ГБС(К)ОУ школа № 26 V вида Краснодарского края г. Краснодара

 ***Методические рекомендации по изложению темы***

***«Площади плоских фигур»***

***по геометрии***

 ***в 7 - 9 классах***

Выполнила: учитель математики

**Стояновская Л.И.**

2014 г.

**Аннотация.** В методической разработке даётся построение доказательств формул площадей плоских фигур посредством повторяющегося методического приёма. Разработка может быть полезна учителям математики коррекционных школ.

1. **Введение.**

Математика в школе относится к числу наиболее отвлечённых, абстрактных учебных дисциплин. Эта особенность учебного предмета является причиной дополнительных трудностей, которые испытывают учащиеся коррекционных школ, вследствие наблюдающихся у них различного рода отклонений физического и психического развития. Одним из способов преодоления трудностей понимания и усвоения учащимися учебного материала может стать хорошо продуманные методические разработки тем и уроков, упрощающие академический стиль учебника.

Показательными для этой цели являются уроки геометрии, объектами изучения которой являются плоские и объёмные фигуры, легко отождествляемые с реальными телами в быту и технике. Настоящая методическая разработка написана к учебной теме «Площади плоских фигур».

При разработке темы преследовалась цель: найти методические приёмы, которые удовлетворяли бы требованиям научности изложения но, вместе с тем, имели бы элементы большей наглядности и простаты подачи материала. Для достижения цели применялись два приёма:

* Рисункам, сопутствующим доказательствам формул площадей, придаётся целенаправленная контрастность, при которой выделяются элементы рисунка, требующие на уроке наибольшего внимания учащихся.
* Для доказательства формул площадей плоских фигур используется один и тот же методический приём на протяжении всей темы, что устраняет, на мой взгляд, излишнее многообразие приёмов для учащихся, испытывающих отставание в умственном развитии.

Изучение темы «Площади плоских фигур» целесообразно начинать с нахождения площади прямоугольника. Прямоугольники ограничивают поверхности большого количества тел, окружающих школьника. Прежде всего, жилище: пол, потолок, стены, окна, двери, поверхность стола, книги, тетради и т.п. – всё это прямоугольники разных площадей. Доказательство формулы площади прямоугольника в данной методической разработке является исходным пунктом, позволяющим далее обосновывать, без привлечения каких-либо новых логических понятий, формулы площадей других плоских фигур от треугольника до круга включительно.

1. **Единицы измерения площади.**

Площадь – одна из основных математических величин, характеризующая геометрические фигуры (реальные тела, объекты и т.п.). В простейших случаях площадь измеряется числом заполняющих плоскую фигуру единичных квадратов со стороной, равной единице длины. Квадрат со стороной 1 м является основной единицей измерения площади. Эта единица называется квадратный метр (м2).

 1 м Для измерения больших площадей (поверхности озёр, морей, тер-

|  |
| --- |
| 1 м2 |

 риторий государств и т.д.) используют более крупную единицу

1 м площади – квадратный километр (км2). Малые поверхности

 (площади) измеряются квадратными сантиметрами (см2).

**3. Нахождение площади прямоугольника.**

**Определение:** Прямоугольник – это четырёхугольник, у которого все углы прямые, а противоположные стороны равны (рис. 1).

 B a C

|  |
| --- |
|  |

b
A D

 рис. 1

Пусть дан прямоугольник ABCD, площадь которого нужно определить. Введём обозначения: длина прямоугольника BC = AD = a (м); ширина AB = CD = b (м). Разобьём сторону BC точками K, L, M, N на равные отрезки BK = KL = LM = MN = NC длиной 1 м каждый (рис2а). Точно также разобьём сторону CD точками Q, F, на равные отрезки CQ = QF = FD длиной 1 м каждый. Через точки K, L, M, N проведём прямые параллельные сторонам AB и CD прямоугольника. Соответственно через точки F, Q проведём прямые параллельные сторонам BC и AD. В результате прямоугольник ABCD окажется покрыт единичными квадратиками с площадью 1 м2 каждый. Площадь всех квадратиков равна площади прямоугольника ABCD. Как найти число всех квадратиков?

 B K L M N C B C

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | 1 м2 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|   |
|   |

Q E

F

D

 рис. 2а рис. 2б

Выделим на прямоугольнике полоску BCQE (рис. 2б). Так как её ширина 1 м, а длина «a» метров, то на ней помещается «a» единичных квадратиков. Столько же квадратиков поместится на второй, третьей и т. д. горизонтальных полосках, равных полоске BCQE. Всего полосок «b». Легко понять, что число всех единичных квадратиков, покрывающих прямоугольник ABCD, равно числу квадратиков на одной полоске, умноженному на число полосок. Итак,

 **SABCD = Sпрямоуг. = ab**

**Вывод:** ***площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину.***

1. **Площадь квадрата.**

**Определение:**  квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 3).

Пусть дан квадрат ABCD. Введём обозначение: AB = BC = CD = DA = a (м). Площадь квадрата, так же как и площадь прямоугольника, равна произведению его длины на ширину. Но у квадрата длина «а» равна ширине «а». Следовательно,

 B a C

|  |
| --- |
|  |

**SABCD  = Sквадр. = а\*а = а2**

 A D **Вывод:** ***площадь квадрата равна квадрату его стороны.***

 рис. 3

Вывод формул площади других плоских фигур (треугольника, параллелограмма, трапеции, круга) достигается путём последовательного применения для всех случаев одного и того же методического приёма: геометрическая фигура разбивается на треугольники, сумма площадей которых составляет площадь данной фигуры. Этот наглядный способ доказательства развивает познавательное воображение ученика, способствует более осмысленному восприятию материала урока.

1. **Площадь прямоугольного треугольника.**

**Определение:**  треугольник – это замкнутая плоская фигура, образованная тремя точками, не лежащими на одной прямой, и тремя отрезками, соединяющими эти точки. Треугольник, у которого один из углов прямой, называется прямоугольным.

Любой прямоугольник ABCD (рис. 4) делится своей диагональю BD на два равных прямоугольных треугольника ABD и BCD (рис. 4а).

 B a C B B a C

|  |
| --- |
|  |

b → b b

 A D A D D

 рис. 4 рис. 4а

А равные фигуры имеют равные площади. Следовательно, площадь каждого прямоугольного треугольника равна половине площади прямоугольника.

**SABC = SBCD =** $\frac{1}{2}$ **SABCD**

С помощью введённых обозначений площадь прямоугольного треугольника можно записать в виде **S =** $\frac{1}{2 }$**ab.** В прямоугольном треугольнике стороны AD = a, AB = b, образующие прямой угол, называются катетами.

**Вывод:** ***площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.***

1. **Площадь произвольного треугольника.**

**Первый вариант.**

Пусть дан не прямоугольный разносторонний треугольник ABC со сторонами a, b, c (рис. 5). Опустим из вершины B на основание AC = a высоту BD = h. Высота BD разбивает треугольник на два прямоугольных треугольника ABD и BCD (рис. 5а).

 B

b c →

h

 A C

 D a рис. 5

 B B

 h

 A D C

 рис. 5а

Известно, что площадь фигуры равна сумме площадей частей, из которых она состоит. Следовательно, площадь треугольника ABC можно представить как сумму площадей треугольников ABD и BCD.

**SABC  = SABD + SBCD** (1)

Но SABD = $\frac{1}{2}$ AD\*h; SBCD = $\frac{1}{2}$ DC\*h, где AD и h – катеты Δ ABD; DC и h – катеты Δ BCD. Подставим значения площадей треугольников в равенство (1). Получим:

SABC = $\frac{1}{2}$ AD\*h + $\frac{1}{2}$ DC\*h = $\frac{1}{2}$ h (AD + DC) (2)

Сумма (AD + DC) = AC = a. Заменим в равенстве (2) сумму в скобках на равную ей величину «а», получим

**S =** $\frac{1}{2}$ **ah** (Ι)

Получили формулу площади произвольного разностороннего треугольника.

**Вывод:** ***площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.***

**Второй вариант.**

Высота h в треугольнике ABC и сторона AB = b являются соответственно катетом и гипотенузой в прямоугольном треугольнике ABD (рис. 5б).

 B

 b h

 α

 A D a C

 рис. 5б

Обозначим угол при вершине A буквой α. Отношение катета h, лежащего против угла α, к гипотенузе b есть синус угла α:$ \frac{h}{b}= \sin(α.)$ Выразим из этого равенства величину h: h = b\*$\sin(α.) $Произведение b\*$\sin(α.)$ , определяющее вершину h, подставим в формулу (Ι) площади разностороннего треугольника.

**S =** $\frac{1}{2}$ **ab**$\sin(α.)$(ΙΙ)

**Вывод:**  ***площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними.***

1. **Площадь параллелограмма.**

**Определение:** Параллелограмм – это четырёхугольник, у которого противолежащие стороны параллельны.

Пусть дан параллелограмм ABCD (рис. 6). Проведём диагональ DB . Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника: ABD и DBC (первый признак равенства треугольников: угол A = углу C; AB = DC; AD = BC, рис. 6б).

 A B A B B

 →

 h

 D C D D а C

 рис. 6 рис. 6а

Так как площади треугольников одинаковы, то площадь параллелограмма можно представить как удвоенную площадь одного треугольника, например, DBC (рис. 6).

**Sпарал. = SABCD  = 2SDBC** (1)

Обозначим основание параллелограмма DA = a. Эта сторона является также основанием треугольника DBC. Опустим из вершины B на основание треугольника высоту h, которая будет также высотой параллелограмма, так как определяет расстояние между параллельными сторонами AB и DC. Запишем известную формулу площади треугольника:

**Sпарал. =** $\frac{1}{2}$ **ah**

Подставим это значение площади треугольника в равенство (1). Получим формулу площади параллелограмма:

**Sпарал. =2\*** $\frac{1}{2}$ **ah = ah**

Итак,

**Sпарал. =**  **ah**

**Вывод:** ***площадь параллелограмма равна произведению основания параллелограмма на его высоту.***

1. **Площадь ромба.**

**Вариант первый.**

 а

**Определение:** ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 7).

В связи с этим, площадь ромба находится по формуле площади параллелограмма:

**Sром. =**  **ah**

Площадь ромба можно выразить через его диагонали. Пусть дан ромб ABCD (рис. 8). Диагонали ромба AC и BD пересекаются под прямым углом и точкой пересечения O делятся пополам. Введём обозначения: AC = d1, BD = d2

Диагональ AC делит ромб на два равных равнобедренных треугольника ABC и ADC (третий признак равенства треугольников). Площадь ромба, следовательно, можно представить как удвоенную площадь одного из треугольников, например, ABC (рис. 8а).

**Sромба = 2SABC**

Площадь треугольника, по доказанному, равна половине произведения основания на его высоту. В треугольнике ABC основанием служит диагональ ромба AC = d1, а высотой – отрезок BO = $\frac{d\_{2}}{2}$ . Поэтому

SABC = $\frac{1}{2}$ AC\*BO = $\frac{1}{2}$ d1\*$\frac{d\_{2}}{2}$ = $\frac{1}{4}$ d1d2

Так как площадь ромба в два раза больше, то

Sромба =2 \* $\frac{1}{4}$ d1d2 = $\frac{1}{2}$ d1d2

Итак,

**Sромба =** $\frac{1}{2}$ **d1d2**

**Вывод:** ***площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.***

 а hhh а

hhh

**ммff**

h

а

рис. 7

**Вариант второй.**

 B

 A d1 O C

 d2

D

 рис. 8

 B

$\frac{d\_{2}}{2}$

 A d1 O C

 D

рис. 8а

1. **Площадь трапеции.**

**Определение:** трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны.

Пусть дана трапеция ABCD (рис. 9). Параллельные стороны AD и BC называются основаниями трапеции. Обозначим основания AD = a, BC = b.

 b

 B C

 A D

 a рис. 9

Проведём диагональ трапеции BD. Диагональ делит трапецию на два треугольника ABD и BCD. Очевидно, что площадь трапеции равна сумме площадей этих треугольников:

SABCD = SABD + SBCD (1)

 B B b C E

 h h

 A F a рис. 9а D

В треугольнике ABD опустим высоту BF = h на основание «a» (рис. 9а). В треугольнике BCD опустим высоту DE = h на продолжение основания «b». Высоты треугольников равны, т.к. они определяют расстояние между параллельными основаниями «a» и «b» трапеции. Высота треугольника является одновременно и высотой трапеции. Запишем формулы площадей треугольников:

SABC = $\frac{1}{2}$ ah; SBCD = $\frac{1}{2}$ bh.

Подставляя значения площадей треугольников в равенство (1), получим формулу площади трапеции:

SABCD = $\frac{1}{2}$ ah + $\frac{1}{2}$ bh = $\frac{1}{2} $(a + b)\*h или **SABCD =** $\frac{a + b}{2}$ **h**

**Вывод:**  ***площадь трапеции равна произведению полу суммы оснований на высоту.***

1. **Площадь круга.**

На рис. 10 изображён круг с центром О и радиусом R. Как определить площадь круга? Впишем в круг правильный многоугольник с числом сторон n = 5 (рис. 11). По рисунку видно, что площадь многоугольника не покрывает полностью площадь круга. За пределы пятиугольника выступают большие сегменты круга.

Впишем в круг пятиугольник с числом сторон

n = 12 (рис. 12). Площадь 12-угольника значительно полнее покрывает площадь круга в сравнении с пятиугольником. Следовательно, площадь правильного многоугольника, вписанного в круг, с достаточно большим числом сторон n будет как угодно мало отличаться от площади круга. Значит, задачу о нахождении площади круга можно заменить задачей о нахождении площади соответствующего многоугольника.

Пусть дан круг с центром О и вписанный в него n-угольник (рис. 13). Проведём из центра круга радиусы к вершинам многоугольника. Многоугольник разбивается на «n» равных равнобедренных треугольников каждый с центральным углом $φ= \frac{360^{°}}{n}.$

Площадь одного равнобедренного треугольника AOB (рис.13) определяется по формуле:

$S\_{AOB}= \frac{1}{2} OA\*OB\*\sin(φ.)$

В нашем случае OA = R, OB = R, так что имеем

$S\_{AOB}= \frac{1}{2} \sin(\frac{360^{°}}{n})R^{2}$ .

Площадь всего многоугольника в «n» раз больше.

 R

 О

 рис. 10

 рис. 11

 рис. 12

 A

 O ϕ

 B

 рис. 13

$S\_{мног. }=nS\_{AOB}=\frac{n}{2} \sin(\frac{360^{°}}{n})R^{2}$ (Ι)

Очевидно, что при достаточно большом числе сторон площадь многоугольника будет практически совпадать с площадью круга. Т.е.,

$S\_{кр.}=S\_{мног. }=\frac{n}{2} \sin(\frac{360^{°}}{n})R^{2}$ (ΙΙ)

Зададим вопрос: при каком числе сторон n площадь правильного вписанного многоугольника можно отождествлять с площадью круга? Произведение $\frac{n}{2} \sin(\frac{360^{°}}{n})$, стоящее перед $R^{2}$, не зависит от радиуса круга. Начиная с n ≥ 150 (см. таблицу), это число с точностью до сотых долей имеет постоянное значение 3,14…

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n – число сторонвписанногомногоугольника | $φ= \frac{360^{°}}{n}$ – центральныйугол треугольника | Числовое значение$\frac{n}{2} \sin(\frac{360^{°}}{n})$  |
| 12 | 300 | 3,00000… |
| 50 | 7,20 | 3,13333… |
| 100 | 3,60 | 3,13952… |
| 150 | 2,40 | 3,14067…≈ 3,14… |
| 300 | 1,20 | 3,14136…≈ 3,14… |
| 500 | 0,720 | 3,14150…≈ 3,14… |
| 2000 | 0,180 | 3,14158…≈ 3,14… |
| 10000 | 0,0360 | 3,14159…≈ 3,14… |

Постоянство множителя (числа) перед R2 при увеличении n от150 до 10000 служит признаком того, что площади многоугольника и круга совпадают с точностью до сотых долей. Число 3,14… обозначают буквой греческого алфавита $π$ (пи). Заменяя произведение $\frac{n}{2} \sin(\frac{360^{°}}{n})$ буквой $π$ в равенстве (Ι), получим формулу площади круга:

**Sкр**$=π$ **R2 .**

**Примечание.**  Найти точное (математически точное) значение площади круга по формуле $S\_{кр}=π$ R2 нельзя, т.к. число $π=3,14159265…$, известное в математике как трансцендентное число, представляется бесконечной непериодической дробью. Для практических целей ограничиваются числом 3,14…