**ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС**

**«ПРАКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»**

***Учитель физики и математики***

***МБОУ- СОШ с. Красное Знамя***

***Бурякова С. А.***

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Программа элективного курса для учащихся 9 классов, рассчитана на 12 часов.

**Цели:** повысить качество подготовки учащегося к продолжению образования; усилить практическую направленность школьного курса геометрии; повысить интерес, мотивацию и, как следствие эффективность изучения геометрии; создать условий для формирования и развития:

* интеллектуальных и практических умений в области геометрии, позволяющих решать задачи практического содержания;
* интереса к изучению геометрии;
* умения более осознанно применять на практике геометрические законы и теоремы;
* умения самостоятельно приобретать и применять знания;
* умения работать с источником информации;
* творческих способностей, умения работать в группе, вести дискуссию, отстаивать свою точку зрения.

В процессе обучения учащиеся приобретают следующие конкретные у м е н и я (компетентности), которые позволяют им быть успешными на следующей ступени образовательной ступени:

* выбирать правильный алгоритм решения геометрической задачи;
* оценивать величины и находить их приближенные значения;
* работать с таблицами и другими справочными материалами;
* доказывать свою точку зрения;
* делать выводы.

Перечисленные умения формируются на основе следующих з н а н и й:

* цикл познания в естественных науках: гипотезы, аксиомы, теоремы, следствия;
* решения практических задач;
* представление о соотношениях размеров реальных объектов и связанных с ними геометрических задач;
* работа с таблицами и справочными материалами.

В процессе изучения курса учащиеся знакомятся с именами таких ученых, как Евклид, Аристотель, Пифагор, Н. И. Лобачевский и с их ролью в становлении геометрии как науки.

Завершается изучение элективного курса проведением защиты творческих работ.

**Тематический план**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№**  **п\п** | **Тема занятия** | **Всего часов** | **В том числе** | | | **Форма контроля** |
| **теор.**  **занятия** | **семин.**  **занятия** | **практ.**  **занятия** |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1. | Вводное занятие  История геометрии как науки (презентацией) | 1 | 1 |  |  | -- |
| 2. | Углы | 1 | 0,5 | 0,5 |  | тест |
| 3. | Окружность | 1 | 0,5 | 0,5 |  | самостоятельная работа |
| 4. | Расстояния. Теорема Пифагора | 1 | 0,5 | 0,5 |  | тест |
| 5. | Подобие | 1 | 0,5 | 0,5 |  | самостоятельная работа |
| 6. | Измерительные работы на местности | 1 |  |  | 1 | -- |
| 7. | Тригонометрические функции | 1 | 0,5 | 0,5 |  | тест |
| 8. | Площадь | 2 | 0,5 | 1,5 |  | самостоятельная работа |
| 9. | Объем | 2 | 0,5 | 1,5 |  | самостоятельная работа |
| 10. | Заключительное занятие | 1 |  | 1 |  | защита творческих работ |
|  | **Всего часов** | **12** |  |  |  |  |

**Литература**

1. *Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др.* Геометрия, 7 – 9: Учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 384с. : ил.;
2. *Смирнова И.* Геометрические задачи с практическим содержанием /И. Смирнова, В. Смирнов. – М.: Чистые пруды, 2010. – 32с.: ил. – (Библиотечка «Первого сентября», серия «Математика». Вып.34);
3. *Кукарцева Г.**И*.Сборник задач по геометрии в рисунках и тестах. 7 - 9 классы/ Учебное пособие. – К.: ГИППВ, 1998, 128с.;
4. *Виленкин Н. Я.* О вычислении объёма усечённой пирамиды в Древнем Египте. *Историко-математические исследования*, вып. 28, 1985;
5. Бобынин В.В. *Математика древних египтян (по папирусу Ринда).* М., 1882;
6. Занимательная алгебра. Занимательная геометрия. / Я.И. Перельман. - Ростов н/Д: ЗАО «Книга», 2005;
7. И. Г. Башмакова, Э.И. Березкина и др. История математики. Том 1, С древнейших времен до начала нового времени. – М,: Наука, 1970;
8. http://ru.wikipedia.org/wiki/

**СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ**

**Занятие 1**

**Тема:** История геометрии как науки

**Цель:** познакомить учащихся с историей развития геометрии

**Форма проведения:** лекция с презентацией *(см. Приложение)*

**Лекция**

Геометрия, как и другие науки, возникла из потребностей практики. Само слово «геометрия» греческое, в переводе означает «землемерие».

Люди очень рано столкнулись с необходимостью измерять земельные участки. Это требовало определенного запаса геометрических и арифметических знаний. Постепенно люди начали измерять и изучать свойства более сложных геометрических фигур.

По дошедшим до нас египетским папирусам и древневавилонским текстам видно, что уже за 2 тысячи лет до нашей эры люди умели определять площади треугольников, прямоугольников, трапеций, приближенно вычислять площадь круга. Они знали также формулы для определения объемов куба, цилиндра, конуса, пирамиды и усеченной пирамиды. Сведения по геометрии вскоре стали необходимы не только при измерении земли.

 Развитие архитектуры, а несколько позднее и астрономии предъявило геометрии новые требования. И в Египте и в Вавилоне сооружались колоссальные храмы, строительство которых могло производиться только на основе предварительных расчетов.

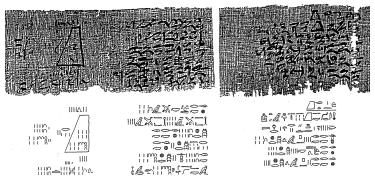
Рассмотрим, какими познаниями в геометрии обладали некоторые народы и цивилизации:

1. Геометрические знания в Древнем Египте

Современная наука располагает сравнительно небольшим числом египетских математических документов - около пятидесяти папирусов. Самым древним из них является «московский папирус», относящийся к эпохе 1850 г. до н.э. и содержащий 25 задач с решениями. Папирус был приобретен в 1893 г. русским востоковедом B.C. Голенищевым, а в 1912 г. перешел в собственность Московского музея изобразительных искусств. Папирус расшифрован русским академиком Б.А. Тураевым в 1917 г., а детально изучен в 1927 г. советским академиком В.В. Струве.

Основываясь на способе написания курсивного [иератического](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D0%B5%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0) текста, специалисты предполагают, что он принадлежит ко времени правления *XI династии (Аменемхетов-Сенусертов)* периода [*Среднего царства Древнего Египта*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BD%D0%B5%D0%B5_%D1%86%D0%B0%D1%80%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%BE_%28%D0%94%D1%80%D0%B5%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%95%D0%B3%D0%B8%D0%BF%D0%B5%D1%82%29)*.* Возможно, Московский математический папирус был написан при фараоне [*Сенусерте III*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B5%D0%BD%D1%83%D1%81%D0%B5%D1%80%D1%82_III) или [*Аменемхете III*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%B5%D0%BC%D1%85%D0%B5%D1%82_III)*.*

#### Описание Московского математического папируса

 ***Слайд 2***

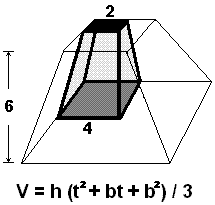
Длина Московского математического папируса составляет 5,40 м, а его ширина от 4 до 7 см. Весь текст папируса в [1930](http://ru.wikipedia.org/wiki/1930) был разбит основателем марксистской школы исследователей Древнего Востока в [СССР](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%A1%D0%A1%D0%A0) [Василием Васильевичем Струве](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%82%D1%80%D1%83%D0%B2%D0%B5,_%D0%92%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D0%B8%D0%B9_%D0%92%D0%B0%D1%81%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87) на 25 задач, к каждой из которых составитель привёл решение. Большинство задач Московского математического папируса посвящены практическим проблемам, связанным с применением [геометрии](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F).

***Задача № M10 Московского математического папируса***

Задача № 10 Московского математического папируса, связанная с вычислением поверхности корзины с отверстием 4,5, может сводиться к нахождению площади либо поверхности полушария, либо боковой поверхности полуцилиндра. Во всяком случае, это первый в истории случай определения площади кривой поверхности, требующий использования числа π, которое египтяне определяли ≈  3,16 = ( ( \frac {16}{9} )^2), тогда как на всём Древнем Ближнем Востоке оно считалось равным трём. Таким образом, Московский математический папирус свидетельствует о том, что египтяне могли с большей точностью вычислять площади треугольника, трапеции, прямоугольника, круга, а также объёмы пирамиды, призмы, параллелепипеда, цилиндра и усечённой пирамиды.

***Задача № M14 Московского математического папируса***

Наибольшее внимание египтологов и математиков привлекает четырнадцатая задача Московского математического папируса. Само её существование указывает на то, что древние египтяне умели находить объёмы не только тетраэдра, но и усечённой пирамиды. ***Слайд 3***

***[](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Mfrus3.GIF)Вычисление усеченной пирамиды****. Вам скажут: пирамида имеет в высоту 6, её основание - 4, а вершина - 2. Для решения вычислите квадрат 4-х. Получите 16. Сложите 4 и 4. Получите 8. Найдите квадрат от 2-х. Получите 4. Теперь сложите 16, 8 и 4. Это будет 28. Умножьте 1/3 на 6. Это будет 2. Умножьте 2 на 28. Это будет 56. 56 - вот это и есть ответ. Вы решили все правильно.*

Современное описание условия данной задачи: дана пирамида, верхняя часть которой отделена от нижней так, что нижняя часть пирамиды является четырёхугольной усеченной пирамидой с основаниями, равными соответственно 4 и 2 единицы, при высоте 6 единиц. Необходимо найти объём этого тела.

Нам известно, что объём усеченной пирамиды определяется по формуле:

V=\frac{1}{3}h(b_1^2+b_1b_2+b_2^2).

Путём соответствующих вычислений автор папируса определил, что объём пирамиды составляет:

V=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot (2^2+2\cdot 4+4^2)=56.

Остаётся неизвестным путь нахождения этой формулы.

Между тем, в [Вавилоне](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D0%BE%D0%BD) для решения этой же задачи применили бы менее точную формулу: V = \frac{1}{2} h(a^2 + b^2).

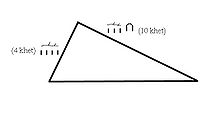
Другие папирусы относятся к более позднему периоду, а их содержание во многом повторяет «московский» и «лондонский». В задачах речь идет о количестве хлеба и различных сортов пива, о кормлении животных и хранении зерна. Геометрические задачи касаются преимущественно измерений и содержат правила для вычисления площадей треугольника и трапеции. Для вычисления площади произвольного четырехугольника со сторонами  *a,  b,  c, d* использовалось правило, записываемое в современных обозначениях в виде S=2a+c http://artemovo-st.narod.ru/images/clip_image001.png2b+d. Для площади круга с диаметром *d* правило имело вид S=(d?9d)2. По-видимому, египтяне не сознавали, что эти правила являются приближенными.

**Математический папирус Ахмеса** (также известен как **папирус Ринда** или **папирус Райнда**) — древнеегипетское учебное руководство по [арифметике](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0) и [геометрии](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F) периода Среднего царства, переписанное ок. 1650 до н. э. писцом по имени Ахмес на свиток [папируса](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D0%BF%D0%B8%D1%80%D1%83%D1%81) длиной 5,25 м. и шириной 33 см. ***Слайд 4***

Папирус Ахмеса был обнаружен в 1858 и часто называется папирусом Райнда по имени его первого владельца. В 1870 папирус был расшифрован, переведён и издан. Ныне большая часть рукописи находится в Британском музее в [Лондоне](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%BE%D0%BD%D0%B4%D0%BE%D0%BD), а вторая часть — в [Нью-Йорке](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D1%8C%D1%8E-%D0%99%D0%BE%D1%80%D0%BA)



#### Задача № R51 папируса Ринда

[](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Triangle-R51-Papyrus-rhind.jpg) ***Слайд 5***

*треугольник из задачи R51 папируса Ринда*

**Пример расчета площади треугольника**. Если кто-то говорит вам: "Треугольник имеет «mryt» в 10 khet, а его основание - 4 khet. Какова его площадь?" Вычислить вам нужно половину от 4-х. Затем 10 умножьте на 2. Вот перед вами и ответ.

Слово «mryt» вероятно означает высоту. «Khet» - мера измерения.

~A = \frac{base}{2}{mryt}

Формула египтян идентична современной:

~S = \frac{ah}{2}

Судя по одной из задач папируса Ахмеса, египтянам было известно свойство средней линии трапеции. Этот факт подтверждается рисунками на стенах храма Эдфу в Верхнем Египте, сделанными в более поздний период (II в. до н.э.). В папирусах есть правила для вычисления объемов таких тел, как куб, параллелепипед, цилиндр, причем все они рассматриваются конкретно как сосуды для хранения зерна. Самым замечательным результатом в египетских измерениях была формула (точнее, правило, ибо никаких формул тогда, конечно, не было) для вычисления объема усеченной пирамиды с квадратным основанием *V=h(a2+ab+b2),* где  *a* и  *b* — длины сторон квадратных оснований, *h* — высота.

Этот результат, которому не найдено соответствующего ни в какой другой древней математике, особенно примечателен тем, что нет никаких оснований считать, что египтянам была известна теорема Пифагора! Ссылки на рассказы древнегреческих ученых, побывавших в Египте и видевших арпадонаптов, строивших прямые углы с помощью веревки, имевшей 3 + 4 + 5 = 12 узлов, не подтверждаются египетскими текстами. По тем же причинам сомнительно сознательное использование египтянами подобия, хотя в погребальной камере отца фараона Рамсеса II одной из пирамид обнаружена стена, покрытая сетью квадратиков, с помощью которой на стену можно переносить в увеличенном виде рисунки меньших размеров.

В Древнем Египте не было терминов «фигура», «сторона фигуры». Вместо этого использовались слова «поле», «границы поля», «длина поля». Все математические знания египтян были исключительно рецептурными и не осознавались в качестве самостоятельной ветви знаний'. Несмотря на путешествия египтян в папирусных лодках, астрономия в Египте находилась на таком же примитивно-прикладном уровне, что и математика. Однако и крупнейший историк древности Геродот, и философ Демокрит, и сам Аристотель именно Египет считали колыбелью геометрии. Вот что пишет об этом древнегреческий ученый Евдем Родосский (V в. до н.э.). «Геометрия была открыта египтянами и возникла при измерении земли вследствие разливов Нила, постоянно смывающего границы участков. Нет ничего удивительного, что эта наука, как и другие, возникла из практических потребностей человека. Всякое возникающее знание из несовершенного состояния переходит в совершенное».

#### 2. Геометрия в Вавилоне

Возделывание почвы в районах блуждающих Тигра и Евфрат, текущих с Армянского нагорья, требовало большего технического искусства и регулировки, чем в районе Нила. К тому же Двуречье было перекрестком многочисленных караванных путей. Вместе с товарами в Вавилон попадали знания других народов.

Шумеры писали на глиняных плитках, которые в большом количестве находят при раскопках. Найдены 44 глиняные таблички, которые можно считать своеобразной математической энциклопедией вавилонян, относящейся к 2000 г. до н.э. В табличках даны способы решения практических задач, связанных с земледелием, строительством и торговлей.

Основной чертой геометрии вавилонян был ее арифметико-алгебраический характер. Как и в Египте, геометрия развивалась на основе практических задач измерения, но геометрическая форма задачи обычно являлась только средством для постановки алгебраической проблемы. Приведем пример, взятый с одной из табличек периода царствования Хаммурапи.

*«Площадь А, состоящая из суммы двух квадратов, составляет 1000. Сторона одного из квадратов составляет   стороны другого квадрата, уменьшенной на 10. Каковы стороны квадратов?»  Если  x и  y — стороны квадратов, то мы будем иметь систему уравнении x2 + y2 = 1000;  y=32x?10,  сводящуюся к квадратному уравнению 913x2?340x?900=0, имеющему положительный корень x  = 30.*

В действительности решение задачи в клинописном тексте таблички, как и во всех восточных задачах, ограничивается перечислением всех этапов вычисления, необходимых для решения квадратного уравнения: «Возведи в квадрат 10, это дает 100, вычти 100 из 1000, это дает 900...» и так далее.

Тексты глиняных табличек вавилонян содержат правила для вычисления площадей простых прямолинейных фигур и для объемов простых тел. Теорема Пифагора была известна не только для частных случаев, но и в полной общности — трудно даже предположить, что вавилоняне подбором смогли найти такие «пифагоровы тройки» чисел, как 65; 72; 97 или 3456; 3367; 4825.

Помимо простейших фигур, рассматривавшихся в Египте, математики Вавилона изучали некоторые правильные многоугольники, сегменты круга. Решались также задачи на подобие фигур. Пропорциональность отрезков, образующихся на прямых, пересеченных несколькими параллельными прямыми, была известна задолго до Фалеса. Это подтверждают клинописные таблички с задачами на построение пропорциональных отрезков путем проведения в прямоугольном треугольнике параллелей к одному из катетов. Известно было и свойство средней линии трапеции.

В заключение отметим, что вавилонская математика оказала огромное влияние на математику Индии и Древней Греции, а также послужила отправным пунктом для расцвета математической культуры Ванского царства (Урарту) и соседней с ним Армении.

#### 3.Древнеиндийская геометрия

Древнеиндийская геометрия имела ярко выраженный практический характер и была тесно связана как с повседневными потребностями, так и с религиозными обрядами, в частности с культом жертвоприношения. В части дошедших до нас под названием «Сульва-сутра» («Правила веревки») священных древнеиндийских книг излагаются свойства фигур, связанных с построением алтарей-жертвенников. В настоящее время известно три книги «Сульва-сутра», авторами которых считаются Бодгойана (или Бодгоя-на, VI-VII в. до н.э.), Катиайана (или Катияна, IV-V в. до н.э.) и Апастамба (IV-V в. до н.э.).

В этих книгах встречаются описания вычисления площадей, построения квадрата по данной его стороне, деление отрезка пополам, есть примеры практического применения подобия треугольников и теоремы Пифагора, которая имела следующую формулировку: «Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов его большей и меньшей сторон. Квадрат на диагонали квадрата в два раза больше самого квадрата».

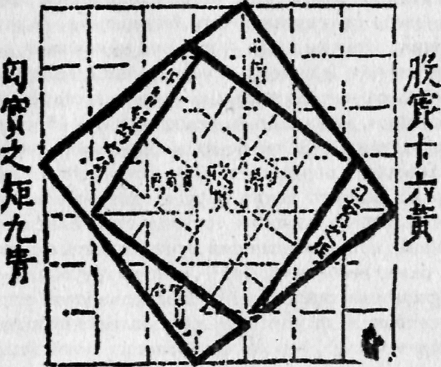
В «Сутрах» правила и приемы приводятся так же, как у египтян и вавилонян, без каких-либо объяснений. Вот как выглядит «правило Катиайаны» для построения квадрата, равновеликого кругу: «Разделить диаметр на 15 равных частей и взять 13 таких частей для стороны квадрата, равного по пощади данному кругу». А вот правило для построения прямого угла — перпендикуляра к направлению жертвенника: «К концам отрезка длиной 39 прикрепим концы веревки длиной 51 с узлом на расстоянии 15 от одного из концов; держа за узел и, подтянув веревку, получим прямой угол». Кроме приведенной выше, индийцы знали другие пифагоровы тройки, например, 8; 15; 17 и 12; 35; 37.

#### Древний Китай

Все сочинения, содержащие математические знания китайских ученых, дошли до нас от периода династии Хань (206-220 г. до н.э.), но в них содержится материал более раннего происхождения. Самое древнее китайское математико-астрономическое сочинение «Чжоу-би», написанное около 1100 г. до н.э., в первой главе содержит предложения, относящиеся к прямоугольному треугольнику, среди которых — и теорема Пифагора. В этом же сочинении содержится правило для определения площади круга: «Умножь диаметр сам на себя, раздели на четыре, возьми три раза».

Итогом всех математических знаний древних китайцев явля¬ется трактат «Математика в девяти книгах» (II в. до н.э.), составителем которого является Чжан Цан (ум. 152 г. до н.э.). Трактат содержит 264 задачи без пояснительных текстов.

В трактате «Математика в девяти книгах» первая книга названа «Измерение полей» и содержит задачи на вычисление площадей земельных участков различной геометрической формы. Среди приведенных фигур имеются треугольники, трапеции, прямоугольники, круги, круговые сегменты, сектора и кольца. Правила вычисления площадей прямолинейных фигур в основном совпадают с современными, но терминология еще несовершенна: вместо понятия «трапеция» употребляется название «косое поле», вместо «сегмента» — «поле в виде лука» и т.д.

В пятой книге «Математики в девяти книгах» содержатся задачи на вычисление объемов крепостных стен, валов, плотин, каналов и других сооружений, и в связи с этим вычисляются объемы параллелепипеда, пирамиды, усеченной пирамиды, цилиндра. Из других письменных документов ученые делают предположение, что китайцы умели вычислять объем конуса и сферы, но достоверно сказать об этом сегодня не представляется возможным.

***Слайд 7***

Девятая книга трактата имеет название «Гоу-гу» — так назывались катеты прямоугольного треугольника, причем ***го****у* — вертикальный катет (в буквальном переводе — «крюк»), ***гу*** — горизонтальный катет («ребро», «связка»). Все 24 задачи этой главы решаются по правилу «гоу-гу», связывающему катеты и гипотенузу прямоугольного треугольника, то есть по теореме Пифагора. В летописях отмечается, что пифагорова тройка 3; 4; 5 была известна в Китае около 2200 г. до н.э. Прослеживая зарождение и становление геометрии, легко усмотреть поразительную близость математических сведений у различных народов, практически не общавшихся. Это сходство (как по форме, так и по содержанию) говорит об общности практических задач, породивших эти математические знания. Так на протяжении тысячелетий опытом и разумом многочисленных безвестных тружеников и мыслителей закладывался фундамент математической науки.

\*\*\*

...И все же, несмотря на то что человечество накопило такие обширные знания геометрических фактов, геометрия как наука еще не существовала.

Геометрия стала наукой только после того, как в ней начали систематически применять логические доказательства, начали выводить геометрические предложения не только путем непосредственных измерений, но и путем умозаключений, путем вывода одного положения из другого, и устанавливать их в общем виде. Обычно этот переворот в геометрии связывают с именем ученого и философа VI века до нашей эры Пифагора Самосского».

Однако все новые проблемы и созданные в связи с ними теории привели к тому, что совершенствовались сами способы математических доказательств, возрастала потребность создания стройной логической системы в геометрии.

*Но как строить такую систему?*

Ведь каждое отдельное предложение мы доказываем, опираясь на некоторые другие предложения. Эти предложения в свою очередь доказываются ссылкой на какие-то третьи предложения и т. д., эти ссылки мы могли бы продолжать до бесконечности, и процесс доказательства никогда бы не закончился. Как же быть? Это обстоятельство заметили еще в древности, и тогда же был найден выход. Не позднее IV века до нашей эры греческие математики при построении геометрии выбирали некоторые предложения, которые принимались без доказательства, а все остальные предложения выводили из них строго логически. Предложения, принятые без доказательства, назывались аксиомами и постулатами.

*Ватиканский манускрипт, т.2, 207v — 208r. Euclid XI prop. 31, 32 и 33.*

Наиболее совершенным образцом такой теории на протяжении более 2 тысяч лет служили «Начала» Евклида, написанные около 300 года до нашей эры».

# Начала Евклида

[](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D0%B0%D0%B9%D0%BB:Euclid_Vat_ms_no_190_XI_prop_31.jpg) «Это удивительнейшее произведение мысли дало человеческому разуму ту уверенность в себе, которая была необходима для его последующей деятельности. Тот не рожден для теоретических исследований, кто в молодости не восхищался этим творением» .

[*Альберт Эйнштейн*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%B9%D0%BD%D1%88%D1%82%D0%B5%D0%B9%D0%BD,_%D0%90%D0%BB%D1%8C%D0%B1%D0%B5%D1%80%D1%82)

*Предполагаемый облик* [*Евклида*](http://chronology.org.ru/newwiki/%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D0%B8%D0%B4)*; автор портрета неизвестен, время создания неизвестно.* ***Слайд 8***

**Начала** ([греч.](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D1%80%D0%B5%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) Στοιχεῖα, [лат.](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BD%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D1%8F%D0%B7%D1%8B%D0%BA) *Elementa*) — главный труд [Евклида](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%BA%D0%BB%D0%B8%D0%B4), написанный около [300 г. до н. э.](http://ru.wikipedia.org/wiki/300_%D0%B4%D0%BE_%D0%BD._%D1%8D.) и посвящённый систематическому построению [геометрии](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F). *Начала* — вершина античной геометрии и [античной математики](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0_%D0%B2_%D0%94%D1%80%D0%B5%D0%B2%D0%BD%D0%B5%D0%B9_%D0%93%D1%80%D0%B5%D1%86%D0%B8%D0%B8) вообще, итог её 300-летнего развития и основа для последующих исследований. ***Слайд 8***

Текст *Начал* на протяжении веков были предметом дискуссий, к ним написаны многочисленные комментарии. Из античных комментариев до нас дошёл комментарий, написанный [*Проклом*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%BA%D0%BB_%D0%94%D0%B8%D0%B0%D0%B4%D0%BE%D1%85)*.* Этот текст является важнейшим источником по истории и методологии греческой математики. Прокл дает краткое изложение истории греческой математики (т. н. Евдемов каталог геометров), обсуждает взаимосвязь метода Евклида и логики Аристотеля, роль воображения в доказательствах.

О жизни Евклида (около 365 г. до нашей эры — 300 г. до нашей эры) почти ничего не известно. До нас дошли только отдельные легенды о нем. Первый комментатор «Начал» Прокл (V век нашей эры) не мог указать, где и когда родился и умер Евклид. По Проклу, «этот ученый муж» жил в эпоху царствования Птолемея I. Некоторые биографические данные сохранились на страницах арабской рукописи XII века: «Евклид, сын Наукрата, известный под именем «Геометра», ученый старого времени, по своему происхождению грек, по местожительству сириец, родом из Тира».

Одна из легенд рассказывает, что царь Птолемей решил изучить геометрию. Но оказалось, что сделать это не так-то просто. Тогда он призвал Евклида и попросил указать ему легкий путь к математике. «К геометрии нет царской дороги», — ответил ему ученый. Так в виде легенды дошло до нас это ставшее крылатым выражение.

Царь Птолемей I, чтобы возвеличить свое государство, привлекал в страну ученых и поэтов, создав для них храм муз — Мусейон. Здесь были залы для занятий, ботанический и зоологический сады, астрономический кабинет, астрономическая башня, комнаты для уединенной работы и главное — великолепная библиотека. В числе приглашенных ученых оказался и Евклид, который основал в Александрии — столице Египта — математическую школу и написал для ее учеников свой фундаментальный труд.

Именно в Александрии Евклид основывает математическую школу и пишет большой труд по геометрии, объединенных под общим названием «Начала» — главный труд своей жизни. Полагают, что он был написан около 325 года до нашей эры.

 Предшественники Евклида — Фалес, Пифагор, Аристотель и другие много сделали для развития геометрии. Но все это были отдельные фрагменты, а не единая логическая схема.

Как современников, так и последователей Евклида привлекала систематичность и логичность изложенных сведений. «Начала» состоят из 13 книг, построенных по единой логической схеме.

  Каждая из книг начинается определением понятий (точка, линия, плоскость, фигура и т. д.), которые в ней используются, а затем на основе небольшого числа основных положений (5 аксиом и 5 постулатов), принимаемых без доказательства, строится вся система геометрии.

В то время развитие науки и не предполагало наличия методов практической математики. Книги I—IV охватывали геометрию, их содержание восходило к трудам пифагорейской школы. В книге V разрабатывалось учение о пропорциях, которое примыкало к Евдоксу Книдскому. В книгах VII—IX содержалось учение о числах, представляющее разработки пифагорейских первоисточников. В книгах X—XII содержатся определения площадей в плоскости и пространстве (стереометрия), теория иррациональности (особенно в X книге); в XIII книге помещены исследования правильных тел, восходящие к Теэтету.

 «Начала» Евклида представляют собой изложение той геометрии, которая известна и поныне под названием Евклидовой геометрии. В качестве постулатов Евклид выбрал такие предложения, в которых утверждалось то, что можно проверить простейшими построениями с помощью циркуля и линейки. Евклид принял также некоторые общие предложения-аксиомы, например, что две величины, порознь равные третьей, равны между собой. На основе таких постулатов и аксиом Евклид строго и систематично развил всю планиметрию.

В «Началах» он описывает метрические свойства пространства, которое современная наука называет Евклидовым пространством.

Евклидово пространство является ареной физических явлений классической физики, основы которой были заложены Галилеем и Ньютоном. Это пространство пустое, безграничное, изотропное, имеющее три измерения. Евклид придал математическую определенность атомистической идее пустого пространства, в котором движутся атомы. Простейшим геометрическим объектом у Евклида является точка, которую он определяет как то, что не имеет частей. Другими словами, точка — это неделимый атом пространства.

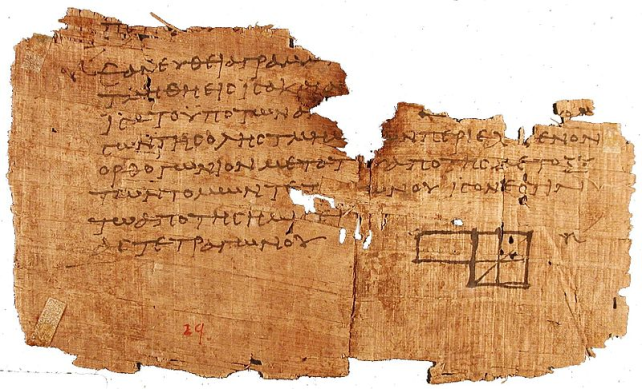
Бесконечность пространства характеризуется тремя постулатами:

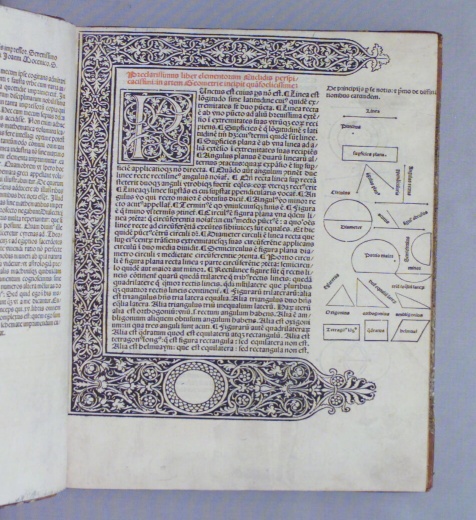
 «От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию». «Ограниченную прямую можно непрерывно продолжить по прямой». «Из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг».

Учение о параллельных и знаменитый пятый постулат («Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых») определяют свойства Евклидова пространства и его геометрию, отличную от неевклидовых геометрий.

 Обычно о «Началах» говорят, что после Библии это самый популярный написанный памятник древности. Книга имеет свою, весьма примечательную историю. В течение двух тысяч лет она являлась настольной книгой школьников, использовалась как начальный курс геометрии.

*греческое издание начал* Папирус из [*Оксиринха*](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%BA%D1%81%D0%B8%D1%80%D0%B8%D0%BD%D1%85) ***Слайд 9***

«Начала» пользовались исключительной популярностью, и с них было снято множество копий трудолюбивыми писцами в разных городах и странах. Позднее «Начала» с папируса перешли на пергамент, а затем на бумагу. На протяжении четырех столетий «Начала» публиковались 2500 раз: в среднем выходило ежегодно 6-7 изданий. До двадцатого века книга считалась основным учебником по геометрии не только для школ, но и для университетов.



*Первые печатные издания* ***Слайд 10***

 «Начала» Евклида были основательно изучены арабами, а позднее европейскими учеными. Они были переведены на основные мировые языки. Первые подлинники были напечатаны в 1533 году в Базеле. Любопытно, что первый перевод на английский язык, относящийся к 1570 году, был сделан Генри Биллингвеем, лондонским купцом.

*В 1739 г. вышло в Петербурге первое русское издание «Начал» Евклида, переведенное с латинского языка Иваном Сатаровым и под редакцией А.Фархварсона. В 1748 г. появилось «Краткое руководство к теоретической геометрии» Г. В. Крафта.*

***Слайд 11***

Конечно, все особенности Евклидова пространства были открыты не сразу, а в результате многовековой работы научной мысли, но отправным пунктом этой работы послужили «Начала» Евклида. Знание основ Евклидовой геометрии является ныне необходимым элементом общего образования во всем мире.

 Можно смело утверждать, что Евклид заложил основы не только геометрии, но и всей античной математики.

Лишь в девятнадцатом веке исследования основ геометрии поднялись на новую, более высокую ступень. Удалось выяснить, что Евклид перечислил далеко не все аксиомы, которые на самом деле нужны для построения геометрии. В действительности при доказательствах ученый ими пользовался, но не сформулировал.

 Тем не менее все выше сказанное нисколько не умаляет роли Евклида, первого показавшего, как можно и как нужно строить математическую теорию. Он создал дедуктивный метод, прочно вошедший в математику. А значит, все последующие математики в известной степени являются учениками Евклида.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Занятие 2**

**Тема:** Углы.

**Цель:** повторить виды углов, свойства смежных и вертикальных углов, свойства углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей; повторить понятия: градуса и градусной меры угла; радианной меры угла; научиться решать задачи на данную тему, имеющие практическое применение.

**Содержание:** Определение угла. Градусная мера угла. Радианная мера угла. Виды углов: острый, тупой, прямой. Смежные и вертикальные углы. Углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых третьей: накрест лежащие углы, односторонние углы, соответственные углы.

**Форма контроля:** тест *(см. Приложение)*

***Решение задач:***

*Задача № 1*

Колесо имеет 18 спиц. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.

*(Ответ:200)*

*Задача № 2*

Сколько спиц в колесе, если углы между соседними спицами равны 180?

*(Ответ:20 спиц)*

*Задача № 3*

Какой угол образуют минутная и часовая стрелки часов в 5ч? Ответ выразите и в градусах, и в радианах.

*(Ответ:1500, )*

*Задача № 4*

Какой угол описывает минутная стрелка за 10 минут? Ответ выразите и в градусах, и в радианах.

*(Ответ:600, )*

*Задача № 5*

Какой угол описывает часовая стрелка за 20 минут? Ответ выразите и в градусах, и в радианах.

*(Ответ:100, )*

*Задача № 6*

За сколько часов Земля повернется вокруг своей оси на 900?

*(Ответ: за 6 часов)*

*Задача № 7*

Найдите угол между линиями насечек у напильника, изображенного на рисунке.

200

800

*(Ответ:800)*

*Задача № 8*

Для измерения углов артиллеристы употребляют особую единицу, которую называют тысячной. В трехстах шестидесяти градусах содержится 6 000 тысячных. Сколько тысячных содержится в 10 301?

*(Ответ:25)*

*Задача № 9*

Окружность морских компасов делится на 32 равные части, называемые румбами. Сколько градусов составляют 4 румба?

*(Ответ:450)*

*Задача № 10*

Зубчатое колесо имеет 12 зубцов. Сколько зубцов имеет сцепленное с ним второе зубчатое колесо, если при одном обороте первого колеса второе поворачивается на угол 1200?

*(Ответ: 36 зубцов)*

*Практическое задание:*  пересчитайте число спиц в своем велосипеде. Определите угол между двумя соседними спицами?

**Занятие 3**

**Тема:** Окружность.

**Цель:** повторить определения и понятия: окружность, круг, радиус, диаметр, хорда, вписанные и центральные углы; повторить формулы длины и площади окружности и решение задач на их применение; научиться решать задачи на данную тему, имеющие практическое применение.

**Содержание:** Окружность. Круг. Радиус и диаметр окружности. Хорда. Длина окружности и длина дуги. Вписанные и центральные углы. Касательная к окружности.

**Форма контроля:** самостоятельная работа *(см. Приложение)*

***Решение задач:***

*Задача № 1*

Длина окружности равна 60 см. найдите длину дуги этой окружности, содержащую 180.

*(Ответ: 3 см.)*

*Задача № 2*

Шар диаметром 1 м откатился по прямой на 10 м. Сколько полных оборотов он сделал?

*(Ответ: 3 оборота)*

*Задача № 3*

Поезд едет со скоростью 81 км/ч. Диаметр его колеса равен 120 см. Сколько оборотов в минуту делает колесо поезда? (Примите )

*(Ответ:375 оборотов в минуту)*

*Задача № 4*

Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского Кремля приблизительно равна 3,5 м. Найдите длину окружности (в метрах), которую описывает конец минутной стрелки в течение одного часа. (Примите )

*(Ответ: 35 см.)*

*Задача № 5*

Длина экватора земного шара примерно равна 40 000 км. На сколько метров увеличилась бы длина экватора, если бы радиус земного шара увеличился на 1 м? (Примите )

*(Ответ: на 6 м.)*

*Задача № 6*

Столяру нужно сделать круглый стол на 6 человек. Каким должен быть диаметр стола (в сантиметрах), чтобы на каждого из сидящих за столом шести человек приходилось 80 см по окружности стола? (Примите )

*(Ответ: 160 см.)*

*Задача № 7*

Какой длины должен быть приводной ремень, соединяющий два шкива с диаметрами 20см, если расстояние между их центрами равно 50см? (Примите )

*50 см*

*(Ответ: 160 см.)*

*Задача № 8*

Водопроводная труба имеет в обхвате 246 см и толщину стенок 2 см Найдите внутренний диаметр сечения трубы. (Примите )

*(Ответ: 78 см.)*

*Задача № 9*

Москва и Новосибирск расположены примерно на одном меридиане под 560  и 440 северной широты соответственно. Найдите расстояние между ними по земной поверхности, считая длину большей окружности земного шара равной 40 000 км. В ответе укажите целое числа километров.

*(Ответ: 1333 км.)*

*Задача № 10*

Бальный зал имеет диаметр 12м. В зале стоит 12 колон диаметром 60 см. Определите площадь зала свободную для танцев. (Примите ) Ответ выразите в метрах и округлите до десятых.

*(Ответ: 104,8 м.)*

*Практическое задание:*  определите площадь, которую занимают цветочные горшки, стоящие в классе (или дома).

**Занятие 4**

**Тема:** Расстояния. Теорема Пифагора

**Цель:** повторить свойства прямоугольного треугольника, теорему Пифагора; научиться решать задачи на данную тему, имеющие практическое применение.

**Содержание:**  Прямоугольный треугольник и его свойства, теорема Пифагора.

**Форма контроля:** тест *(см. Приложение)*

***Решение задач:***

*Задача № 1*

На одной прямой на равном расстоянии друг от друга стоят три телеграфных столба. Крайние находятся от дороги на расстояниях 18 м и 48 м. Найдите расстояние, на котором стоит от дороги средний столб.

*(Ответ:33 м)*

*Задача № 2*

Мальчик прошел от дома по направлению на восток 800 м. затем повернул на север и прошел 600 м. На каком расстоянии от дома оказался мальчик?

*(Ответ:1 км)*

*Задача № 3*

Два парохода вышли из порта, следуя один на север, другой на запад. Скорости их равны соответственно 15 км/ч и 20 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 2 часа?

*(Ответ:50 км)*

*Задача № 4*

Какой длины должна быть лестница, чтобы она достала до окна дома на высоте 8 футов, если ее нижний конец отстоит от дома на 6 футов?

*(Ответ:10 футов)*

*Задача № 5*

В 60 м одна от другой растут две сосны. Высота одной 31 м, а другой – 6 м. Найдите расстояние между их верхушками.

*(Ответ: 65 м)*

*Задача № 6*

Отношение высоты к ширине экрана телевизора равно 0,75. Диагональ равна 60 см. Найдите ширину экрана.

*(Ответ: за 6 часов)*

*Задача № 7*

На вершинах двух елок сидят две вороны. Высота елок равна 4 м и 6м. расстояние между ними равно 10 м. на каком расстоянии ВЕ нужно расположить сыр для этих ворон, чтобы они находились в равных условиях, то есть чтобы расстояния от них до сыра были одинаковыми?

А С

*(Ответ:6 м)*

*Е*

*В D*

*Задача № 8*

Из круглого бревна нужно вырезать брус с поперечным сечением 5 х 12 (см). Какой наименьший диаметр должно иметь бревно?

*(Ответ:13 см)*

*Задача № 9*

Какого наименьшего диаметра должен быть цилиндрический сосуд, чтобы в него можно было поместить деталь в форме прямоугольного параллелепипеда с размерами 6 х 8 х 10 (см)?

*(Ответ:10 см)*

*Задача № 10*

В одном углу комнаты с размерами *4* х *5* х *3* (м) сидит муха. В противоположном углу сидит паук. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности комнаты, по которому паук может доползти до мухи. В ответе укажите приближенное значение в метрах с точностью до одного знака после запятой.

*(Ответ: 8,6 м)*

*Практическое задание:*  определите диагональ монитора вашего компьютера или экрана телевизора.

**Занятие 5**

**Тема:** Подобие.

**Цель:** повторить понятия: пропорциональных отрезков, подобных треугольников, коэффициента подобия; повторить теорему отношений площадей подобных треугольников, три признака подобия треугольников, пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике научиться решать задачи на данную тему, имеющие практическое применение: определение высоты предмета, определение расстояния до недоступной точки.

**Содержание:** Пропорциональные отрезки. Подобные треугольники. Три признака подобия треугольников. Теорема отношений площадей подобных треугольников. Подобие произвольных фигур. Коэффициент подобия. Измерительные работы на местности.

**Форма контроля:** самостоятельная работа *(см. Приложение)*

***Решение задач:***

*Задача № 1*

Используя данные, приведенные на рисунке, найдите расстояние АВ от лодки А до берега *b*.

**A**

**?**

**D**1м **C** 10 м **B** ***b***

D

*10 м*

*(Ответ:100 м)*

*Задача № 2*

Используя данные, приведенные на рисунке, найдите высоту мачты АВ

А

1 м

С 2 м 8 м В

*(Ответ: 5 м)*

*Задача № 3*

Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь. Тень человека равна четырем шагам. На какой высоте расположен фонарь?

*(Ответ:5,1 м)*

*Задача № 4*

Чтобы измерить высоту дерева, ученик держит линейку в вертикальном положении на расстоянии вытянутой руки. Расстояние от глаз ученика до линейки равно 60 см. Часть линейки, закрывающая дерево, составляет 20 см. расстояние от ученика до дерева равно 18 м. Чему равна высота дерева?

*(Ответ:6 м)*

*Задача № 5*

Строительный кирпич весит 4 кг. Сколько граммов весит игрушечный кирпич из того же материала, все размеры которого в четыре раза меньше?

*(Ответ:62,5 г)*

*Задача № 6*

Эйфелева башня в Париже высотой 300 м весит 8 000 000 кг. Некто захотел изготовить точную копию этой башни весом один килограмм. Какова будет высота этой модели. Ответ дайте в сантиметрах.

*(Ответ: 150 см)*

*Задача № 7*

Какой должна быть ширина *(х)* прямоугольной рамки для фотографии, указанной на рисунке, чтобы прямоугольники рамки и фотографии были подобны?

*х см*

*х см*

8 см

18 см

16 см

*(Ответ:4,5 см)*

*Задача № 8*

Диаметр Луны приближенно равен 3 400 км. Диаметр Солнца приближенно равен 1 400 000 км, и оно кажется с Земли такой же величины, как Луна. Во сколько раз расстояние от Земли до Солнца больше, чем расстояние от Земли до Луны? В ответе укажите целое число сотен раз.

*(Ответ: в 400 раз)*

*Задача № 9*

Для нахождения высоты египетской пирамиды недалеко от нее был установлен шест высотой 1,5 м. Его тень составила 1м. в тот же момент тень пирамиды была равна 96 м. чему равна высота пирамиды?

*(Ответ:144 м)*

*Задача № 10*

Используя данные, приведенные на рисунке, найдите ширину АВ озера

**А В**

9 м

**D** 3 м **E**

1 м

**С** (*Ответ: 30 м)*

**Занятие 6**

**Тема:** Измерительные работы на местности.

**Цель:** научиться на практике определять высоту предмета и расстояние до недоступной точки.

**Оборудование:** измерительная рулетка, шест, линейка, бумага и карандаш для записей.

**Форма проведения:** урок-практикум на пришкольном участке

*Практическое задание: измерить высоту дерева возле дома или около школы.*

**Занятие 7**

**Тема:** Тригонометрические функции.

**Цель:** повторить основные тригонометрические функции: синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника; научиться решать задачи на данную тему, имеющие практическое применение.

**Содержание:** Прямоугольный треугольник. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника.

**Форма контроля:** самостоятельная работа *(см. Приложение)*

***Решение задач:***

*Задача № 1*

Мальчик от дома по направлению на восток 800 м. Затем повернул на север и прошел 600 м. Под каким углом к направлению на запад он должен идти, чтобы вернуться домой? В ответе укажите целое число градусов. (Используйте таблицу тригонометрических функций.)

*(Ответ: 370)*

*Задача № 2*

Маятник в виде груза, подвешенного на нитке, отклонили от положения равновесия на угол 600. Длина АС маятника 20 см. На сколько изменилась высота груза по сравнению с положением равновесия?

*(Ответ: на 10 см)*

*Задача № 3*

Горная железная дорога поднимается на 1 м на каждые 30 м пути. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите угол подъема в градусах. В ответе укажите приближенное значение, выражаемое целым числом градусов.

*(Ответ:20)*

*Задача № 4*

Пожарная лестница выдвинута на 50 м при предельном угле подъема 720. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту, которой достиг верхний конец лестницы, если ее нижний конец отстоит от поверхности земли на 1 м.

*(Ответ: 48,5 м.)*

*Задача № 5*

Лестница имеет ступеньки, ширина которых равна 30см, а высота – 18 см. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите угол подъема лестницы. В ответе укажите приближенное значение, выражаемое целым числом градусов.

*(Ответ: 310)*

*Задача № 6*

С самолета радируют капитану рыболовецкого судна, что самолет находится над косяком рыбы на высоте 1000 м. С судна определяют, что угол, под которым виден самолет над горизонтом равен 260. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите расстояние от судна до косяка рыбы. В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу метров.

*(Ответ: 2040 м.)*

*Задача № 7*

Используя данные, указанные на рисунке, найдите расстояние от корабля К до берега АВ. В ответе укажите целое число метров.

А

700

540 м **?**

800 К

В

*(Ответ: 1007 м.)*

*Задача № 8*

Ширина футбольных ворот равна 8 ярдам. Расстояние 11-метровой отметки до линии ворот равно 12 ярдам. Найдите угол, под которым видны ворота с 11-метровой отметки. В ответе укажите целое число градусов.

*(Ответ: 370.)*

*Задача № 9*

Пирамида Хеопса имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 230 м, а высота около 138 м. Найдите угол наклона ее боковой грани к плоскости основания. В ответе укажите целое число градусов.

*(Ответ:500)*

*Задача № 10*

Подводная лодка, находясь впереди корабля, погрузилась в воду и пошла в направлении, перпендикулярном направлению на корабль, со скоростью 30 км/ч. Под каким углом к направлению к ходу подводной лодки должен идти корабль со скоростью 60 км/ч, чтобы в некоторой точке пройти над подводной лодкой? Ответ укажите в градусах.

*(Ответ: 300)*

**Занятие 8 - 9**

**Тема:** Площадь.

**Цель:** повторить формулы и способы нахождения площади треугольника, квадрата, прямоугольника, трапеции, правильного многоугольника, круга; научиться определять площадь фигур, имеющих сложную конфигурацию; научиться решать задачи на данную тему, имеющие практическое применение.

**Содержание:** Площади плоских фигур: треугольника, квадрата, прямоугольника, трапеции, правильного многоугольника, круга. Единицы площади.

**Форма контроля:** самостоятельная работа *(см. Приложение)*

***Решение задач:***

*Задача № 1*

Площадь земельного участка, имеющего форму прямоугольника, равна 9 га, ширина участка равна 150 м. Найдите длину этого участка.

*(Ответ: 600 м)*

*Задача № 2*

Футбольное поле имеет форму прямоугольника, длина которого в 1,5 раза больше ширины. Площадь футбольного поля равна 7350 м2. Найдите его ширину.

*(Ответ: 10 м)*

*Задача № 3*

Пол комнаты, имеющий форму прямоугольника со сторонами 5 м и 6 м, требуется покрыть паркетом из прямоугольных дощечек со сторонами 5 см и 30 см. Сколько потребуется таких дощечек?

*(Ответ: 2000 шт.)*

*Задача № 4*

Найдите площадь стены заводского здания, изображенного на рисунке.

*(Ответ: 108 м2.)*

5 м 7 м

18 м

*Задача № 5*

Две трубы, диаметры которых равны 10 см 24 см, требуется заменить одной, не изменяя их пропускной способности. Каким должен быть диаметр новой трубы?

*(Ответ: 26 см)*

*Задача № 6*

Участок между двумя параллельными улицами имеет вид четырехугольника ABCD (AD ), АВ = 28 м, ВС = 20 м, АD = 40 м, ∠ В = 1120. Найдите площадь этого участка. В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу квадратных метров.

*(Ответ: 781 м2.)*

*В 20 м С*

*1120*

*28 м*

*А 40 м D*

*Задача № 7*

Пол требуется покрыть паркетом из белых и черных плиток, имеющих форму правильных шестиугольников. Фрагмент паркета показан на рисунке. Во сколько раз белых плиток паркета больше, чем черных?

*(Ответ: в 2 раза.)*

*Задача № 8*

Бумажная лента плотно намотана на катушку, внутренний диаметр которой равен 20 см. толщина бумаги равна 0,5 мм, и толщина намотанного рулона – 30 см. Найдите длину бумажной ленты. Ответ дайте в метрах. (Примите )

*(Ответ: 900 м)*

*Задача № 9*

Найдите площадь поверхности детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы –прямые).

*1 см*

*1 см*

1 см *3 см*

*3 см*

*(Ответ:38 см2)*

*Задача № 10*

Основание садового домика – прямоугольник 6 8 (м). крыша наклонена под углом 450 к основанию. Найдите площадь крыши. В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу квадратных метров.

*(Ответ: 68 м2)*

*8 м*

*6 м*

*Практическое задание: измерить площадь огорода или клумбы возле дома учащегося.*

**Занятие 10 - 11**

**Тема:** Объем.

**Цель:** научиться вычислять объем многогранников, тел вращения и тел имеющих сложную конфигурацию; научиться решать задачи на данную тему, имеющие практическое применение.

**Содержание:** Многогранники. Виды многогранников: прямоугольный параллелепипед, куб, пирамида, тетраэдр, призма. Объем многогранника. Тела вращения. Шар. Объем тел вращения. Единицы объема.

**Форма контроля:** самостоятельная работа *(см. Приложение)*

***Решение задач:***

*Задача № 1*

Сколько коробок в форме прямоугольного параллелепипеда размерами 30 х 40 х 50 (см) моно поместить в кузов машины с размерами 2 х 3 х 1,5 (м)?

*(Ответ: 150 коробок)*

*Задача № 2*

Какова должна быть площадь кабинета высотой 3,5 м для класса в 28 человек, если для каждого ученика нужно 7,5 м3 воздуха?

*(Ответ: 60 м2)*

*Задача № 3*

Пирамида Хеопса имеет форму правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 230 м, а высота около 138 м. Найдите ее объем в кубических метрах.

*(Ответ: 2 433 400 м3)*

*Задача № 4*

В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 дм3 воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объем детали в кубических дециметрах?

*(Ответ: 3 дм3)*

*Задача № 5*

Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.

*(Ответ: 9 : 8)*

*Задача № 6*

Воду, заполняющую всю коническую колбу высотой 12 см, перелили в цилиндрический сосуд, радиус основания которого равен радиусу окружности конической колбы. На какой высоте от основания цилиндрического сосуда будет находиться поверхность воды?

*12 см*

*(Ответ: 4 см)*

*Задача № 7*

Медный прямоугольный параллелепипед, ребра которого равны 20 см, 20 см и 10 см, переплавлен в шар. Найдите радиус шара. ( Примите .)

*(Ответ: 10 см.)*

*Задача № 8*

Мякоть вишни окружает косточку ровным слоем, толщина которого равна диаметру косточки. Считая шарообразной форму вишни и косточки, найдите отношение объема мякоти к объему косточки.

*(Ответ: 26 : 1)*

*Задача № 9*

Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы – прямые).

*1 см*

*1 см*

1 см *3 см*

*3 см*

*(Ответ:12 см3)*

*Задача № 10*

Квадратный лист бумаги со стороной 6 см перегнули по пунктирным линиям, показанным на рисунке, и сложили треугольную пирамиду. Найдите ее объем.

*(Ответ: 9 см3)*

*3 см*

*3 см*

*3 см 3 см*

**Занятие 12 (заключительное)**

**Цель:** подвести итоги изучения материала.

**Форма проведения:** защита творческих работ

**Рекомендуемые темы:**

1. Геометрия древнего мира
2. Биография и учение Евклида
3. Биография и учение Пифагора
4. Русские издания начал
5. Измерение на местности: измерить ширину местной реки, не пересекая ее
6. Самая интересная (или моя) геометрическая задача с практическим применением
7. Многогранники и и тела вращения в быту и технике
8. Изготовление макетов многогранников и тел вращения
9. Геометрия и оригами.

**ПРИЛОЖЕНИЯ**

**Приложение к занятию № 1**

Презентация «История геометрии как науки»

**Приложение к занятию № 2**

**Тест**

***Вариант - 1***

1. Угол между биссектрисами вертикальных углов равен …

**1.**  900 **2.**  1800 **3.** Есть другие возможности

1. Один из углов при пересечении двух прямых - прямой. Остальные углы …
2. острые и прямой **2.**  тупые и прямой **3.** прямые **4.** нет правильного ответа
3. Сумма двух углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 1800. Эти углы …
4. смежные **2.** вертикальные **3.**  нет правильного ответа
5. Один из углов при пересечении двух параллельных прямых третьей равен 520. Остальные углы равны…
6. 520 и 1320 **2.** 520 и 1280 **3.** 520 **4.** нет правильного ответа

1. Минутная стрелка за 15 минут описывает угол…
2. 150 **2.** 450 **3.** 900
3. Для измерения углов артиллеристы употребляют особую единицу, которую называют тысячной. В трехстах шестидесяти градусах содержится 6 000 тысячных. Сколько градусов составляют 100 тысячных?

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

***Вариант - 2***

1. Угол между биссектрисами смежных углов равен …

**1.**  1800 **2.**  900 **3.** Есть другие возможности

1. Один из углов при пересечении двух прямых - острый. Остальные углы …

**1.** острый и прямые **2.** острый и тупые **3.** все острые **4.** нет правильного ответа

1. Сумма двух углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 900. Эти углы …

**1.** смежные **2.** вертикальные **3.**  нет правильного ответа

1. Один из углов при пересечении двух параллельных прямых третьей равен 980. Остальные углы равны…

**1.** 980 и 920 **2.** 980 и 820 **3.** 980 **4.** нет правильного ответа

1. Минутная стрелка за 45 минут описывает угол…

**1.**2700 **2.** 450 **3.** 1200

1. Угол в 1,50 рассматривают в лупу, увеличивающую в четыре раза. Какой величины окажется угол?

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

**Ответы на тест**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **1** | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 60 |
| **2** | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1,50 |

**Приложение к занятию № 3**

**Самостоятельная работа**

***Вариант - 1***

1. Вписанный в окружность угол равен 1200. Центральный угол опирающийся на туже дугу равен …

**1.**  600 **2.**  1200 **3.** 2400 **4.**  нет правильного ответа

1. По данным рисунке найдите *х.*

1520 600

*х*

1. 370 **2.**  1580 **3. 7**40
2. Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского Кремля приблизительно равна 3,5 м. Какой путь (в сантиметрах) проходит ее конец за 1 минуту? (Примите )

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

1. Определите площадь закрашенной фигуры.

***Вариант - 2***

1. Вписанный в окружность угол равен 1600. Вписанный угол опирающийся на туже дугу равен …

**1.**  1600 **2.**  3200 **3.** 800 **4.**  нет правильного ответа

1. По данным рисунке найдите *х.*

1320

1800

* 1. 240 **2.**  480 **3.** 120

1. Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского Кремля приблизительно равна 3,5 м. За сколько минут ее конец пройдет путь длиной 105 см? (Примите )

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

1. Определите площадь закрашенной фигуры.

**Ответы**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **1** | 2 | 3 | 35 см | 3*r2* |
| **2** | 3 | 1 | за 3 мин | 2*r2* |

**Приложение к занятию № 4**

**Тест**

***Вариант - 1***

1. Если в треугольнике квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то эта сторона лежит напротив…

**1.**  острого угла **2.**  прямого угла **3.** тупого угла **4.** нет правильного ответа

1. Квадрат катета равен разности квадратов гипотенузы и другого катета в треугольнике с углами…
2. 450 и 500 **2.**  300 и 450 **3.** 280 и 620 **4.** нет правильного ответа
3. Какой из треугольников с указанными сторонами – прямоугольный?
4. 2; 5; 4 **2.** 10; 10; 10 **3.**  12; 9; 15 **4.** нет правильного ответа
5. На какое расстояние следует отодвинуть от стены дома нижний конец лестницы, длина которой 13 футов, чтобы верхний ее конец оказался на высоте 12 футов?
6. 11 футов **2.** 5 футов **3.** 12 футов **4.** нет правильного ответа

1. Угол С в треугольнике АВС равен…

В

3

С А

2

1. 600 **2.** 450 **3.** 300  **4.** нет правильного ответа
2. Девочка прошла от дома по направлению на запад 500 м. Затем повернула на север и прошла 300 м. После этого она повернула на восток и прошла еще 100 м. На каком расстоянии от дома оказалась девочка?

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

***Вариант - 2***

1. Если в треугольнике квадрат одной стороны меньше суммы квадратов двух других сторон, то эта сторона лежит напротив…

**1.**  острого угла **2.**  прямого угла **3.** тупого угла **4.** нет правильного ответа

1. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов в треугольнике с углами…
2. 600 и 600 **2.**  450 и 450 **3.** 370 и 530 **4.** нет правильного ответа
3. Какой из треугольников с указанными сторонами – прямоугольный?
4. 5; 2; 4 **2.** 8; 8; 8 **3.**  12; 5; 13 **4.** нет правильного ответа
5. Лестница длиной 12,5 м приставлена к стене так, что расстояние от ее нижнего конца до стены равно 3,5 м. На какой высоте от земли находится верхний конец лестницы?
6. 4 м **2.** 8 м **3.** 12 м **4.** нет правильного ответа

1. Угол С в треугольнике АВС равен…

В

С А

4

1. 600 **2.** 450 **3.** 300  **4.** нет правильного ответа
2. Мальчик и девочка, расставшись на перекрестке, пошли по взаимно перпендикулярным дорогам, мальчик со скоростью 4 км/ч, девочка – 3 км/ч. Какое расстояние (в км) бедет между ними через 30 минут?

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

**Ответы на тест**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **1** | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 500 м |
| **2** | 1 | 2, 3 | 3 | 3 | 4 | 2,5 км |

**Приложение к занятию № 5**

**Самостоятельная работа**

***Вариант - 1***

1. Если треугольники подобны, то …

**1.**  их стороны равны **2.**  углы их равны **3.** они равны **4.** нет правильного ответа

1. Углы треугольника равны 200, 400 А. угол, соответствующий углу А подобного треугольника равен …
2. 400 **2.**  600 **3.** 1200 **4.** нет правильного ответа
3. Короткое плечо шлагбаума имеет длину 1 м, а длинное – 4 м. На какую высоту поднимается конец длинного плеча, когда конец короткого плеча опускается на 0,5 м?

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

1. Диаметр Луны приближенно равен 3 400 км, и она находится на расстоянии 374 000 км от Земли. На какое расстояние (в сантиметрах) от наблюдателя нужно удалить монету диаметра 1 см, чтобы она казалась ему такой же величины, как Луна? В ответе укажите целое число сантиметров.

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

***Вариант - 2***

1. Если треугольники подобны, то …

**1.**  стороны пропорциональны **2.**  углы пропорциональны **3. у**глы равны **4.** нет правильного ответа

1. Стороны одного треугольника равны 15 см, 35 см, 30 см. Две стороны подобного ему треугольника 7 см и 5 см. длина третьей стороны равна …

**1.** см **2.** 3 см **3.**  12 см **4.** нет правильного ответа

1. Короткое плечо шлагбаума имеет длину 1 м, а длинное – 3 м. На какую высоту опускается конец короткого плеча, когда конец длинного плеча поднимается на 1,5 м? Ответ дайте в метрах.

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

1. Диаметр Луны приближенно равен 3 400 км, и она находится на расстоянии 374 000 км от Земли. На какое расстояние (в метрах) от наблюдателя нужно удалить тарелку диаметра 25 см, чтобы она казалась ему такой же величины, как Луна?

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

**Ответы**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **1** | 2 | 3 | на 2 м | 110 см |
| **2** | 1, 3 | 2 | на 0,5 м | 30 м |

**Приложение к занятию № 7**

**Тест**

***Вариант - 1***

1. Для данного треугольника справедливо равенство…

*a c*

*b*

**1.**  *a = b cos* **2.**  *a = c cos* **3.** *a = c sin* **4.** нет правильного ответа

1. В прямоугольном треугольнике АВС (∠С = 900) известна длина стороны АВ. Чтобы вычислить длину СВ, нужно знать…
2. длину АС **2.**  величину угла В

**3.** величину угла А **4.** нет правильного ответа

1. Человек, пройдя вверх по склону холма 1000 м, поднялся на высоту 90 м над плоскостью основания холма. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите (в среднем) угол наклона холма в градусах. В ответе укажите приближенное значение, выраженное целым числом градусов.
2. 50 **2.** 250 **3.**  350 **4.** нет правильного ответа
3. Вершина радиомачты видна с расстояния 300 м от ее основания под углом 100. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту радиомачты.
4. 108 м **2.** 54 м **3.** 27 м **4.** нет правильного ответа
5. Расстояние от наблюдателя до главного здания МГУ имени М. В. Ломоносова равно 150 м , а угол, под которым видно здание равен 580. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту главного здания МГУ. В ответе укажите приближенное значение, равное целому числу метров.

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

***Вариант – 2***

1. Для данного треугольника справедливо равенство…

*c a*

*b*

**1.**  *b = c sin* **2.**  *b = a sin* **3.** *b = a cos* **4.** нет правильного ответа

1. В прямоугольном треугольнике АВС (∠С = 900) известна длина стороны ВC. Чтобы вычислить длину AВ, нужно знать…

**1.** длину стороны АС **2.**  величину угла В

**3.** величину угла С **4.** нет правильного ответа

1. Угол подъема дороги равен 150. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту, на которую поднимется пешеход, пройдя 200 м.

**1.** на 104 м **2.** на52 м **3.**  на 26 м **4.** нет правильного ответа

1. Высота Останкинской телевизионной башни – 540 м. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите угол в градусах, под которым видна башня с расстояния 2000м.

**1.** 150 **2.** 300 **3.** 450 **4.** нет правильного ответа

1. Для определения высоты колонны поступили следующим образом: отошли от ее основания на 100м, поставили угломерный прибор высотой 1,6 м и установили, что вершина колонны видна под углом 220. Используя таблицу значений тригонометрических функций, найдите высоту колонны.

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

**Ответы на тест**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** | 3 | 2 | 1 | 2 | 240 м |
| **2** | 3 | 2 | 2 | 1 | 41,6 м |

**Приложение к занятию № 8 - 9**

**Самостоятельная работа**

***Вариант - 1***

1. Зрачок человеческого глаза, имеющий форму круга, может изменять свой диаметр , в зависимости от освещения, от 1,5 мм до 7,5 мм. Во сколько раз при этом увеличится площадь поверхности зрачка?

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

1. Найдите площадь поверхности детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы – прямые).

*3 см*

*4 см 1 см*

*4 см*

*2 см*

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

***Вариант - 2***

1. Диаметр Солнца в 400 раз больше диаметра Луны. Во сколько раз площадь поверхности Солнца больше площади поверхности Луны?

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

1. Найдите площадь поверхности детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы – прямые).

*1 см*

*4 см 2 см*

*2см*

*4 см*

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

**Ответы**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **вариант** | **1** | **2** |
| **1** | в 25 раз | 92 см2 |
| **2** | в 160 000 раз | 48 см2 |

**Приложение к занятию № 10 - 11**

**Самостоятельная работа**

***Вариант - 1***

1. Сколько нужно взять медных шаров радиуса 2 см, чтобы из них выплавить шар радиуса 6 см?

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

1. Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы – прямые).

*3 см*

*4 см 1 см*

*4 см*

*2 см*

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

***Вариант - 2***

1. Найдите радиус шара, который можно выплавить из трех медных шаров радиусов 3 см, 4 см и 5 см?

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

1. Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все двугранные углы – прямые).

*1 см*

*4 см 2 см*

*2см*

*Ответ: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_*

*4 см*

**Ответы**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **вариант** | **1** | **2** |
| **1** | 27 шаров | 40 см3 |
| **2** | 6 см | 12 см3 |

**ТАБЛИЦА ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ**

**ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *А* | sin *А* | tg *A* | *А* | sin A | tg A | *А* | sin *A* | tg *A* |
| 30' | 0,0087 | 0,0087 | 30° | 0,50 | 0,58 | 60° | 0,87 | 1,73 |
| 1° | 0,0175 | 0,0175 | 31° | 0,52 | 0,60 | 61° | 0,87 | 1,80 |
| 2° | 0,035 | 0,035 | 32° | 0,53 | 0,62 | 62° | 0,88 | 1,88 |
| 3° | 0,05 | 0,05 | 33° | 0,54 | 0,65 | 63° | 0,89 | 1,96 |
| 4° | 0,07 | 0,07 | 34° | 0,56 | 0,68 | 64° | 0,90 | 2,02 |
| 5° | 0,09 | 0,09 | 35° | 0,57 | 0,70 | 65° | 0,91 | 2,15 |
| 6° | 0,10 | 0,11 | 36° | 0,59 | 0,73 | 66° | 0,91 | 2,25 |
| 7° | 0,12 | 0,12 | 37° | 0,60 | 0,75 | 67° | 0,92 | 2,36 |
| 8° | 0,14 | 0,14 | 38° | 0,62 | 0,78 | 68° | 0,93 | 2,48 |
| 9° | 0,16 | 0,16 | 39° | 0,63 | 0,81 | 69° | 0,93 | 2,61 |
| 10° | 0,17 | 0,18 | 40° | 0,64 | 0,84 | 70° | 0,94 | 2,78 |
| 11° | 0,19 | 0,19 | 41° | 0,66 | 0,87 | 71° | 0,95 | 2,90 |
| 12° | 0,21 | 0,21 | 42° | 0,67 | 0,9 | 72° | 0,95 | 3,08 |
| 13° | 0,23 | 0,23 | 43° | 0,68 | 0,93 | 73° | 0,96 | 3,27 |
| 14° | 0,24 | 0,25 | 44° | 0,69 | 0,97 | 74° | 0,96 | 3,49 |
| 15° | 0,26 | 0,27 | 45° | 0,71 | 1,00 | 75° | 0,97 | 3,73 |
| 16° | 0,28 | 0,29 | 46° | 0,72 | 1,04 | 76° | 0,97 | 4,01 |
| 17° | 0,29 | 0,31 | 47° | 0, 73 | 1,07 | 77° | 0,97 | 4,33 |
| 18° | 0,31 | 0,32 | 48° | 0,74 | 1,11 | 78° | 0,98 | 4,71 |
| 19° | 0,33 | 0,34 | 49° | 0,75 | 1,15 | 79° | 0,98 | 5,15 |
| 20° | 0,34 | 0,36 | 50° | 0,77 | 1,19 | 80° | 0,98 | 5,67 |
| 21° | 0,36 | 0,38 | 51° | 0,78 | 1,23 | 81° | 0,99 | 6,31 |
| 22° | 0,37 | 0,40 | 52° | 0,79 | 1,28 | 82° | 0,99 | 7,12 |
| 23° | 0,39 | 0,42 | 53° | 0,80 | 1,33 | 83° | 0,992 | 8,14 |
| 24° | 0,41 | 0,45 | 540 | 0,81 | 1,38 | 84° | 0,994 | 9,51 |
| 25° | 0,42 | 0,47 | 55° | 0,82 | 1,43 | 85° | 0,996 | 11,43 |
| 26° | 0,44 | 0,49 | 56° | 0,83 | 1,48 | 86° | 0,998 | 14,30 |
| 27° | 0,45 | 0,51 | 57° | 0,84 | 1,54 | 87° | 0,999 | 19,08 |
| 28° | 0,47 | 0,53 | 58° | 0,85 | 1,60 | 88° | 1,00 | 28,64 |
| 29° | 0,48 | 0,55 | 59° | 0,86 | 1,66 | 89° | 1,00 | 57,29 |