A$ массу 2, а в точку $B$ — массу 8. Выясним, где находится центр масс этих трех точек.

Центр масс точек $1C$ и $2A$ находится в точке $B_1$, и по теореме о группировке эти точки можно заменить на точку $3B_1$ (см. рис. 3). Следовательно, искомый центр масс находится на отрезке $BB_1$ и делит его в отношении 3: 8.

С другой стороны, центр масс точек $2A$ и $8B$ находится в точке $C_1$, и по теореме о группировке эти точки можно заменить на точку $10C_1$ (см. рис. 3). Следовательно, искомый центр масс находится на отрезке $CC_1$ и делит его в отношении 10: 1.

В силу единственности центра масс, он должен находится как на отрезке $BB_1$, так и на отрезке $CC_1$, т.е. в точке $X$. Значит, их предыдущих двух абзацев получаем, что $BX : XB_1 = 3 : 8$, $\quad CX : XC_1 = 10 : 1$.

**Упражнение 1.** Точка $A_1$ лежит на стороне $BC$, а $B_1$ — на стороне $AC$ треугольника $ABC$, $K$ — точка пересечения $AA_1$ и $BB_1$. При этом $BA_1 = 1$, $A_1C = 2$, $AK = 3$, $KA_1 = 4$. В каком отношении $K$ делит отрезок $BB_1$?

**Упражнение 2.** $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_6$ — середины последовательных сторон шестиугольника. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ совпадают.

**Теорема Чевы.** На сторонах $AB$, $BC$, $AC$ треугольника $ABC$ выбраны точки $C_1$, $A_1$, $B_1$ соответственно. Прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

**Замечание.** Отрезок от вершины треугольника до точки на противоположной стороне часто называют *чевианой*.

**Доказательство.** Обозначим дроби в этом произведении: $\gamma = AC_1/C_1B$, $\alpha = BA_1/A_1C$, $\beta = CB_1/B_1A$.

Предположим, что $\alpha\beta\gamma = 1$ и докажем, что чевианы пересекаются в одной точке. Поставим в точку $B$ массу 1, в точку $C$ массу $\alpha$, и в точку $A$ массу $\alpha\beta$. Тогда

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\alpha=\frac{\alpha}{1},\qquad \frac{CB_1}{B_1A}=\beta=\frac{\alpha\beta}{\alpha},\qquad \frac{AC_1}{C_1B}=\gamma=\frac{1}{\alpha\beta}. \tag{$*$}$$

Это значит, что массы в любых двух вершинах можно снести в соответствующую точку на стороне. Следовательно, центр масс всех трех точек лежит на каждом из отрезков $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$. Поэтому они пересекаются в одной точке.

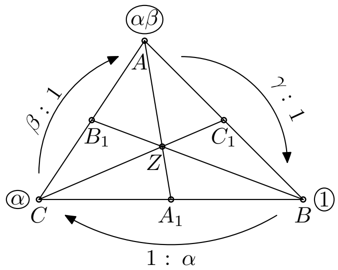

*рис. 4*

Обратно, предположим, что чевианы $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке $Z$. Поставим в вершины те же массы, что выше. Тогда согласно первым двум равенствам в $(*)$, центр масс точек $B$ и $C$ — в точке $A_1$, а точек $C$ и $A$ — в точке $B_1$. Следовательно, центр масс всех трех точек находится на отрезках $AA_1$ и $BB_1$, то есть в точке $Z$. Но тогда центр масс точек $A$ и $B$ обязан попасть в точку $C_1$ (иначе общий центр масс не сможет попасть в точку $Z$). Следовательно, $AC_1/C_1B = 1/\alpha\beta$, т.е. $\gamma = 1/\alpha\beta$. Таким образом, $\alpha\beta\gamma = 1$, что и требовалось.

**Другое доказательство.** Мы приведем второе доказательство, которое не использует центр масс. Кроме того, оно демонстрирует стандартный прием "вывод обратного утверждения из прямого".

Сначала предположим, что чевианы пересекаются в одной точке $Z$. Тогда $S(ACZ)/S(BCZ) = AC_1/C_1B$. В самом деле, у этих двух треугольниках одно и то же основание $CZ$, а отношение высот равно $AC_1/C_1B$ (см. рис. 5а).

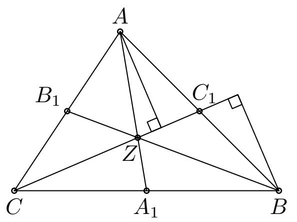

*рис. 5а*

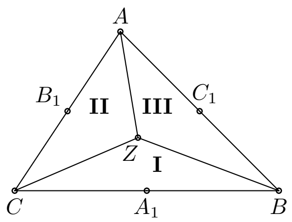

*рис. 5б*

Таким образом (см. рис. 5б),

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{II}}{S_I},\qquad \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{III}}{S_{II}},\qquad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_I}{S_{III}}.$$

Очевидно, что произведение этих трех отношений равно 1, что и требовалось доказать.

Теперь предположим обратное: пусть

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Докажем, что чевианы пересекаются в одной точке. Пусть $Z$ — точка пересечения чевиан $AA_1$ и $BB_1$. Пусть прямая $CZ$ пересекает сторону $AB$ в точке $C_1'$. Тогда из уже доказанной части теоремы следует, что

$$\frac{AC_1'}{C_1'B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Сравнивая два последних равенства, получаем: $AC_1/C_1B = AC_1'/C_1'B$. Но на отрезке $AB$ существует лишь одна точка, делящая его в фиксированном отношении. Значит, $C_1' = C_1$, то есть чевиана $CC_1$ проходит через точку $Z$.

**Следствия.** Частными случаями теоремы Чевы являются многие классические утвеждения.

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке. В самом деле, для медиан все три отношения $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ из теоремы Чевы равны 1.

2. Чевианы, идущие в точки касания сторон со вписанной окружностью, пересекаются в одной точке. Эта точка называется *точкой Жергона*.

В самом деле, стороны делятся точками касания со вписанной окружностью на попарно равные отрезки: $AB_1 = AC_1 = x$, $BC_1 = BA_1 = y$, $CA_1 = CB_1 = z$. И тогда произведение из теоремы Чевы равно $x/y \cdot y/z \cdot z/x = 1$.

**Упражнение 3.** Выведите из теоремы Чевы, что в треугольнике в одной точке пересекаются: а) биссектрисы; б) высоты; в) Чевианы, идущие в точки касания сторон с вневписанными окружностями.

**Пришла пора** подумать об отрицательных массах. Проще всего думать об этом на примере двух масс.

Рассмотрим материальные точки $1A$, $-2B$. Где находится их центр $Z$? Согласно определению, $\overrightarrow{ZA} - 2\overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{0}$, т.е. $\overrightarrow{ZA} = 2\overrightarrow{ZB}$. Значит, точка $Z$ находится на прямой $AB$ за пределами отрезка $AB$. При этом $ZA > ZB$, то есть $Z$ находится со стороны точки $B$, и $AB = BZ$.

Центр масс точек $-1A$ и $2B$ находится в той же самой точке. В самом деле, от умножения обеих масс на одно и то же число (в данном случае, на $-1$), центр масс не меняется.

Нетрудно понять, что происходит в общем случае. Если массы имеют разные знаки, то их центр масс находится на продолжении отрезка, причем со стороны той точки, чья масса больше по модулю.

**Теорема Менелая, 1-й случай.** На сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ выбраны точки $C_1$ и $B_1$ соответственно, а на прямой $BC$ — точка $A_1$. Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

**Доказательство.**

Обозначим, как и раньше, $\gamma = AC_1/C_1B$, $\alpha = BA_1/A_1C$, $\beta = CB_1/B_1A$.

Поставим в точку $B$ массу 1, а в точку $C$ массу $-\alpha$. Поскольку $\alpha = BA_1/A_1C$, их центр масс попадет в точку $A_1$ (см. рис. 6а).

Кроме того, поставим в точку $C$ массу $-\alpha$, а в точку $A$ массу $\alpha\beta$. Их центр масс окажется в точке $B_1$.

Таким образом, центр масс всех четырех материальных точек лежит на прямой $A_1B_1$.

Заметим, что в точке $C$ на самом деле образовалась масса $\alpha - \alpha = 0$. Поэтому центр масс совпадает с центром масс точек $1B$ и $\alpha\beta A$, то есть находится на отрезке $AB$ и делит его в отношении $1 : \alpha\beta$.

Подведем небольшой итог: центр масс

(1) находится на пересечении прямых $A_1B_1$ и $AB$,

(2) делит отрезок $AB$ в отношении $1 : \alpha\beta$.

Пусть теперь известно, что точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на одной прямой. Тогда, согласно (1), он попадает в $C_1$. А значит, согласно (2), $\gamma = AC_1/C_1B = 1/\alpha\beta$, т.е. $\alpha\beta\gamma = 1$, что и требовалось.

Обратно, предположим, что $\alpha\beta\gamma = 1$, т.е. $1/\alpha\beta = \gamma = AC_1/C_1B$. Из (2) тогда следует, что центр масс попал в точку $C_1$; а тогда, согласно (1), $C_1$ лежит на $A_1B_1$. Теорема полностью доказана.

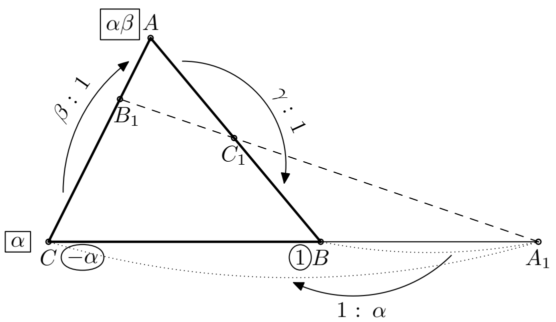

*рис. 6а*

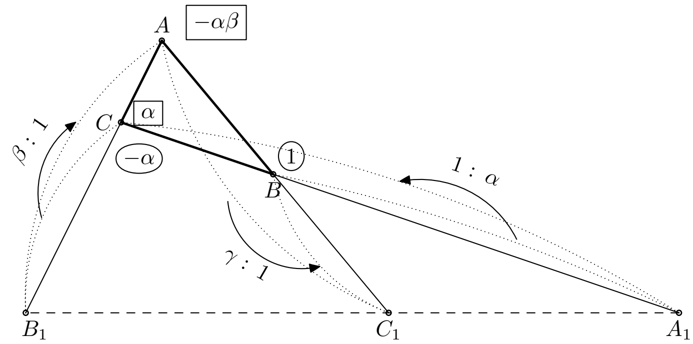

*рис. 6б*

В этом доказательстве в одну из точек были поставлены две массы, которые с другой точки зрения можно считать одной массой, равной сумме этих двух (см. замечание 3). Вот упражнение на применение этого приема.

**Упражнение 4.** На сторонах $BC$, $CA$ и $AB$ треугольника $ABC$ выбраны точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ соответственно. Они делят стороны в равных отношениях: $BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = AC_1 : C_1B$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ совпадают.

**Теорема Менелая, 2-й случай.** На продолжениях сторон $AB$, $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ выбраны точки $C_1$, $B_1$, $A_1$ соответственно. Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

**Доказательство** полностью аналогично предыдущему случаю, разве что в точку $A$ ставится не масса $\alpha\beta$, а масса $-\alpha\beta$ (см. рис. 6б).

Как наверняка бросается в глаза, теоремы Чевы и Менелая очень похожи между собой. В теореме Чевы тоже есть два случая, как и в теореме Менелая, хоть мы и не обсуждали пока второй случай. Можно завести терминологию, которая поможет слегка обобщить формулировки этих теорем.

**Определение.** Пусть $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ — коллинеарные (то есть параллельные) векторы, причем $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$. Тогда $\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{b}$ для некоторого числа $\lambda$. Это число называется *частным* от деления вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b}$ и обозначается $\dfrac{\overrightarrow{a}}{\overrightarrow{b}}$.

Обратим внимание: частной от деления векторов определено **только в случае** коллинеарных векторов. Ясно, что если вектора сонаправлены, то $\dfrac{\overrightarrow{a}}{\overrightarrow{b}} > 0$, а если направлены в разные стороны, то $\dfrac{\overrightarrow{a}}{\overrightarrow{b}} < 0$.

**Лемма.** Пусть $Z$ — центр масс материальных точек $m_1A_1$ и $m_2A_2$. Тогда $\overrightarrow{A_1Z}/\overrightarrow{ZA_2} = m_2/m_1$.

*Доказательство.* Это просто переформулировка определения: $m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} = \overrightarrow{0}$, то есть $\overrightarrow{A_1Z} = \dfrac{m_2}{m_1}\overrightarrow{ZA_2}$. Это и значит ровно то, что написано в нашей лемме.

**Теоремы Чевы и Менелая, общая версия.**

Пусть на прямых $AB$, $BC$, $CA$ выбраны точки $C_1$, $A_1$, $B_1$. Рассмотрим выражение

$$s = \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}.$$

(1) Прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $s = 1$.
(2) Точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $s = -1$.

**Комментарий.** Ясно, что существует 4 случая расположения этих трех точек: на сторонах могут лежать от 0 до 3 точек, остальные — на продолжениях сторон. Если точка лежит на стороне, то соответствующее отношение векторов положительно. Если же на продолжении, то отрицательно. Таким образом, условие теоремы Чевы может выполняться в двух случаях: все точки на сторонах; или одна точка на стороне, две на продолжениях. А теорема Менелая — если две точки на стороне, одна на продолжении; или если все три на продолжениях.

Для иллюстрации проведем доказательство теоремы Чевы прямо в этой формулировке с векторами. Обозначим, как и раньше, $\gamma = \overrightarrow{AC_1}/\overrightarrow{C_1B}$, $\alpha = \overrightarrow{BA_1}/\overrightarrow{A_1C}$, $\beta = \overrightarrow{CB_1}/\overrightarrow{B_1A}$. Только теперь эти числа могут быть отрицательны.

Поставим в точку $B$ массу 1, в точку $C$ массу $\alpha$, в точку $A$ массу $\alpha\beta$ (полезно снова взглянуть на рисунок 4). Тогда, согласно лемме, центр масс $B$ и $C$ попадет в точку $A_1$, а центр масс $C$ и $A$ — в точку $B_1$. Следовательно, общий центр масс $Z$ находится в пересечении прямых $AA_1$ и $BB_1$. Значит, третья прямая проходит через $Z$ тогда и только тогда, когда центр масс $B$ и $C$ находится в точке $C_1$. Ну а последнее условие равносильно равенству $\gamma = 1/\alpha\beta$, т.е. $\alpha\beta\gamma = 1$. Теорема доказана.

**Наконец,** приведем еще одно доказательство теоремы Менелая, не использующее геометрии масс. Докажем, что если точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ лежат на одной прямой, то $\alpha\beta\gamma = 1$. Обратная теорема будет следовать из этой станданртным трюком с "исправлением одной точки".

Пусть $d_a$, $d_b$, $d_c$ — расстояния от точек $A$, $B$, $C$ до прямой $A_1B_1C_1$. Тогда из подобия прямоугольных треугольников легко следует, что

$$\gamma = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{d_a}{d_b}, \quad \alpha = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{d_b}{d_c}, \quad \beta = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{d_c}{d_a}.$$

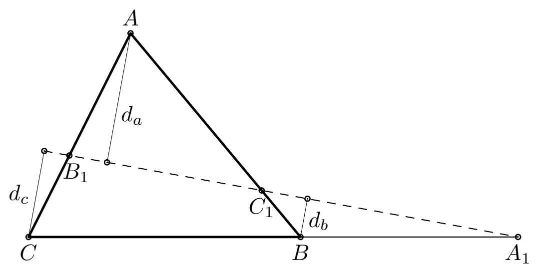

*рис. 7*

Перемножая, получаем требуемое. Это рассуждение не зависит от расположения точек на прямых $AB$, $BC$, $AC$.

Приведем одно из изящных следствий теоремы Менелая.

**Теорема.** Точки пересечения биссектрис внешних углов треугольника с прямыми, содержащими противоположные стороны, лежат на одной прямой.

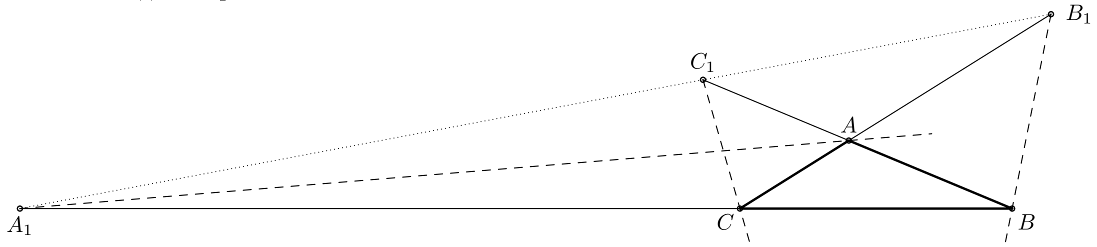

*рис. 8*

*Доказательство.* Как известно, $AC_1/C_1B = AC/CB$, $\quad BA_1/AC = BA/AC$, $\quad CB_1/B_1A = CB/BA$. Перемножая эти равенства, получаем условие теоремы Менелая.

**Наблюдение.** Что происходит в случае, когда сумма масс равна нулю?

1. Центра масс может не существовать. Например, в случае двух материальных точек $1A$ и $-1B$. В самом деле, если $1 \cdot \overrightarrow{ZA} + (-1) \cdot \overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{0}$, то $\overrightarrow{ZA} = \overrightarrow{ZB}$, что невозможно.

2. Центр масс может и существовать. Например, пусть $C$ — середина отрезка $AB$. Тогда центром масс системы $1A$, $1B$, $-2C$ является *любая точка плоскости*! В самом деле, $\overrightarrow{ZA} + \overrightarrow{ZB} - 2\overrightarrow{ZC} = \overrightarrow{0}$ для любой $Z$, что равносильно $\overrightarrow{ZC} = (\overrightarrow{ZA} + \overrightarrow{ZB})/2$.

На самом деле, если у системы с нулевой суммой масс существует центр масс $Z$, любая точка плоскости $T$ является центром масс. Действительно, если к равенству из определения $m_1\overrightarrow{ZA_1} + \cdots + m_k\overrightarrow{ZA_k} = \overrightarrow{0}$ добавить нулевой вектор $(m_1 + \cdots + m_k)\overrightarrow{TZ}$, то получим $m_1\overrightarrow{TA_1} + \cdots + m_k\overrightarrow{TA_k} = \overrightarrow{0}$.

Наконец, приведем последнюю теорему, помогающую формулировать рассуждения из геометрии масс.

**Лемма.** Пусть на прямой даны различные точки $A$ и $B$ и произвольная точка $Z$. Тогда в точки $A$ и $B$ можно поместить такие массы, чтобы их центр масс оказался в точке $Z$.

**Замечание.** Разумеется, такие массы подбираются не единственным образом. От умножения обеих масс на одно и то же число положение центра не меняется. Поэтому можно считать, что массы отнормированы так, что их сумма равна 1. Как будет видно из доказательства, этим условием массы уже определяются однозначно.

**Доказательство.** Мы хотим поставить такие массы $a$ и $b$, что $a\overrightarrow{ZA}+b\overrightarrow{ZB} = \overrightarrow{0}$. Преобразуем: $a\overrightarrow{ZA}+b(\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0}$, то есть $(a+b)\overrightarrow{ZA} = -b\overrightarrow{AB}$. Будем считать, что $a+b=1$, тогда $\overrightarrow{ZA} = -b\overrightarrow{AB}$ и число $b$ однозначно находится из последнего равенства (тут используется, что точки $A$ и $B$ различны).

**Примеры.** Будет весьма полезно внимательно изучить несколько примеров. На рис. 4 в верхних кружочках показаны некоторые массы, которые можно поставить в точки $A$ и $B$, чтобы центр масс попал в $Z$ (они равны по модулю длинам соответствующих векторов $\overrightarrow{ZB}$ и $\overrightarrow{ZA}$). Внизу же показаны "отнормированные" массы, с суммой 1. Обратите внимание, что в случае, когда центр масс попадает вне отрезка $AB$, он находится с той стороны, где стоит большая по модулю масса (а вовсе не с той, где стоит отрицательная масса, как многие могут подумать).

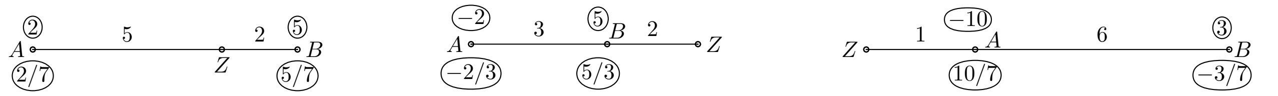


*рис. 6*

**Теорема.** Пусть на плоскости даны точки $A$, $B$ и $C$, не лежащие на одной прямой, и произвольная точка $Z$. Тогда в точки $A$, $B$ и $C$ можно поместить такие массы, чтобы их центр масс оказался в точке $Z$.

**Доказательство.** Если точка $Z$ совпадает с одной из трех данных точек, то утверждение очевидно (надо расставить массы 1, 0, 0). Пусть это не так. Заметим, что верно хотя бы одно из трех утверждений: либо прямая $CZ$ пересекает прямую $AB$, либо прямая $BZ$ пересекает прямую $AC$, либо прямая $AZ$ пересекает прямую $BC$. Пусть, для определенности, либо прямая $CZ$ пересекает прямую $AB$ в точке $C_1$. Тогда, по лемме, в точки $A$ и $B$ можно поставить такие массы $a$ и $b$, что их центр масс окажется в точке $C_1$ (по лемме). Если снести эти массы в точку $C_1$ (в ней окажется масса $a+b$, то можно подобрать такую массу $c$ в точке $C$, что центр масс $(a+b)C_1$ и $cC$ находится в точке $Z$.

**Определение.** Пусть даны три точки $A$, $B$ и $C$, не лежащие на одной прямой. Если $Z$ — произвольная точка плоскости, то три массы, которые надо расставить в точках $A$, $B$, $C$, чтобы их центр масс попал в $Z$, называются *барицентрическими координатами* точки $Z$. Как и в лемме, они определены с точностью до пропорциональности. Обычно принято считать, что сумма этих трех масс равна 1; этим условием барицентрические координаты определяются однозначно.

Часто доказательство при помощи геометрии масс сильно упрощаются, если начать его словами "поставим в вершины треугольника такие массы, чтобы их центр оказался в нужной точке". Это позволяет не подбирать массы по данным отношениям, а наоборот, вычислять отношения исходя из поставленных масс (т.е. барицентрических координат).

**Упражнение 5 (Теорема Ван-Обеля).** Чевианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в одной точке $K$. Докажите, что $AK/KA_1 = AB_1/B_1C + AC_1/C_1B$.

**Упражнение 6 (Теорема Жергона).** Чевианы $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что $OA_1/AA_1 + OB_1/BB_1 + OC_1/CC_1 = 1$.

Ну и напоследок еще два упражнения на повторение.

**Упражнение 7.** Докажите, что средняя линия выпуклого четырехугольника делит диагонали в одинаковом отношении.

**Упражнение 8.** Точка $O$ — середина медианы $AA_1$ треугольника $ABC$. Прямая $CO$ пересекает $AB$ в точке $C_1$. Найдите отношение площади треугольника $AOC_1$ к площади треугольника $ABC$.