Метод площадей при решении геометрических задач.

Оглавление

Введение

В школьном курсе математики, самыми трудными считаются геометрические задачи. Как научиться решать геометрические задачи, особенно сложные, конкурсные? При решении геометрических задач, как правило, алгоритмов нет, и выбирать наиболее подходящую к данному случаю теорему не просто. Поэтому, желательно в каждой теме выработать какие-то общие положения, которые полезно знать всякому решающему геометрические задачи.

В данной работе рассматривается один из самых распространенных алгоритмов решения геометрических задач – *метод площадей*, т.е. решение задач с использованием свойств площадей.

Значимость метода площадей заключается в том, что он является предметом изучения и одновременно средством для изучения последующего материала. Знания метода площадей включаются в общую систему геометрических знаний, "работают" и при дальнейшем изучении геометрии.

Эта тема актуальна в связи с решением задач на вупускных экзаменах т.к. геометрические задачи являются одной из составных частей выпускных экзаменов.

Глава I Метод площадей

1.1 Определение метода площадей

Характеристика метода.

Из названия следует, что главным объектом данного метода является площадь. Для ряда фигур, например для треугольника, площадь довольно просто выражается через разнообразные комбинации элементов фигуры (треугольника). Поэтому весьма эффективным оказывается прием, когда сравниваются различные выражения для площади данной фигуры. В этом случае возникает уравнение, содержащее известные и искомые элементы фигуры, разрешая которое мы определяем неизвестное. Здесь и проявляется основная особенность метода площадей - из геометрической задачи он "делает" алгебраическую, сводя все к решению уравнения (а иногда системы уравнений).

Само сравнение выражений для площади фигуры может быть различным. Иногда площадь фигуры представляется в виде суммы площадей ее частей. В других случаях приравниваются выражения, основанные на различных формулах площади для одной и той же фигуры, что позволяет получить зависимость между ее элементами.

Суть метода площадей не ограничивается только описанным выше приемом. Иногда бывает полезно рассмотреть отношение площадей фигур, одна из которых (или обе) содержит в себе искомые элементы.

Универсального метода для решения всех задач на площади многоугольников нет, но существуют приемы, применимые ко многим задачам. Понятие площади мы используем даже при решении тех задач, в формулировках которых отсутствует упоминание площади. Поэтому можно говорить о методе площадей в геометрии.

Этот метод редко упоминаются в методической и научно-популярной литературе, хотя в олимпиадной и конкурсной практике часто встречаются задачи, решаемые методом площадей.

Метод площадей состоит в применении различных свойств площадей соответственно для составления соотношений, связывающих данные задачи и неизвестные. Обычно используют свойства аддитивности площади или объема и отношений площадей или объемов, которые помогают свести задачу либо к решению уравнения, либо к прямому вычислению.

Отметим, что метод площадей используется при решении задач, в условии которых идет речь о площадях, и особенную важность имеет в тех, где такого упоминания нет. В последних площадь вводится в задачу в качестве вспомогательного элемента.

"Идея метода вспомогательного элемента заключается во включении в решение задачи некоторого дополнительного объекта, прямо не фигурирующего в условии, получении с его помощью новых умозаключений и результатов с последующим исключением объекта".

Будем рассматривать различные задачи, определяя в каждой характер включения в решение метода площадей. Остановимся подробнее на характеристике и диапазоне применимости метода площадей.

Одна из разновидностей метода площадей сводится к использованию в задаче свойства аддитивности площади: если фигура разрезана на несколько частей, то ее площадь равна сумме площадей этих частей.

$$S=S1+S2+S3$$

Суть применения метода площадей в этом случае состоит в том, что мы рассматриваем площадь какой-то фигуры как сумму площадей ее частей, каждую из площадей подсчитываем удобным образом, в результате чего получаем уравнение, которое и дает искомое неизвестное или существенно облегчает его поиск. С точки зрения метода в качестве простейших и подготовительных мы рассматриваем задачи, в которых площадь выражается двумя способами.

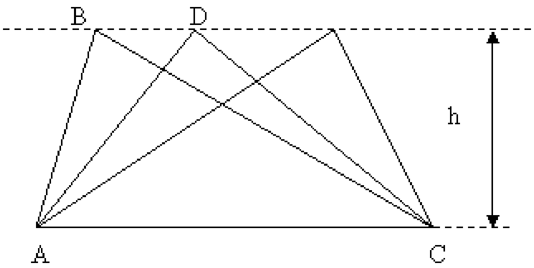
Например, такая задача: в равнобедренном треугольнике известны основание и высота, проведенная к основанию, требуется найти высоту, проведенную к боковой стороне.

Площадь данного треугольника с одной стороны есть половина произведения основания на высоту, проведенную к основанию, а с другой - половина произведения боковой стороны на соответствующую ей высоту, где боковая сторона треугольника легко вычисляется по теореме Пифагора.

1.2 Основные свойства площадей

Свойство №1

Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной основанию, то площадь при этом не измениться.



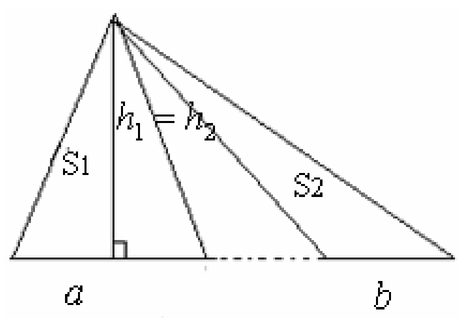
Доказательство:

Рассмотрим ▲ABC и ▲ADC. Они имеют общее основание и равные высоты, т.к. прямые AC и BD параллельные, то расстояние между ними равно h - высоте ▲ABC и ▲ADC. Площадь треугольника находится по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$, то

$$S_{\text{ABC}} = S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h$$

Свойство №2

Если два треугольника имеют одинаковые высоты, то отношение их площадей равно отношению длин оснований (сторон, на которые опущены эти высоты).



Доказательство:

Пусть $h_1 = h_2$ в двух треугольниках с основаниями

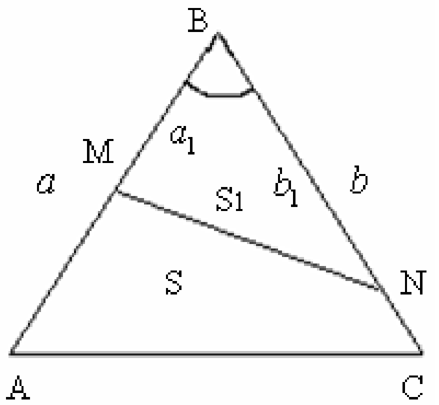
a и b.

Рассмотрим отношение площадей этих треугольников $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot h_2}$.

Упростив, получим $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1}{b}$.

Свойство №3

Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведение сторон, заключающих этот угол.



Доказательство:

Рассмотрим ▲ABC и ▲MBN

с общим углом B ,

где AB = a, BC = b, MB = a_1 и NB = b_1. Пусть $S_1 = S_{MBN}$ и $S_2 = S_{ABC}$. Используя формулу площади треугольника вида $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$,

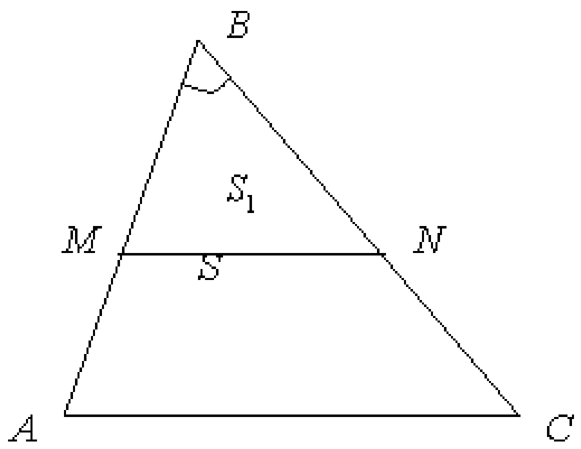
рассмотрим отношение площадей ▲ABC и ▲MBN .

Тогда $\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot \sin B}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin B}$. Упростив,

получим $\frac{S_1}{S} = \frac{a_1 \cdot b_1}{a \cdot b}$.

Свойство №4

Отношение площадей подобных треугольников равны квадрату коэффициента подобия.



Доказательство:

Рассмотрим ▲ABC и ▲MBN.

Пусть AB = k·MB, BC = k·NB и $\angle ABC = \angle MBN$.

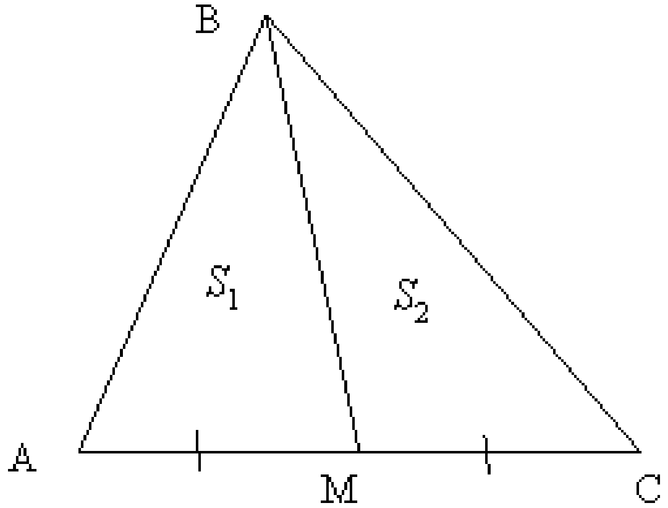
Используя формулу площади треугольника вида $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$, рассмотрим отношение подобных площадей ▲ABC и ▲MBN. Тогда

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B}{\frac{1}{2} \cdot MB \cdot NB \cdot \sin B} = $$

$$= \frac{k \cdot NB \cdot k \cdot MB \cdot \sin B}{MB \cdot NB \cdot \sin B} = k^2 .$$

Свойство №5

Медиана треугольника делит его на две равновеликие части.



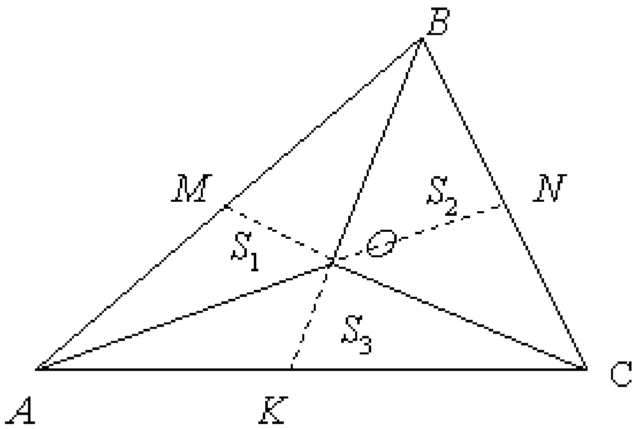
Доказательство:

Рассмотрим ▲ABC . Пусть медиана BM , тогда AM=MC=1/2AC. Медиана делит треугольник на два с одинаковой высотой. Найдем площади треугольников ▲ABM и ▲MBC по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$. Получим $S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot h$ и $S_{MBC} = \frac{1}{2} \cdot MC \cdot h$.

Значит $S_{ABM} = S_{MBC}$.

Свойство №6

Медианы треугольника делят его на три равновеликие части.

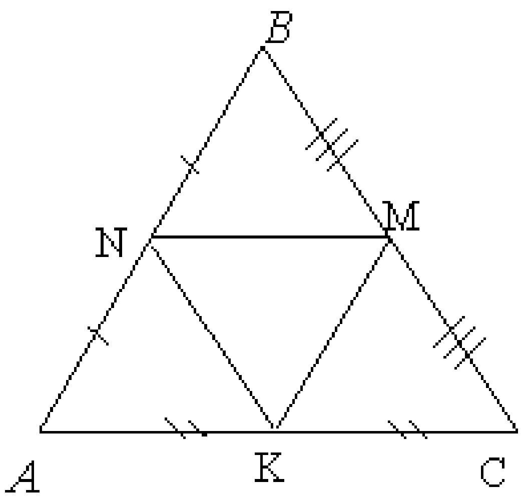


Доказательство:

Рассмотрим ▲ABC. Проведем медианы из всех вершин, которые пересекаются в точке О. Получим треугольники ▲AOB, ▲BOC, ▲AOC. Пусть их площади равны соответственно S_1, S_2, S_3. А площадь ▲ABC равна S. Рассмотрим ▲ABK и ▲CBK, они равной площади, т.к. BK медиана. В треугольнике ▲AOC OK - медиана, значит площади треугольников ▲AOK и ▲COK равны. Отсюда следует, что $S_1 = S_2$. Аналогично доказывается, что $S_2 = S_3$ и $S_3 = S_1$.

Свойство №7

Средние линии треугольника площади S отсекают от него треугольники площади ¼ S



Доказательство:

Рассмотрим ▲ABC. NM - средняя линия в треугольнике и она равна половине основания AC.

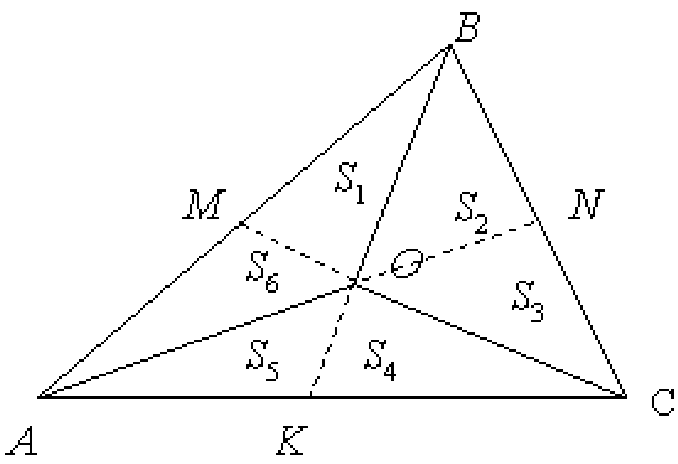
Если $S_{ABC} = S$, то

$$S_{NMB} = \frac{1}{2} \cdot NM \cdot h_1 =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AC \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot h = \frac{1}{4} S$$

Аналогично можно доказать, что площади всех треугольников равны одной четвертой части площади ▲ABC.

Свойство №8

Медианы треугольника делят его на 6 равновеликих частей.



Доказательство:

По свойству №7 площади ▲AOB, ▲BOC, ▲AOC равны. По свойству №5 площади ▲AOM, ▲BOM равны. Значит $S_1 = S_6$. Аналогично $S_2 = S_3$. Если $S_1 + S_6 = S_2 + S_3$ и $2 \cdot S_1 = 2 \cdot S_2$ значит $S_1 = S_2$. И так далее. получим, что все шесть треугольника имеют равные площади и они составляют шестую часть от площади ▲ABC.

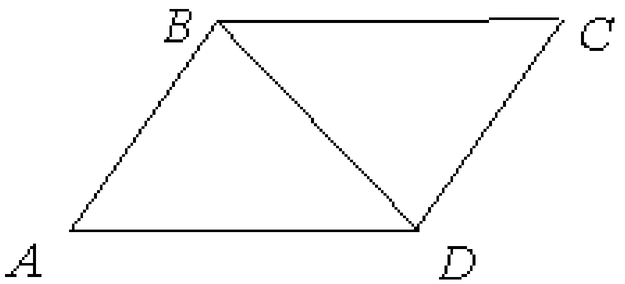
1.3 Применение свойств метода площадей к решению задач

В данном пункте рассмотрим систему геометрических задач решаемых методом площадей. Задачи построены по нарастающему уровню сложности. При решении задач используются свойства метода площадей, а также базовое утверждение.

Утверждение. Два треугольника являются равновеликими, если равны их высоты и основания.

Задача 1.

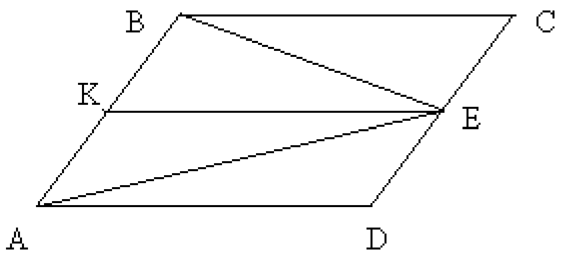
Докажите, что диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих треугольника.



Решение. Высоты треугольников *ABD* и *BCD* равны. *AD* = *BC* (по свойству параллелограмма). Тогда в силу утверждения $S_{\blacktriangle ABD} = S_{\blacktriangle BCD}$

Задача 2.

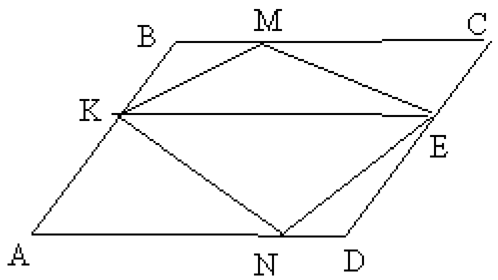
На стороне *CD* параллелограмма *ABCD* взята произвольная точка *E*. Зная, что $S_{\blacktriangle ABE} = S$, найдите площадь параллелограмма *ABCD*



Решение. Проведем дополнительное построение: *KE*//*AD*. Тогда из решения задачи 1: следует, что $S_{\blacktriangle KBE} = S_{\blacktriangle CBE}$, а $S_{\blacktriangle AKE} = S_{\blacktriangle ADE}$. Отсюда $S_{ABCD} = 2S$

Задача 3.

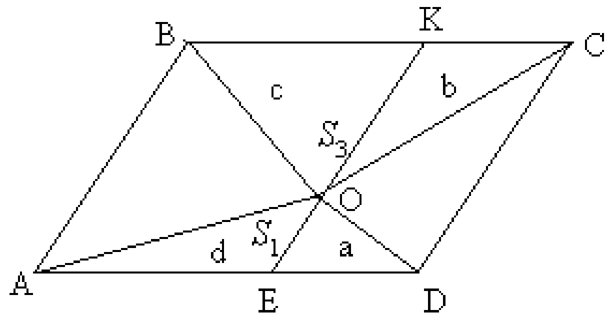
В параллелограмме *ABCD* на сторонах *AB* и *CD* взяты произвольные точки *M* и *N*. Докажите, что площадь четырехугольника *KMEN* равна площади четырех образовавшихся треугольников.



Решение. Проведем отрезок ***KE***. Тогда в силу задачи 2: $\boldsymbol{S_{\blacktriangle KME}} = \boldsymbol{S_{\blacktriangle KMB}} + \boldsymbol{S_{\blacktriangle MEC}}$, а $\boldsymbol{S_{\blacktriangle KNE}} = \boldsymbol{S_{\blacktriangle AKN}} + \boldsymbol{S_{\blacktriangle EDN}}$ **Отсюда** $\boldsymbol{S_{\blacktriangle KMEN}} = \boldsymbol{S_{\blacktriangle KMB}} + \boldsymbol{S_{\blacktriangle MEC}} + \boldsymbol{S_{\blacktriangle KNE}} + \boldsymbol{S_{\blacktriangle EDN}}$

Задача 4.

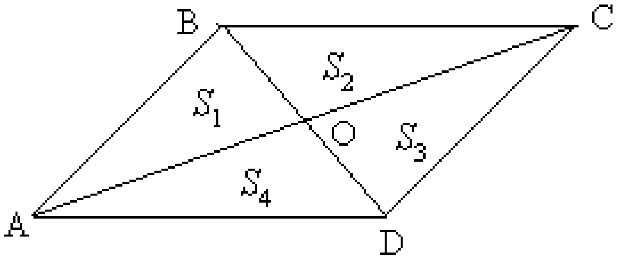
Внутри параллелограмма *ABCD* взята произвольная точка *O*. Зная площадь трех треугольников с вершиной в точке *O*, найдите площадь четвертого треугольника.



Решение. Пусть $S_{\blacktriangle ADO} = S_1$, $S_{\blacktriangle ABO} = S_2$, $S_{\blacktriangle BOC} = S_3$. Произведем дополнительное построение: *KE*?*AB*. Введем следующие обозначения: $S_{\blacktriangle EOD} = a$, $S_{\blacktriangle KCO} = b$, $S_{\blacktriangle BKO} = c$, $S_{\blacktriangle AEO} = d$. Тогда $S_2 = c + d$, $S_{\blacktriangle DOC} = a + b$, $S_1 + S_3 = a + b + c + d$. Отсюда $S_{\blacktriangle DCO} = S_1 + S_3 - S_2$

Задача 5.

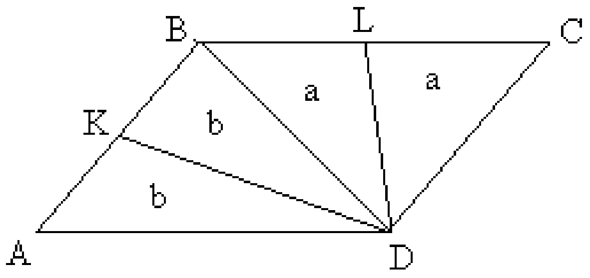
Каждая диагональ четырехугольника делит его на треугольники одинаковой площади. Докажите, что это параллелограмм.



Решение. Из условия следует, что верны равенства: $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ и $S_1 + S_4 = S_3 + S_2$. Откуда получим, что $S_1 = S_3$, а $S_2 = S_4$. Отметим, что S_1/S_2=OC/AO, S_3/S_4=OC/AO. Кроме этого, соответствующие высоты треугольников *BOC*, *COD* и *AOB*, *AOD* равны, соответственно, площади относятся как длины оснований. Из того, что $S_1 = S_3$ и $S_2 = S_4$. следует, что AO/OC=OC/AO. Следовательно, $AO = OC$. Аналогично можно доказать, что $BO = OD$. Можно сделать вывод, что диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, а это значит, что *ABCD* - параллелограмм.

Задача 6.

В параллелограмме *ABCD* точка *K* – середина *AB*, а *L* – середина *BC*. Зная, что $S_{KBLD} = S$, найдите S_{ABCD} .

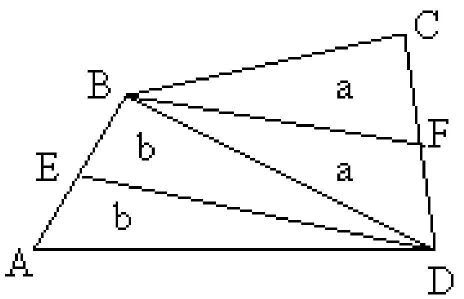


Решение. Проведем диагональ *BD*. Тогда,

исходя из свойства 5, получим, что $S_{ABCD} = S$.

Задача 7.

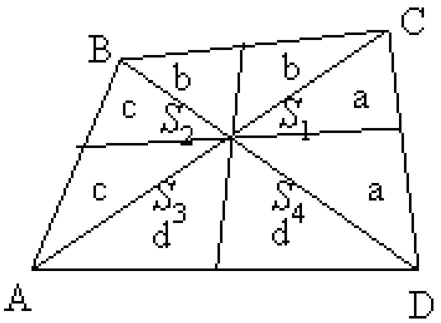
В четырехугольнике *ABCD* точка *E*, середина *AB*, соединена с вершиной *D*, а точка *F*, середина *CD*, - с вершиной *B*. Докажите, что $S_{ABCD} = 2S_{EBFD}$



Решение. Проведя диагональ *BD* и рассуждая аналогично задаче 6, получим, что $S_{ABCD} = 2S_{EBFD}$

Задача 8.

В четырехугольнике *ABCD* точка *E*, середина *AB*, соединена с вершиной *D*, а точка *F*, середина *CD*, - с вершиной *B*. Докажите, что $S_{ABCD} = 2S_{EBFD}$



Решение. В силу свойства 5 и обозначений, использованных для элементов чертежа, получим

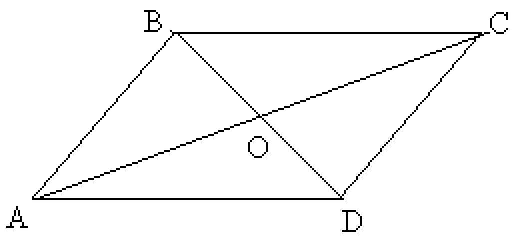
$S_1 = a + b, S_2 = b + c,$

$S_3 = c + d, S_4 = a + d.$

Тогда, зная S_1, S_2, S_3, S_4 получим, что $S_4 = S_1 + S_3 - S_2$.

Задача 9.

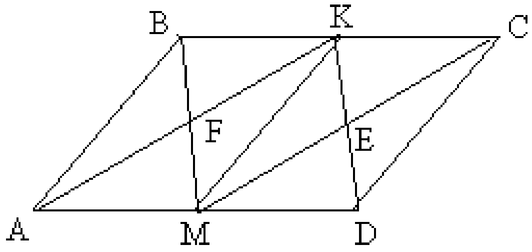
Докажите, что диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника.



Решение. В силу задачи 1 и утверждения 2 будем иметь $S_{\blacktriangle AOB} = S_{\blacktriangle BOC} = S_{\blacktriangle COD} = S_{\blacktriangle DOA}$

Задача 10.

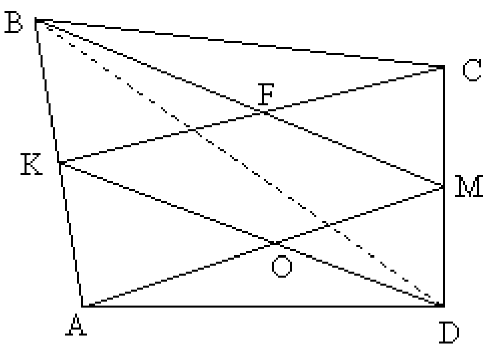
Середины двух параллельных сторон параллелограмма соединены с противолежащими вершинами. Какая часть площади параллелограмма ограничена проведенными отрезками?



Решение. Проведем отрезок *MK*. Тогда в силу задачи 9 S_{MFKE} = ¼$SABCD$.

Задача 11.

Дан выпуклый четырехугольник *ABCD*. Середины сторон *AB* и *CD* обозначены соответственно через *K* и *M*, точку пересечения отрезков *BM* и *CK* – через *P*, точку пересечения отрезков *AM* и *DK* – через *O*. Докажите, $S_{MOKP} = S_{\blacktriangle BPC} + S_{\blacktriangle AOD}$

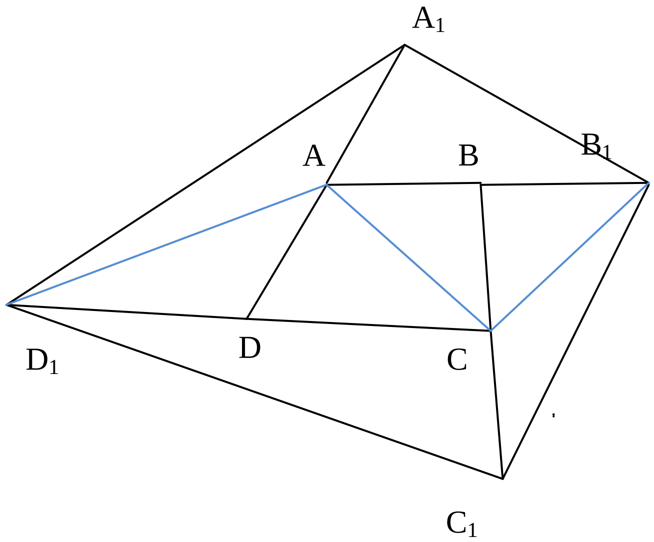


Решение. Проведем диагональ *BD*. Так как *DK* и *BM* медианы вновь полученных треугольников, то S_{AKD}=½S_{ABD}, S_{BMC}=½S_{BCD}. Отсюда $S_{\blacktriangle AKD} + S_{\blacktriangle BMC}$ =½$SABCD$ Проведя диагональ *AC* и учитывая, что *AM* и *CK* медианы уже вновь полученных треугольников, получим S_{KBC}=½S_{ABC}, S_{AMD}=½S_{ACD} . Тогда $S_{\blacktriangle KBC} + S_{\blacktriangle AMD}$ = ½S_{ABCD}.

Из равенств (1) и (2) следует, что $S_{\blacktriangle AKD} + S_{\blacktriangle BMC} + S_{\blacktriangle KBC} + S_{\blacktriangle AMD} = S_{ABCD}$.В этой сумме дважды учтены площади треугольников *BPC* и *AOD*, но не учтена площадь четырехугольника *MOKP*. Поэтому $S_{MOKP} = S_{\blacktriangle BPC} + S_{\blacktriangle AOD}$.

Задача 12.

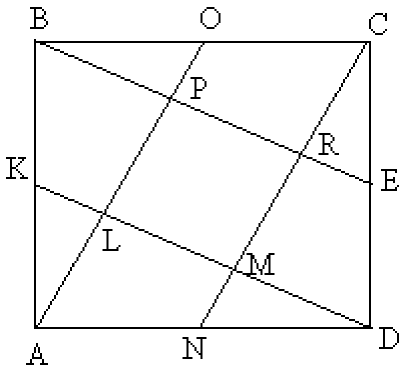
На продолжениях сторон выпуклого четырехугольника *ABCD* отложены отрезки $BB_1 = AB$, $CC_1 = BC$, $DD_1 = CD$ и $AA_1 = AD$. Докажите, что площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ в 5 раз больше площади четырехугольника *ABCD*

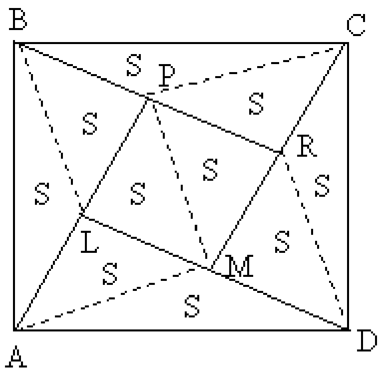


Решение. Медиана делит площадь треугольника пополам, поэтому площади треугольников *ABC*, BB_1C и CC_1B_1 равны между собой. Площадь треугольника *ACD* равна площади треугольника ADD_1, площадь треугольника ADD_1 равна площади треугольника AA_1D_1 и т. д. Тогда $S_{\blacktriangle \mathrm{BB1C1}} = 2S_{\blacktriangle ABC,}$ $S_{\blacktriangle \mathrm{CC1D1}} = 2S_{\blacktriangle BCD,}$ $S_{\blacktriangle \mathrm{AA1B1}} = 2S_{\blacktriangle DBA,}$ $S_{\blacktriangle \mathrm{DD1A1}} = 2S_{\blacktriangle CAD.}$ Суммируя эти равенства, получим $S_{\blacktriangle \mathrm{BB1C1}} + S_{\blacktriangle \mathrm{CC1D1}} + S_{\blacktriangle \mathrm{AA1B1}} + S_{\blacktriangle \mathrm{DD1A1}}$.Обозначим площадь четырехугольника *ABCD* через *S*, тогда площадь четырех построенных треугольников равна $4S$, а площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ равна $5S$.

Задача 13.

Вершина *A* квадрата *ABCD* соединена с точкой *O* – серединой *BC*, вершина *B* – с точкой *E* – серединой *CD*, вершина *C* – с точкой *N* – серединой *AD*, а вершина *D* – с точкой *K* – серединой *AB*. Точки пересечения проведенных прямых *L, M, R*, и *P* служат вершинами четырехугольника *LMRP*. Докажите, что $S_{LMRP}=1/5S_{ABCD}$.

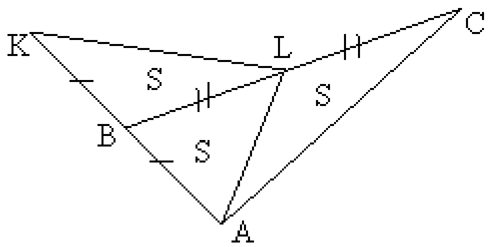




Решение. *BKDE* – параллелограмм, так как *BK* = *DE* и *BK*?*DE*, поэтому *BE*?*K*D. *AOCN* – параллелограмм, так как *AN* = *OC* и *AN*//*OC,* поэтому OA?*CN*. Учитывая, что *O, E, N*, и *K* – середины сторон, из теоремы Фалеса следует, что *AL* = *LP, BP* = *PR, CR* = *RM* и *DM* = *ML*. Для большей наглядности дальнейшего хода решения задачи, представим чертеж в другом виде. Дальнейший ход решения совпадает с решением задачи 12.

Задача 14.

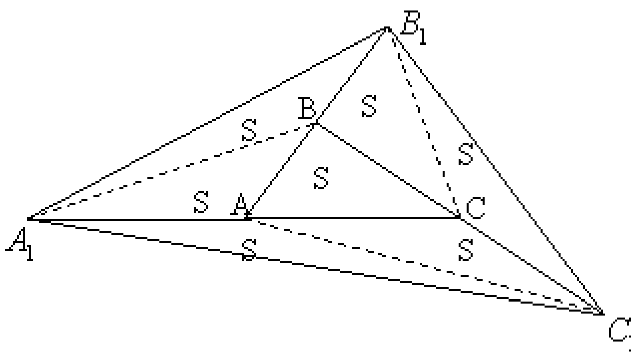
На продолжении стороны AB треугольника ABC взята точка K так, что AB = BK. Точка L – середина BC. Зная, что $S_{\blacktriangle BKL = S}$, найдите $S_{\blacktriangle ABC}$



Решение. Сделаем дополнительное построение – проведем отрезок AL. В силу свойства 5 и использованных на чертежах обозначений $S_{\blacktriangle ABC} = 2S$.

Задача 15.

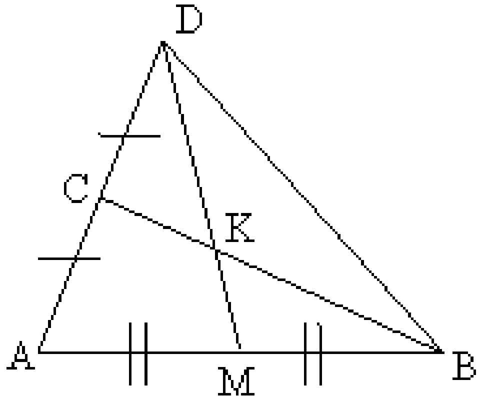
На продолжении сторон треугольника ABC построены отрезки $AA_1 = AC$, $BB_1 = AB$ и $CC_1 = BC$. Докажите, что $S_{\blacktriangle A1B1C1} = 7S_{\blacktriangle ABC}$.



Решение. Произведя дополнительные построения, приняв во внимание обозначения на чертеже и опираясь на свойство 5, видим, что решение следует непосредственно из чертежа.

Задача 16.

На продолжении стороны треугольника *ABC* взята точка *D* так, что $AC = CD$. Пусть *M* – середина стороны *AB*, а *K* – точка пересечения отрезков *BC* и *MD*. Докажите, что площадь треугольника *BKD* равна площади четырехугольника *AMKC*.

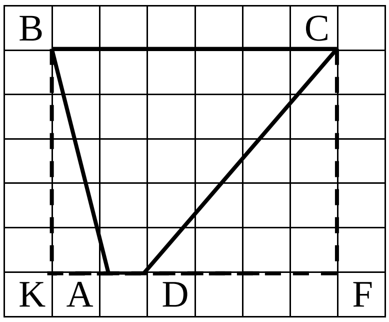


Решение В треугольнике *ABD* *DM* и *BC* – медианы. Поэтому $S_{\blacktriangle AMD} = S_{\blacktriangle BMD}$ и $S_{\blacktriangle ACB} = S_{\blacktriangle CDB}$. Эти равенства можно записать так: $S_{\mathrm{AMKC}} + S_{\blacktriangle CKD} = S_{\blacktriangle MDK} + S_{\blacktriangle BKD}$, $S_{\mathrm{AMKC}} + S_{\blacktriangle MBK} = S_{\blacktriangle CKD} + S_{\blacktriangle BKD}$ Сложив эти равенства и упростив выражение, получим $S_{\mathrm{AMCK}} = S_{\blacktriangle BKD}$.

Глава II Использование метода площадей на выпускных экзаменах.

Задача 1

На клетчатой бумаге с клетками размером 1х1 см изображена трапеция. Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



Решение:

$S_{ABCD}=S_{KBCF}-S_{KAB}-S_{DCF}$

$S_{KBCF}=5\cdot 6=30$ см^2

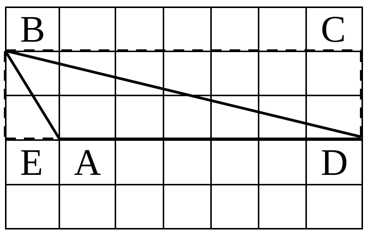
$S_{KAB}=1/2\cdot 5\cdot 1=2.5$ см^2, $S_{KAB}=1/2\cdot 5\cdot 4=10$ см^2

$S_{ABCD}=30-2.5-10=17.5$ см^2

Ответ: площадь трапеции равна 17.5 см^2.

Задача 2

На клетчатой бумаге с клетками размером 1х1 см изображен треугольник. Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.



Решение:

$S_{ABD}=S_{EBCD}-S_{EBA}-S_{BCD}$

$S_{EBCD}=7\cdot 2=14$ см^2

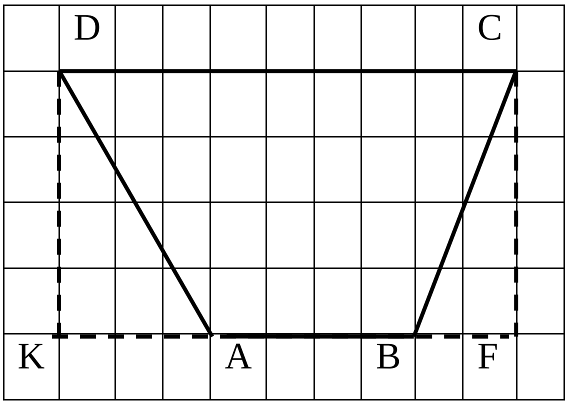
$S_{EBA}=1/2\cdot 1\cdot 2=1$ см^2

$S_{BCD}=1/2\cdot 7\cdot 2=7$ см^2, $S_{ABD}=14-1-7=6$ см^2

Ответ: площадь треугольника равна 39 см^2.

Задача 3

На клетчатой бумаге с клетками размером 1х1 см изображена трапеция. Найдите ее площадь в квадратных сантиметрах.



Решение:

$S_{ABCD}=S_{KBCF}-S_{KAB}-S_{DCF}$

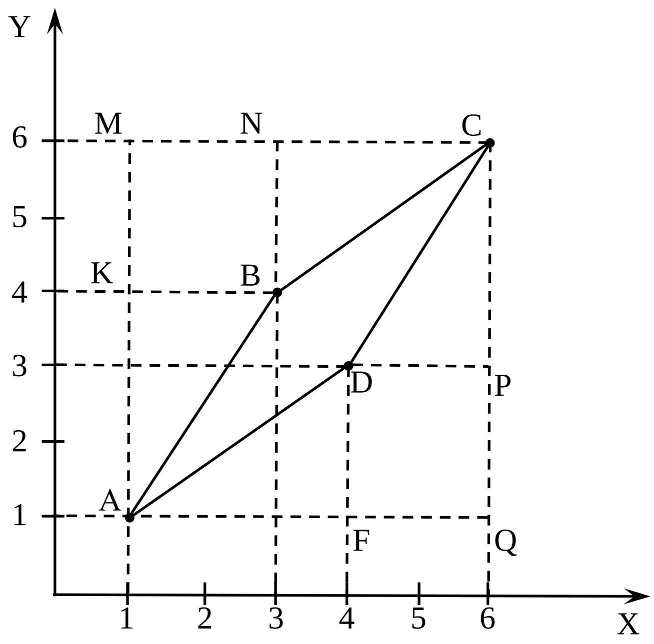
$S_{KBCF}=9\cdot 6=54$ см^2

$S_{KAB}=1/2\cdot 6\cdot 3=9$ см^2, $S_{KAB}=1/2\cdot 6\cdot 2=6$ см^2

$S_{ABCD}=54-9-6=39$ см^2

Ответ: площадь трапеции равна 39 см^2.

Задача 4. Найти площадь фигуры



Решение:

$S_{ABCD}=S_{AMCO}-S_{AKB}-S_{KMNB}-S_{BNC}-S_{ADF}-S_{DPOF}-S_{DCP}$

$S_{AMCO}=5\cdot5=25$

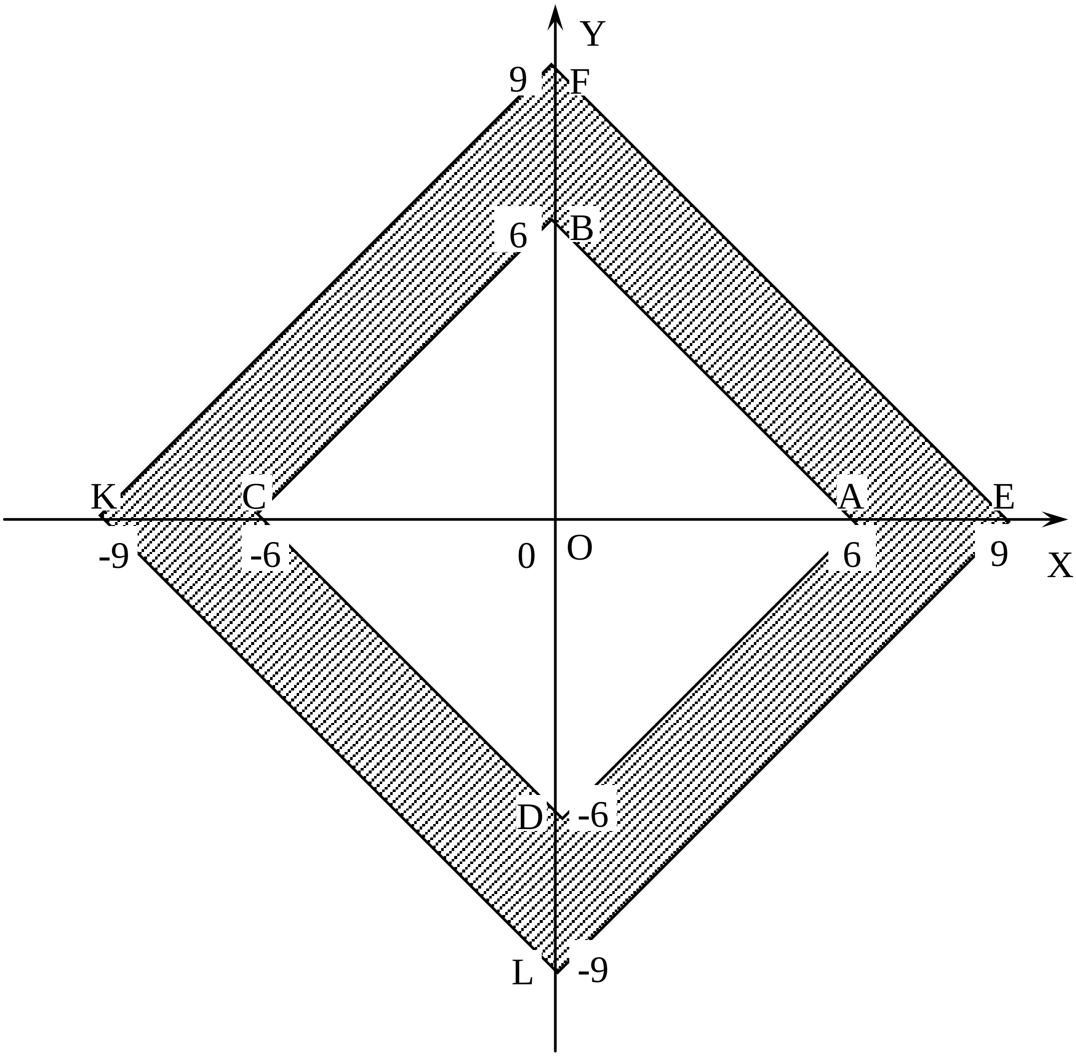
$S_{AKB}=1/2\cdot3\cdot2=3$, $S_{KMNB}=2\cdot2=4$, $S_{BNC}=1/2\cdot3\cdot2=3$,

$S_{ADF}=1/2\cdot3\cdot2=3$, $S_{DPOF}=2\cdot2=4$, $S_{DCP}=1/2\cdot3\cdot2=3$

$S_{ABCD}=25-3-4-3-3-4-3=5$

Ответ: площадь четырехугольной фигуры равна 5.

Задача 5. Найти площадь заштрихованной фигуры.



Решение

Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$

$S_{OBA}= S_{OBC}= S_{OCD}= S_{ODA}$ а также $S_{OFE}= S_{OFK}= S_{ODL}= S_{ODE}$

S_{OFE}=1/2·OE·OF=1/2·9·9=40.5,

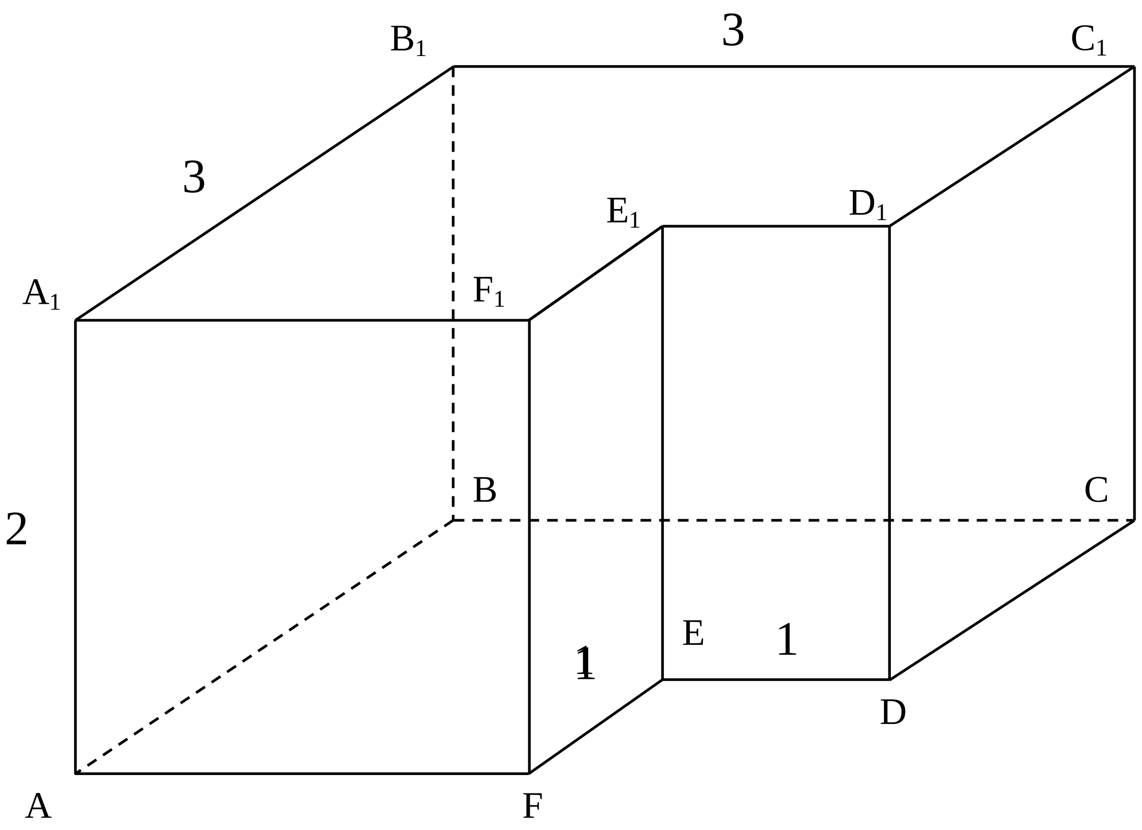
а также S_{OBA}=1/2·OB·OA=1/2·6·6=18 следовательно

$S_{BFEA}= S_{OFE}- S_{OBA}$=40.5-18=22.5

Таким образом площадь заштрихованной фигуры равна 22.5·4=90.

Ответ: площадь заштрихованной фигуры равна 90.

Задача 6. Найти площадь многогранника изображенного на рисунке.



Решение:

Площадь наружной поверхности многогранника состоит из 8 площадей четырехугольников.

Площадь четырехугольника $S_{BB_1C_1C}$ =$BB_1 \cdot B_1C_1$=3·2=6,

$S_{CC_1DD_1}$ =$DD_1 \cdot DC_1$=2·2=4, $S_{DD_1EE_1}$ = $DD_1 \cdot D_1E_1$=2·1=2,

$S_{FF_1EE_1}$ = $FF_1 \cdot F_1E_1$=2·1=2, $S_{AA_1FF_1}$ = $AA_1 \cdot A_1F_1$=2·2=4,

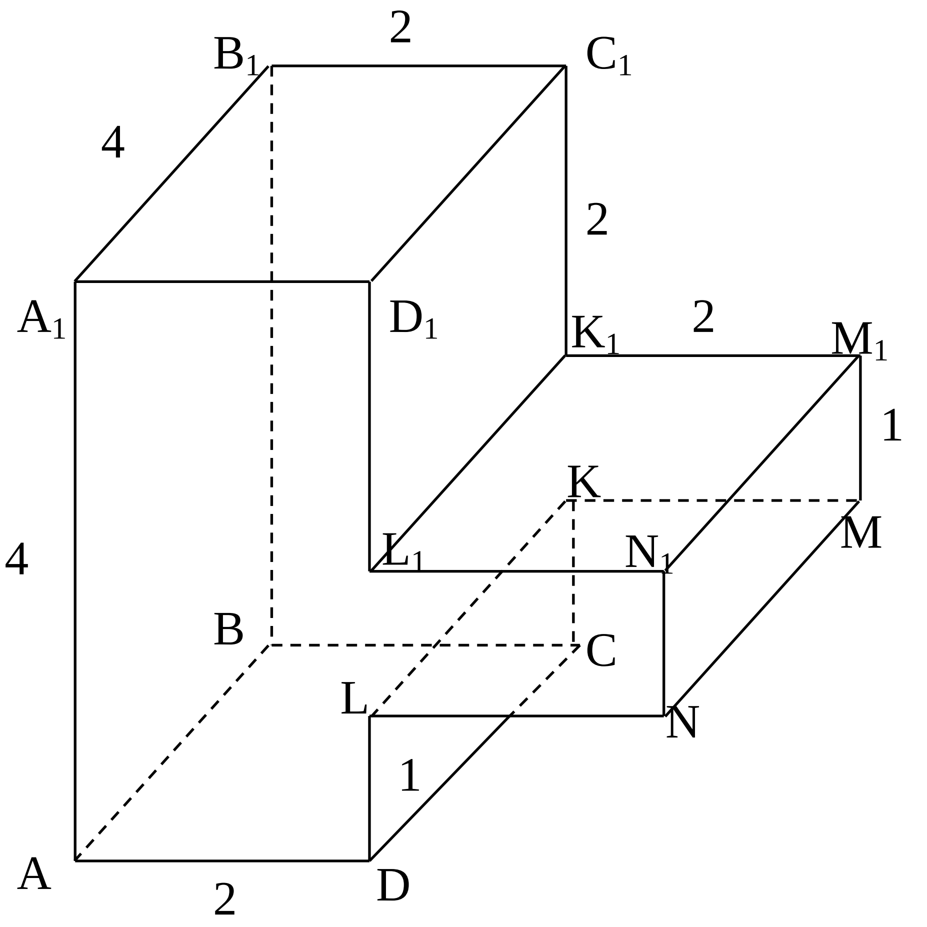
$S_{AA_1BB_1}$ = $AA_1 \cdot A_1B_1$=2·3=6,

$S_{ABCDEF} = S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}$ = AB·AF+ED·DC=3·2+1·2=8

S=6+4+2+2+4+6+8·2=40

Ответ: площадь многогранника равна 40.

Задача 7. Найти площадь многогранника изображенного на рисунке.



Решение:

Площадь наружной поверхности многогранника состоит из 12 площадей четырехугольников.

Площадь четырехугольника $S_{ABCD} = S_{A_1B_1C_1D_1}$ =AB·BC=2·4=8,

$S_{LKMN} = S_{L_1K_1M_1N_1}$ =LK·KM=2·4=8, $S_{AA_1B_1B}$ =AA_1·AB=4·4=16,

S_{BCLK} =DL·DC=1·4=4, $S_{L_1D_1C_1K_1}$ =L_1D_1·D_1C_1=2·4=8,

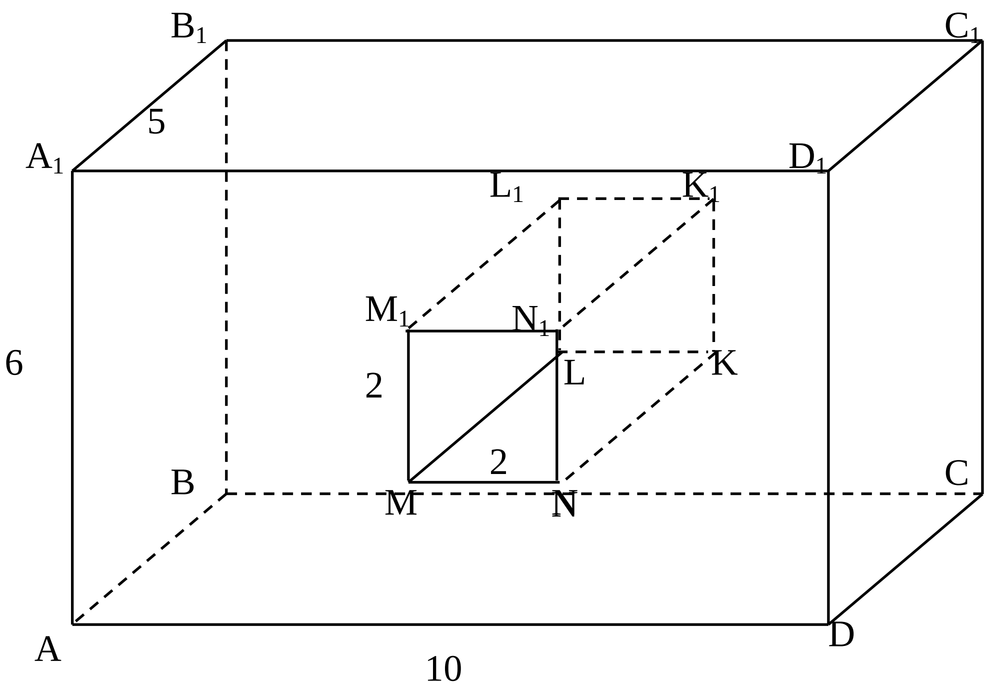
$S_{NN_1MM_1}$ =NN_1·N_1M_1=1·4=4,

$S_{AA_1D_1L_1N_1NLD} = S_{CBB_1C_1K_1M_1MK}$ =AD·AA_1+NL·LL_1=4·2+2·1=10

S=8+8+8+8+16+4+8+4+10+10=84

Ответ: площадь многогранника равна 84.

Задача 8. Найти площадь многогранника изображенного на рисунке.



Решение:

$S_{ABCD}=S_{A_1B_1C_1D_1}$ =AB·BC=10·5=50

$S_{ABA_1B_1}=S_{DCC_1D_1}$ =DC·DD_1=5·6=30

$S_{AA_1D_1DMNM_1N_1}=S_{AA_1D_1D}-S_{MNM_1N_1}$ =AD·AA_1-MN·MM_1=10·6-2·2=56

$S_{MNKL}=S_{M_1N_1K_1L_1}=S_{NKN_1K_1}=S_{MLM_1L_1}$ =MN·NK=2·5=10

Площадь многогранника =50+50+30+30+56+56+10·4=312

Ответ: площадь многогранника равна 312.

Заключение

Метод площадей сейчас особенно актуален в связи с введением геометрических задач в тестах на экзаменах. Изучение этой темы позволяет ученикам более успешно решать задачи даже второй части экзамена.

Решение планиметрических задач и стереометрических задач методом площадей и объемов отличаются лишь числом измерений, характеризующих фигуры, поэтому этот метод помогает также при изучении планиметрии, и нахождению объемов геометрических фигур.