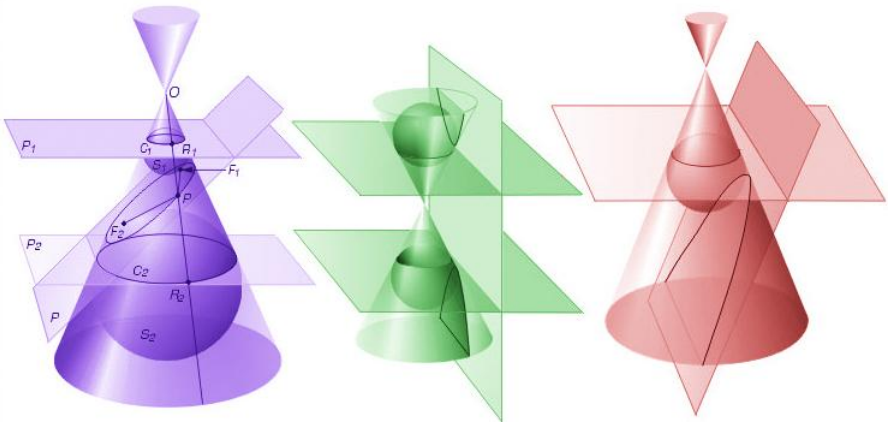


Морозов В. В.

Конические сечения и свойства их касательных



Москва
2014

*Конические сечения
и свойства их касательных*

Москва
2014

Автор **В. В. Морозов**, учитель информатики, Почетный работник
общего образования

В работе изучаются конические сечения – парабола, гипербола, окружность и эллипс – как огибающие семейства прямых. В связи с этим изучаются некоторые свойства конических сечений. В частности, в работе доказано, что точка пересечения высот треугольника является фокусом эллипса, вписанного в этот треугольник, другим фокусом является центр описанной окружности, а главная ось симметрии этого эллипса является прямой Эйлера для треугольника.

Работа интересна учителям математики и учащимся, осуществляющим исследовательскую деятельность по математике.

Морозов, В. В. Конические сечения и свойства их касательных / В. В. Морозов – Москва: ЧОУ "Школа "Ступени", 2014. – 28 с.

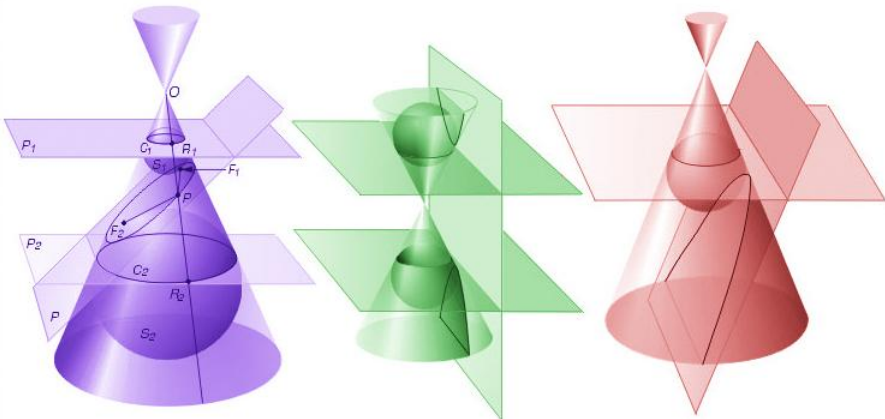
Содержание

Введение.	4
Парабола.	6
Гипербола.	16
Окружность.	19
Эллипс.	19
Заключение.	24
Библиография.	27
Компакт-диск с приложениями	28

Введение

Целью предлагаемой здесь работы является исследование параболы, гиперболы, окружности и эллипса как огибающих семейства прямых. В связи с этим удаётся получить интересные свойства касательных к этим кривым.

Аполлоний из Перги, древнегреческий геометр, живший в III веке до нашей эры, посвятил этим кривым огромный трактат. В своей книге «Конические сечения» он впервые показал, как можно получить все четыре кривые, включая и окружность, рассекая один и тот же конус плоскостью под разными углами. Если плоскость пересекает конус параллельно основанию, то получается окружность. Если плоскость немного наклонена, то получается эллипс. Чем сильнее наклоняется плоскость, тем больше вытягивается эллипс. Как только плоскость оказывается параллельной образующей, кривая перестаёт быть замкнутой и две ее ветви устремляются в бесконечность, образуя параболу. Дальнейший наклон плоскости приводит к тому, что она пересекает второй конус, имеющий с первым общую вершину. В этом случае два конических сечения представляют собой две ветви гиперболы. Форма ветвей меняется с изменением наклона плоскости до тех пор, пока они не вырождаются в прямые. Все четыре типа кривых (окружность, эллипс, парабола и гипербола) называются кривыми второго порядка, потому что в декартовых координатах они описываются уравнениями второго порядка с двумя переменными [1, 2].



Выбор темы не случаен. Конические сечения – парабола, гипербола, окружность, эллипс – широко встречаются и в природе, и в технике [9]. Небесные тела в космосе движутся по этим траекториям, тело, брошенное

под углом к горизонту, летит по параболе, верёвка или провод, подвешенные между двумя столбами, провисая, образуют параболу, и даже воздушные шары, наполненные гелием, связанные друг с другом и привязанные крайними шарами к опорам, также принимают форму параболы.

Геометрические свойства каждой из этих кривых подсказали человеку способы их использования [3]. Если поместить источник света в один из фокусов эллипса, то отражённый от стенок эллипса свет собирается в другом фокусе эллипса. Направляя ось параболической антенны в сторону слабого радиосигнала, с помощью параболы мы собираем слабую энергию сигнала в одну точку – фокус параболы. А направляя систему из двух зеркальных параболоидов с общим фокусом в тёмное небо, человек становится способным собрать слабый свет далёких звёзд в узкий пучок и увидеть звёзды, которые не видны даже в сильно приближающий телескоп.

Не менее восторженную песню можно спеть о гиперболе. Отражающая поверхность фар автомобилей, фонариков и прожекторов имеет форму гиперболы, чтобы равномерно рассеивать свет [9]. Гиперболу можно встретить и в архитектуре: доказано, что самые прочные сооружения имеют форму однополостного гиперболоида, (например первая в России телебашня). Даже кости животных и человека имеет форму однополостного гиперболоида, именно поэтому в состоянии выдерживать большие нагрузки. И, наконец, посмотрим на каблучки наших барышень – и там мы увидим самую прочную конструкцию – однополостный гиперболоид!

И стоит ли упоминать очевидное о том, какое место занимает обычная окружность в природе и вот уже несколько тысячелетий в жизни человека – шары встречаются повсюду в природе, круглые детали весьма часто встречаются в технике.

Конечно, замечательные свойства конических сечений известны давно, и подробно описаны в книгах по аналитической геометрии [7]. Мы же в предлагаемом здесь исследовании взялись подробно изучить у этих кривых свойства не столь очевидные, и не столь широко описанные в литературе. Оказывается, касательные каждого из конических сечений обладают интересными свойствами, которые в этой работе доказываются. Более того, нам удалось найти применение некоторых из обнаруженных нами свойств для практической жизни человека.

Конические сечения и свойства их касательных

В первой координатной четверти рассмотрим семейство прямых вида $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a + b = 1$, $a \in (0; 1)$.

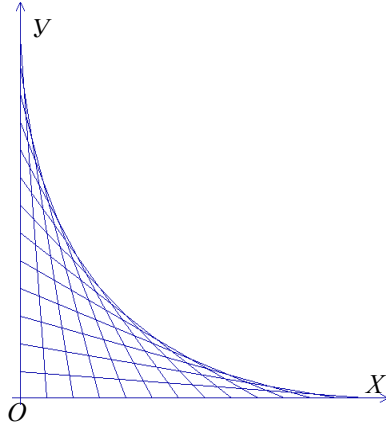


Рис. 1

На рисунке 1 построены прямые этого семейства, где $a \in (0; 1)$ с некоторым шагом h . Если шаг h сделать достаточно малым, то замечаем, что все прямые этого семейства касаются некоторой кривой линии (рис. 2).

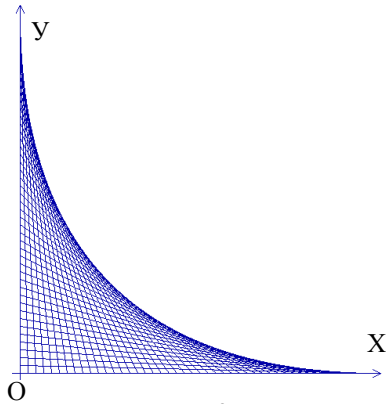


Рис. 2

Открываем математическую энциклопедию [8]: «Огибающая семейства линий на плоскости – линия, которая в каждой своей точке касается одной линии семейства».

Что за кривая линия является огибающей нашего семейства прямых? В [6] доказано, что огибающая семейства прямых

$$x = 0; y = 0; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a + b = \text{const}$, $a \neq 0, b \neq 0$

является параболой, ось которой лежит на биссектрисе первой координатной четверти. Более того, им удалось получить некоторые интересные свойства других конических сечений.

Рассмотрим параболу – график функции $y = ax^2$, где $a > 0$. Из каких точек плоскости можно провести две различные касательные к параболе? Очевидно, что из точки M_0 можно провести две различных касательных к параболе если и только если эта точка лежит ниже параболы, то есть координаты точки $M_0(x_0; y_0)$ удовлетворяют условию

$$y_0 < ax_0^2.$$

Выберем произвольную точку $M_0(x_0; y_0)$ плоскости, удовлетворяющую этому условию. Проведём через неё две прямые, касающиеся параболы в точках $M_1(x_{01}; y_{01})$ и $M_2(x_{02}; y_{02})$ (рис. 3).

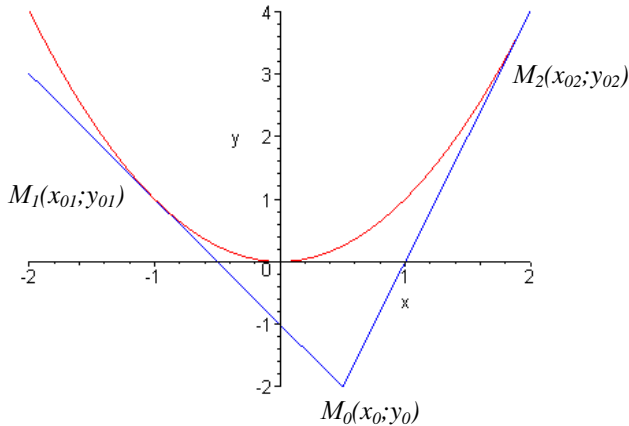


Рис. 3

Выберем на параболе произвольную точку P между M_1 и M_2 . Проведём через неё касательную к параболе. Пусть эта касательная

пересекает касательные M_0M_1 и M_0M_2 соответственно в точках B_1 и B_2 (рис. 4).

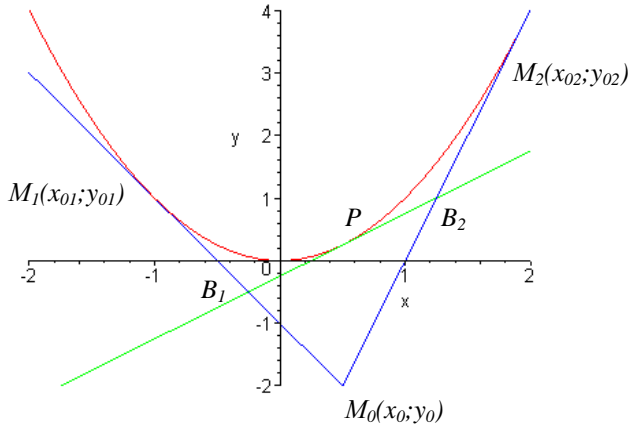


Рис. 4

Утверждение 1. При выполнении описанных выше условий имеет место следующее равенство: $\frac{M_0B_1}{M_0M_1} + \frac{M_0B_2}{M_0M_2} = 1$.

Сначала докажем лемму о пересечении двух касательных к параболе.

Лемма. Пусть две прямые, касающиеся параболы $y = ax^2$ в различных точках $A(x_a, y_a)$ и $B(x_b, y_b)$, пересекаются в точке $C(x_c, y_c)$. Тогда

$$x_c = \frac{x_a + x_b}{2}, \quad y_c = ax_a x_b.$$

Доказательство леммы. Уравнение касательной к параболе $y = ax^2$ в точке A имеет вид $y = ax_a^2 + 2ax_a(x - x_a)$, а после упрощения $y = 2ax_ax - ax_a^2$. Точно также уравнение касательной к параболе $y = ax^2$ в точке B имеет вид $y = 2ax_bx - ax_b^2$. Для поиска координат точки пересечения касательных решаем систему

$$\begin{cases} y = 2ax_ax - ax_a^2, \\ y = 2ax_bx - ax_b^2. \end{cases} \quad 2ax_ax - ax_a^2 = 2ax_bx - ax_b^2,$$

$$2ax(x_a - x_b) = a(x_a^2 - x_b^2).$$

Так как $x_a \neq x_b$ по условию, то $x_c = \frac{x_a + x_b}{2}$. Тогда

$$y_c = 2ax_a x_c - ax_a^2 = ax_a(2x_c - x_a) = ax_a(x_a + x_b - x_a) = ax_a x_b.$$

Итак, $x_c = \frac{x_a + x_b}{2}$, $y_c = ax_a x_b$. Лемма доказана.

Доказательство утверждения 1. Пусть прямые, касающиеся параболы в точках $M_1(x_{01}; y_{01})$ и $M_2(x_{02}; y_{02})$ пересекаются в точке $M_0(x_0; y_0)$. Тогда по доказанной выше лемме координаты этих трёх точек связаны соотношениями

$$x_0 = \frac{x_{01} + x_{02}}{2}, \quad y_0 = ax_{01}x_{02}.$$

Найдём квадраты расстояний от M_0 до M_1 и до M_2 .

$$x_0 - x_{01} = \frac{x_{01} + x_{02} - 2x_{01}}{2} = \frac{x_{02} - x_{01}}{2}.$$

$$y_0 - y_{01} = ax_{01}x_{02} - ax_{01}^2 = ax_{01}(x_{02} - x_{01}).$$

$$\begin{aligned} MM_1^2 &= (x_0 - x_{01})^2 + (y_0 - y_{01})^2 = \frac{(x_{02} - x_{01})^2}{4} + a^2 x_{01}^2 (x_{02} - x_{01})^2 = \\ &= (x_{02} - x_{01})^2 \left(\frac{1}{4} + a^2 x_{01}^2 \right). \end{aligned}$$

$$\text{Аналогично, } MM_2^2 = (x_{02} - x_{01})^2 \left(\frac{1}{4} + a^2 x_{02}^2 \right).$$

Через произвольную точку $P(p, ap^2)$ на параболе $y = ax^2$ между точками M_1 и M_2 проведём касательную, которая пересекает касательные M_0M_1 и M_0M_2 соответственно в точках B_1 и B_2 (рис. 4). По доказанной выше лемме получаем координаты точек B_1 и B_2 .

$$B_1 \left(\frac{p + x_{01}}{2}; apx_{01} \right), \quad B_2 \left(\frac{p + x_{02}}{2}; apx_{02} \right).$$

Найдём квадраты расстояний от M_0 до B_1 и до B_2 .

$$\begin{aligned} M_0 B_1^2 &= \left(\frac{2x_0 - p - x_{01}}{2} \right)^2 + a^2 (x_{01}x_{02} - px_{01})^2 = \\ &= \frac{(x_{02} - p)^2}{4} + a^2 x_{01}^2 (x_{02} - p)^2 = (x_{02} - p)^2 \left(\frac{1}{4} + a^2 x_{01}^2 \right). \end{aligned}$$

$$\text{Аналогично, } M_0 B_2^2 = (x_{01} - p)^2 \left(\frac{1}{4} + a^2 x_{02}^2 \right). \text{ Тогда}$$

$$\frac{M_0 B_1^2}{M_0 M_1^2} = \frac{(x_{02} - p)^2 \left(\frac{1}{4} + a^2 x_{01}^2 \right)}{(x_{01} - x_{02})^2 \left(\frac{1}{4} + a^2 x_{01}^2 \right)} = \frac{(x_{02} - p)^2}{(x_{01} - x_{02})^2}, \quad \frac{M_0 B_1}{M_0 M_1} = \frac{|x_{02} - p|}{|x_{02} - x_{01}|}.$$

Точно также $\frac{M_0 B_2}{M_0 M_1} = \frac{|x_{01} - p|}{|x_{02} - x_{01}|}$. Тогда

$$\frac{M_0 B_1}{M_0 M_1} + \frac{M_0 B_2}{M_0 M_2} = \frac{|x_{02} - p| + |x_{01} - p|}{|x_{02} - x_{01}|}.$$

Так как точка P на параболе лежит между точками M_1 и M_2 , то $|x_{02} - p| + |x_{01} - p| = |x_{02} - x_{01}|$, поэтому $\frac{M_0 B_1}{M_0 M_1} + \frac{M_0 B_2}{M_0 M_2} = 1$.

Утверждение 1 доказано.

Верно и **обратное утверждение**. Пусть прямые, касающиеся параболы $y = ax^2$ в точках M_1 и M_2 пересекаются в точке M_0 . Пусть на отрезках $M_0 M_1$ и $M_0 M_2$ выбраны точки B_1 и B_2 соответственно так, что $\frac{M_0 B_1}{M_0 M_1} + \frac{M_0 B_2}{M_0 M_2} = 1$. Тогда прямая $B_1 B_2$ касается этой параболы.

Действительно, если допустить противное, то на параболе между точками M_1 и M_2 существует точка P , в которой касательная параллельна $B_1 B_2$. Пусть эта касательная пересекает касательные $M_0 M_1$ и $M_0 M_2$ соответственно в точках C_1 и C_2 . Тогда по утверждению 1 $\frac{M_0 C_1}{M_0 M_1} + \frac{M_0 C_2}{M_0 M_2} = 1$. Причём, в силу подобия треугольников $M_0 B_1 B_2$ и $M_0 C_1 C_2$

либо одновременно $\frac{M_0 C_1}{M_0 M_1} > \frac{M_0 B_1}{M_0 M_2}$ и $\frac{M_0 C_2}{M_0 M_1} > \frac{M_0 B_2}{M_0 M_2}$, либо одновременно

$$\frac{M_0 C_1}{M_0 M_1} < \frac{M_0 B_1}{M_0 M_2} \quad \text{и} \quad \frac{M_0 C_2}{M_0 M_1} < \frac{M_0 B_2}{M_0 M_2}, \quad \text{а, следовательно,} \quad \frac{M_0 B_1}{M_0 M_1} + \frac{M_0 B_2}{M_0 M_2} \neq 1.$$

Полученное противоречие доказывает обратное утверждение.

Замечание. Нетрудно видеть, что в утверждении 1 можно позволить точке P быть на параболе не только между точками M_1 и M_2 . Если точка P левее точки M_1 , то $\frac{M_0 B_1}{M_0 M_1} - \frac{M_0 B_2}{M_0 M_2} = 1$.

Если точка P правее точки M_2 , то $-\frac{M_0 B_1}{M_0 M_1} + \frac{M_0 B_2}{M_0 M_2} = 1$.

Следствие 1. Если точка M_0 лежит на оси ординат, то $M_0B_1 + M_0B_2 = M_0M_1 = const$ (рис. 5).

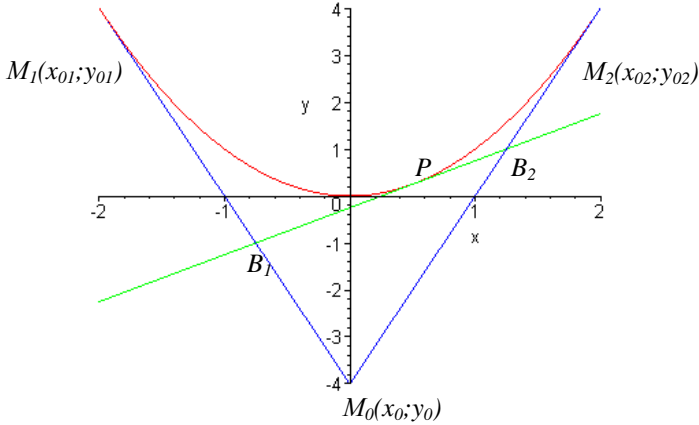


Рис. 5

Иными словами, если

$$M_0M_1 = M_0M_2,$$

то

$$M_0B_1 + M_0B_2 = M_0M_1 = const.$$

Вернёмся к нашему первому примеру. Если в первую координатную четверть вписана парабола, касающаяся осей OX и OY в точках $(c;0)$ и $(0;c)$, $c > 0$, и если прямая $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ касается параболы, то согласно утверждению

(1) $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1, a + b = c$. Таким образом, мы получили...

Следствие 2. Огибающей семейства прямых $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a + b = const$ является парабола.

Следствие 3. Пусть прямые, касающиеся параболы в точках M_1 и M_2 пересекаются в точке M_0 . Тогда средняя линия треугольника $M_1M_2M_0$, параллельная M_1M_2 , касается параболы (рис. 6).

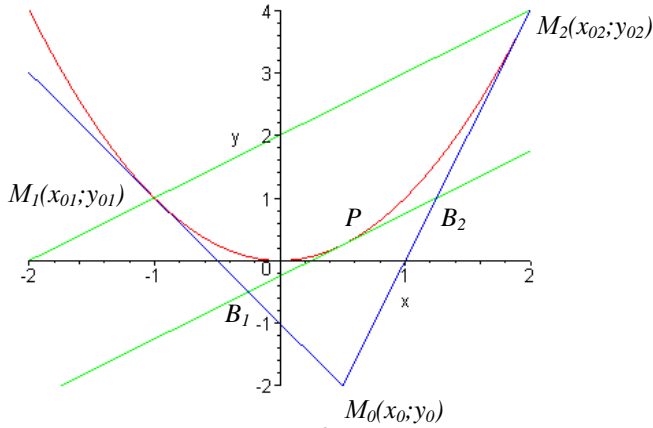


Рис. 6

Действительно, пусть B_1B_2 – средняя линия треугольника $M_1M_2M_0$. Тогда $\frac{M_0B_1}{M_0M_1} + \frac{M_0B_2}{M_0M_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Следовательно B_1B_2 касается параболы.

Далее, нетрудно убедиться, что уравнение прямой B_1B_2 имеет вид $y = 2ax_0x - ax_0^2$.

Найдём координаты точки касания прямой B_1B_2 и параболы, решая систему

$$\begin{cases} y = 2ax_0x - ax_0^2, \\ y = ax^2; \end{cases} \quad ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2 = 0; \quad a(x - x_0)^2 = 0.$$

Разумеется, последнее уравнение имеет единственное решение, а поэтому абсцисса P точки касания (см. рис. 6) та же, что и у точки M_0 , а поэтому прямая M_0P всегда параллельна оси ординат.

Теперь легко получаем координаты не только точек B_1 и B_2 , но и точки касания P :

$$B_1\left(\frac{x_0 + x_{01}}{2}, \frac{y_0 + y_{01}}{2}\right), \quad B_2\left(\frac{x_0 + x_{02}}{2}, \frac{y_0 + y_{02}}{2}\right), \quad P(x_0; ax_0^2).$$

Нетрудно убедиться, что абсцисса точки P равна среднему арифметическому абсцисс точек B_1 и B_2 . Убедимся также, что ордината точки P равна среднему арифметическому ординат точек B_1 и B_2 . Действительно, используя лемму, получаем.

$$\begin{aligned} \frac{2y_0 + y_{01} + y_{02}}{4} &= \frac{y_0}{2} + \frac{ax_{01}^2 + ax_{02}^2}{4} = \frac{y_0}{2} + \frac{a(x_{01} + x_{02})^2 - 2ax_{01}x_{02}}{4} = \\ &= \frac{y_0}{2} + \frac{4ax_0^2}{4} - \frac{y_0}{2} = ax_0^2. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили...

Следствие 4. Пусть прямые, касающиеся параболы в точках M_1 и M_2 пересекаются в точке M_0 . Тогда средняя линия B_1B_2 треугольника $M_1M_2M_0$, параллельная M_1M_2 , касается параболы в точке P – середине средней линии B_1B_2 , причём прямая M_0P является медианой треугольника $M_1M_2M_0$ и параллельна оси ординат (рис. 7).

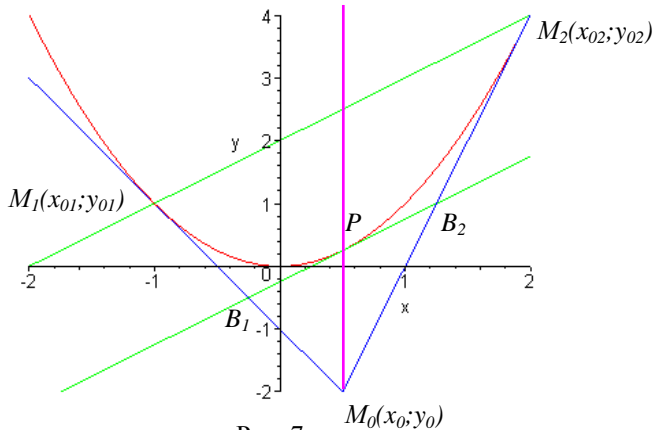


Рис. 7

Следствие 5. В данный неразвёрнутый угол можно вписать единственную параболу, касающуюся сторон угла в двух данных (отличных от вершины) точках.

Действительно, пусть дан угол с вершиной M_0 и точки M_1 и M_2 на сторонах угла. У треугольника $M_1M_2M_0$ построим среднюю линию и отметим её середину P . Для треугольников M_1B_1P и M_2B_2P проделаем то же самое. Этот процесс продолжаем бесконечно. К семейству полученных средних линий добавим ещё пару сторон данного угла. Это семейство – семейство огибающих дуги параболы, касающейся сторон угла в двух данных точках. Единственность параболы вытекает из известного утверждения, что через три точки плоскости, не лежащие на одной прямой проходит единственная парабола. Заодно мы получили интересный способ построения параболы.

Приложения математики весьма разнообразны [4]. Интересно отметить, что следствие 3 (о средней линии треугольника, описанного около параболы) можно изящно использовать для решения одной задачи прикладного характера. Задача эта была поставлена перед математиками НИИ прикладной математики и механики при Томском Государственном университете в 1990 г. Речь в задаче шла о секретном военном проекте, поэтому многие детали в задаче формулировались довольно туманно.

Задача. Некоторая часть космического летательного аппарата имеет форму кругового параболоида. Независимо от этого. Это может быть антенна, или часть поверхности топливного бака. Во время полёта эта поверхность равномерно обгорает или, напротив, покрывается равномерным слоем льда. Останется ли параболоид после обгорания или обледенения параболоидом, в частности, сохранится ли оптическое свойство параболоида фокусировать отражённые лучи в одной точке – фокусе. Иными словами, останется ли парабола параболой после покраски внутри или снаружи равномерным слоем краски?

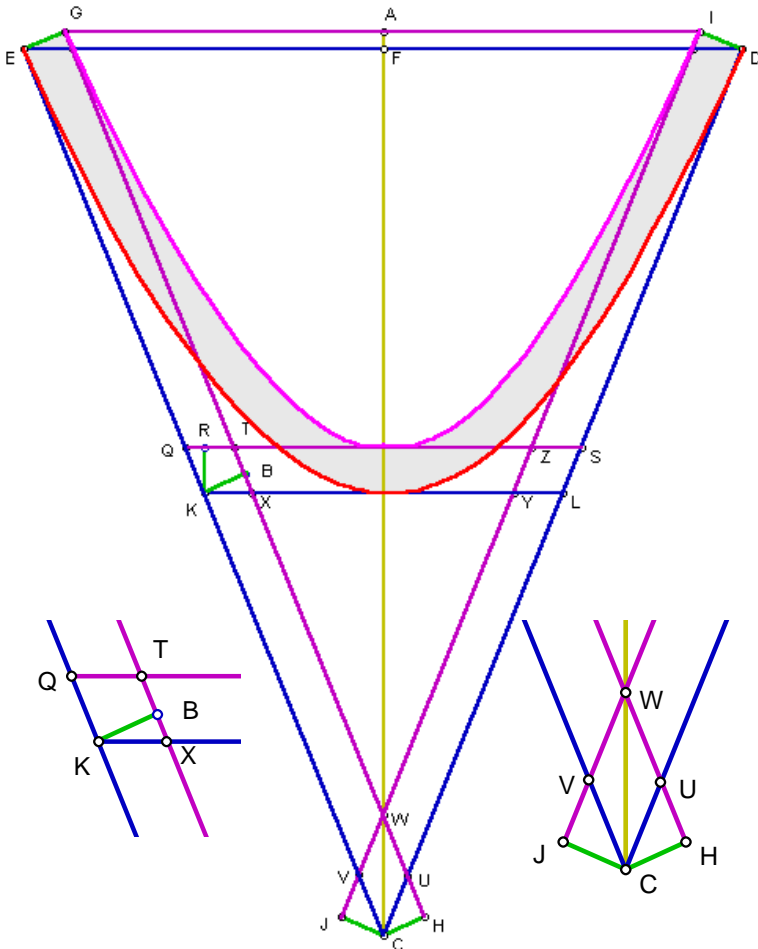


Рис. 8

Оказывается, ответ на этот вопрос отрицательный: парабола после равномерного обгорания или обледенения перестаёт быть параболой.

Доказательство. Допустим противное: пусть парабола ED после обледенения внутри равномерным слоем льда толщины $EG=h>0$ превращается в параболу GI (рис. 8).

Тогда, по следствию 3 о средней линии треугольника, описанного около параболы, отрезок KL – средняя линия треугольника ECD , отрезок TZ – средняя линия треугольника GWI .

$$EC=GH=GW+WH.$$

Делим предыдущее соотношение на 2:

$$EK=GB=GT+\frac{1}{2}WH=GT+TB,$$

$$WH=2TB \quad (2).$$

Угол между осью CA параболы и касательной CD обозначим β . Тогда

$$WH=hctg\beta, \quad TB=TX-BX=\frac{h}{\cos\beta}-hctg\beta.$$

Подставляем полученный результат в (2):

$$hctg\beta = 2h\left(\frac{1}{\cos\beta} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right),$$

$$\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{2}{\cos\beta}(1 - \sin\beta),$$

$$\cos^2\beta = 2\sin\beta - 2\sin^2\beta, \quad \sin^2\beta - 2\sin\beta + 1 = 0, \quad (\sin\beta - 1)^2 = 0, \quad \sin\beta = 1.$$

Но $\beta = \frac{\pi}{2}$ не удовлетворяет области допустимых значений. Таким

образом, при любом значении угла между касательными CE и CD отрезок касательной TZ к обледеневшей параболе не является средней линией треугольника GWI , а, следовательно, парабола после обледенения или обгорания не является параболой.

Таким образом, мы получили...

Следствие 6. Параболическая поверхность после обгорания, обледенения или покраски даже на ничтожно малый слой теряет свойства фокусировать отражённые лучи в одной точке.

Замечание. Покраска параболической антенны тонким слоем краски едва ли сильно повлияет на изменение её оптических свойств, но обледенение спутниковой параболической антенны может существенно изменить характеристики приёма или передачи сигнала.

Итак, мы рассмотрели свойство касательных к параболе и получили семейство прямых, огибающей которых является парабола. Возникает вопрос: можно ли доказать похожие свойства для других конических сечений: гиперболы, эллипса, окружности?

В первой координатной четверти рассмотрим гиперболу $y = \frac{1}{x}$. Построим касательную к гиперболе в некоторой точке $(x_0; y_0)$ и найдём длины отрезков, отсекаемых касательной от осей координат (рис. 9).

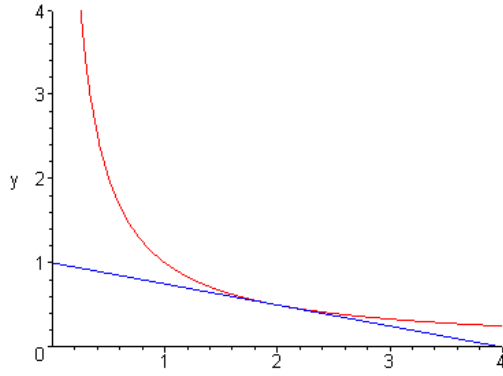


Рис. 9

Уравнение касательной к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ имеет вид $y = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$, а после упрощения $y = \frac{2}{x_0} - \frac{x}{x_0^2}$. Тогда длины отрезков, отсекаемых касательной от асимптот гиперболы равны $\frac{2}{x_0}$ и $2x_0$. Замечаем, что произведение длин этих отрезков не зависит от выбора точки касания: $\frac{2}{x_0} \cdot 2x_0 = 4$.

Таким образом, огибающей семейства прямых $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $ab = 4$, $a \in (0; +\infty)$ является гипербола, уравнение которой $y = \frac{1}{x}$.

Можно получить общий результат о касательных к гиперболе.

Утверждение 2. Касательная к гиперболе в произвольной точке отсекает от асимптот отрезки, произведение которых постоянно и не зависит от выбора точки касания.

Доказательство. Рассмотрим гиперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Асимптоты этой гиперболы – прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$. Получим уравнение верхней ветви гиперболы:

$$y^2 = b^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right),$$

$$y = b \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}},$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Найдём уравнение касательной к верхней ветви гиперболы.

$$y'(x_0) = \frac{bx_0}{a\sqrt{a^2 + x_0^2}},$$

$$y(x_0) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + x_0^2}.$$

Уравнение касательной имеет вид

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 + x_0^2} + \frac{bx_0}{a\sqrt{a^2 + x_0^2}}(x - x_0).$$

Найдём координаты абсциссы точек пересечения касательной к гиперболе и её асимптотами $y = \pm \frac{b}{a}x$ (рис. 10).

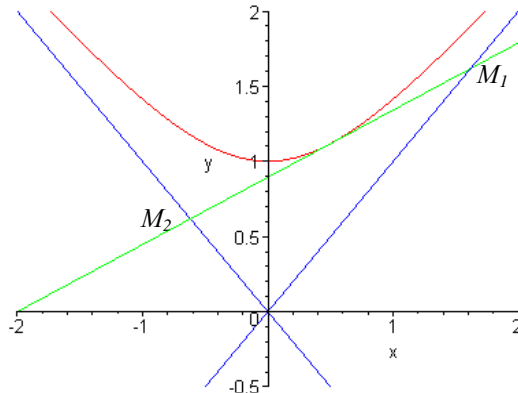


Рис. 10

$$\frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + x_0^2} + \frac{bx_0}{a\sqrt{a^2 + x_0^2}}(x - x_0),$$

$$x = \sqrt{a^2 + x_0^2} + \frac{x_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}(x - x_0),$$

$$x = \sqrt{a^2 + x_0^2} + \frac{x_0x}{\sqrt{a^2 + x_0^2}} - \frac{x_0^2}{\sqrt{a^2 + x_0^2}},$$

$$x \left(1 - \frac{x_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}} \right) = \sqrt{a^2 + x_0^2} - \frac{x_0^2}{\sqrt{a^2 + x_0^2}},$$

$$x \left(1 - \frac{x_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}} \right) = \frac{a^2 + x_0^2 - x_0^2}{\sqrt{a^2 + x_0^2}},$$

$$x \left(\frac{\sqrt{a^2 + x_0^2} - x_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}} \right) = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}.$$

Так как $a > 0$, то $\frac{\sqrt{a^2 + x_0^2} - x_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}} \neq 0$ и $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x_0^2}} : \frac{\sqrt{a^2 + x_0^2} - x_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}$,

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x_0^2} - x_0}.$$

Координаты точки $M_1(x_1; y_1)$ пересечения касательной к гиперболе и асимптоты:

$$x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x_0^2} - x_0},$$

$$y_1 = \frac{b}{a}x_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + x_0^2} - x_0};$$

$$M_1 \left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x_0^2} - x_0}; \frac{ab}{\sqrt{a^2 + x_0^2} - x_0} \right).$$

Точно также получаем координаты точки M_2 .

$$M_2 \left(-\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x_0^2} + x_0}; \frac{ab}{\sqrt{a^2 + x_0^2} + x_0} \right).$$

Тогда

$$OM_1^2 = \frac{a^2(a^2 + b^2)}{(\sqrt{a^2 + x_0^2} - x_0)^2}; \quad OM_2^2 = \frac{a^2(a^2 + b^2)}{(\sqrt{a^2 + x_0^2} + x_0)^2}.$$

И, наконец, получаем:

$$OM_1 \cdot OM_2 = \frac{a^2(a^2 + b^2)}{a^2 + x_0^2 - x_0^2} = a^2 + b^2 = const.$$

Утверждение 2 доказано.

Таким образом, для гиперболы площадь треугольника, ограниченного асимптотами и касательной постоянна.

Для окружности аналогичное свойство получить и вовсе просто. Из точки M проведём пару прямых, касающихся окружности в точках A и B , которые разбивают окружность на две дуги. На меньшей из этих дуг выберем произвольную точку E и проведём через неё касательную, которая пересекает касательные MA и MB в точках C и D соответственно (рис. 11).

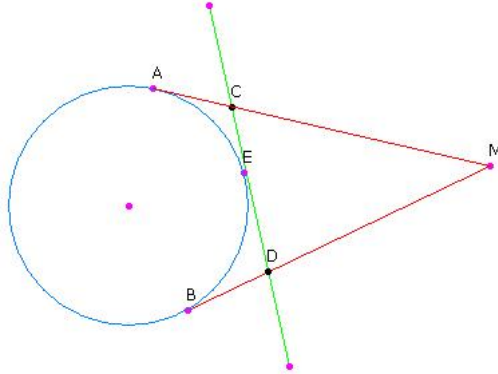


Рис. 11

Утверждение 3. Периметр треугольника MCD постоянен и не зависит от выбора точки касания E .

Действительно, легко видеть, что $CA = CE$, $DB = DE$, поэтому периметр треугольника MCD равен

$$\begin{aligned} P_{MCD} &= MC + CE + ED + DM = MC + CA + BD + DM = \\ &= AM + BM = 2AM = const. \end{aligned}$$

Касательные к эллипсу, другому коническому сечению, также обладают интересным свойством. Мартин Гарднер в [2] показывает

любопытный способ построения эллипса. Вырежем из бумаги большой круг и в любом его месте, поставим точку. Сложим круг так, чтобы эта точка оказалась под любой точкой окружности на краю диска. Разогнём листок и снова согнём, прикрыв точку уже другим местом на окружности. Сделаем так несколько раз, пока вся бумага не покроется сгибами, которые образуют семейство касательных к эллипсу (рис 12).

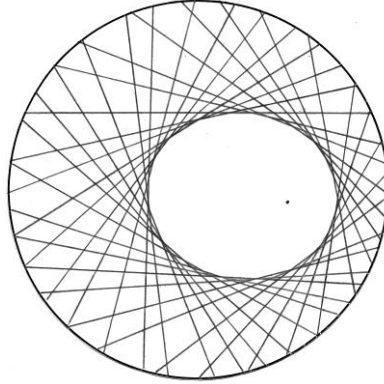


Рис. 12

Утверждение 4. Каждая линия сгиба при описанной выше процедуре касается эллипса с фокусами в выбранной точке P и центре окружности O .

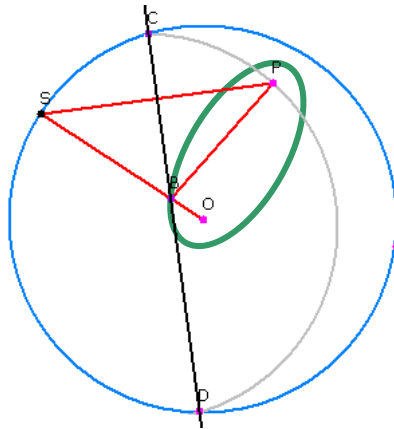


Рис. 13

Доказательство. Пусть точка P – любая точка круга, не являющаяся его центром O (рис. 13). Мы сгибаем круг так, чтобы совместить точку P с какой-нибудь точкой окружности S . При этом линией сгиба должна быть прямая DB , которая перпендикулярна PS и делит отрезок PS пополам. Отсюда следует, что BS и BP равны, а поэтому $OB+BP=OB+BS$ постоянно и равно радиусу окружности. Отрезок $OB+BS$ представляет собой сумму расстояний от точки B до фиксированных точек P и O , поэтому геометрическим местом точек B (движущихся при перемещении точки S по окружности) является эллипс с фокусами в точках P и O .

Линия сгиба DC является касательной к эллипсу в точке B , потому что она образует равные углы с прямыми, проведенными из фокусов в точку B , поскольку угол PBC равен углу SBC , который в свою очередь равен углу OBD . Линии сгиба всегда касаются эллипса, поэтому эллипс является огибающей семейства линий сгиба. Утверждение доказано.

Нетрудно убедиться, что большая ось полученного таким способом эллипса равна радиусу данной окружности.

Утверждение 5. Точка пересечения высот остроугольного треугольника является фокусом вписанного в этот треугольник эллипса.

Лемма. Точки, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно его сторон, лежат на описанной около этого треугольника окружности (рис. 14).

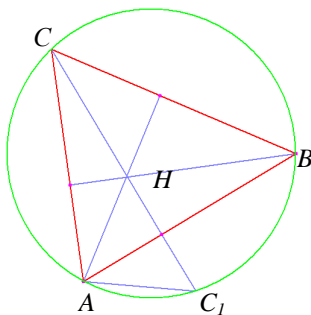


Рис. 14

Доказательство леммы. Пусть A_1 , B_1 и C_1 – точки, симметричные точке пересечения высот треугольника H относительно сторон BC , CA и AB соответственно. Так как $AB \perp CH$ и $BC \perp AH$, то углы между прямыми AB и BC и угол между прямыми CH и HA равны. $\angle ABC = \angle C_1HA$, а так как треугольник AC_1H равнобедренный, то $\angle C_1HA = \angle AC_1C$. Следовательно, $\angle ABC = \angle AC_1C$, опираются эти углы на одну и ту же дугу AC . Значит,

точка C_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC . Аналогично доказывается, что точки A_1 и B_1 лежат на этой окружности. Лемма доказана.

Следствие. Образы окружности при осевой симметрии относительно сторон вписанного в эту окружность треугольника пересекаются в точке пересечения высот треугольника.

Иными словами, если перегнуть круг по сторонам вписанного треугольника, то все три получившиеся дуги пересекаются в одной точке – точке пересечения высот треугольника.

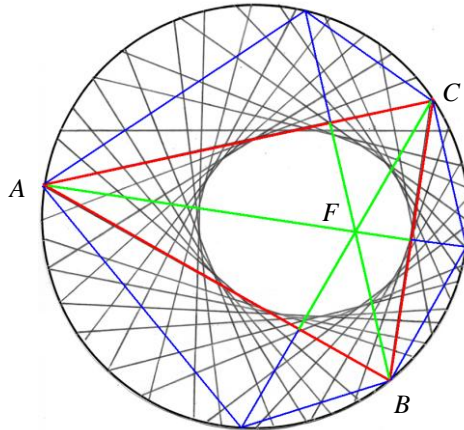


Рис. 15

Теперь докажем утверждение 5.

Пусть дан эллипс, обозначим его фокусы O и F . Строим окружность с центром в одном из его фокусов O радиусом, равным его большой полуоси. Таким образом, эта окружность обладает следующим свойством: если перегнуть полученный таким образом круг по касательной к эллипсу, то точка окружности попадает на фокус F .

Из любой точки A на окружности строим 2 касательных к эллипсу. По построению при перегибе круга по этим касательным точки на окружности попадают на фокус F . Эти касательные пересекают окружность в двух других точках B и C , однозначно определяя треугольник ABC , вписанный в окружность (рис. 15).

Как доказано выше, точка F пересечения высот этого треугольника также переходит на окружность.

Но эта же точка F – переходит на окружность при симметрии относительно третьей стороны. Следовательно, третья сторона треугольника – касается эллипса.

Таким образом, точка пересечения высот треугольника является фокусом некоторого вписанного в этот треугольник эллипса. Утверждение доказано.

Теорема Эйлера. Во всяком треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот (или их продолжений) и точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника лежат на одной прямой, которая называется прямой Эйлера.

Таким образом, прямая Эйлера остроугольного треугольника является осью симметрии вписанного в этот треугольник эллипса, и точка пересечения медиан треугольника также лежит на оси вписанного в треугольник эллипса.

Кстати, известно, что радиус окружности Эйлера (она известна ещё как окружность 9 точек) равен половине радиуса описанной окружности, а центр окружности Эйлера является серединой отрезка, соединяющего ортоцентр с центром описанной окружности. Таким образом, центр нашего эллипса (середины отрезка между фокусами) является центром окружности Эйлера, в которую вписан эллипс.

Во всех полученных утверждениях усматривается нечто общее:

- для параболы постоянна сумма боковых сторон треугольника, ограниченного тремя касательными, две из которых проведены из точки на оси параболы (рис. 5);
- для гиперболы постоянна площадь треугольника, ограниченного асимптотами и касательной (рис. 10);
- для окружности постоянна периметр треугольника, ограниченного касательными (рис. 10);
- эллипс является огибающей семейства треугольников, вписанных в одну и ту же окружность с центром в одном фокусе эллипса, а точки пересечения высот каждого из этих треугольников – второй фокус эллипса, центр этого эллипса – центр окружности Эйлера каждого из этих треугольников; у каждого из этих треугольников одни и те же прямая Эйлера и окружность Эйлера (рис. 15).

Заключение

Итак, в этой работе мы получили описание каждого конического сечения – параболы, гиперболы, окружности, эллипса – как огибающей семейства прямых. Описание каждого семейства прямых показало не только отличительные черты, инварианты каждого вида конических сечений, но и нечто общее, что объединяет все конические сечения.

Как проходило наше исследование? Не всё получалось сразу и легко. Изучение кривых на рисунках 1 и 2 помогло нам сначала убедиться, что для параболы сумма длин отрезков касательных постоянна (рис. 5, следствие 1). Потом мы предположили, что это же соотношение выполняется и для ситуаций, как на рисунке 4. Для проверки этой гипотезы мы воспользовались электронными таблицами Excel, и убедились, что в общем случае гипотеза не верна, сумма отрезков касательных не постоянна. Тогда мы предположили, что нужно рассматривать не сумму отрезков касательных, а сумму их отношений, проверили эту гипотезу в программе Excel, и убедились, что сумма отношений отрезков касательных всегда равна 1, не зависимо от выбора параболы и точек касания (рис. 4):

$$\frac{M_0B_1}{M_0M_1} + \frac{M_0B_2}{M_0M_2} = 1.$$

Теорема получилась ничуть не слабее теоремы Чевы.

Используя средства дифференциального исчисления, мы доказали это равенство (утверждение 1), а затем получили ряд интересных следствий как частные случаи утверждения 1. В частности, получили графический способ построения параболы, вписанной в данный неразвёрнутый угол и касающейся данных точек на сторонах угла (следствие 5), и этот способ можно применять в черчении. А другое следствие (следствие 3) помогло решить серьёзную прикладную задачу из области космической техники, задачу, над которой всего несколько лет назад работали настоящие математики в настоящем НИИ!

Справедливости ради стоит отметить, что эту задачу об обледенении или обгорании параболы удаётся решить и с помощью интерполяционных многочленов, разумеется, приходим к тому же результату. Но в рамках настоящего исследования мы не использовали интерполяционные многочлены.

Исследование было бы неполным и однобоким, если бы мы не получили аналогичные свойства для гиперболы и эллипса. Для изучения свойств касательных к гиперболе мы также применяли средства дифференциального исчисления. А для окружности получить аналогичное свойство было и вовсе просто.

Труднее всего было исследовать свойства эллипса, ведь записать уравнения касательных к эллипсу, найти точки пересечения касательных, найти расстояния между этими точками обещало столь сложные и громоздкие выкладки, что даже сформулировать гипотезу для эллипса было трудно, а доказать ещё сложнее.

Помог знаменитый популяризатор математики Мартин Гарднер, показав в [2] способ построения эллипса как огибающей семейства прямых (рис. 12). Также в [2] было доказано утверждение 4. Все остальные результаты об эллипсах мы получили самостоятельно. В том числе, мы самостоятельно получили самый красивый результат во всей работе: эллипс является огибающей семейства треугольников, вписанных в окружность с центром в одном фокусе эллипса, а точки пересечения высот каждого из этих треугольников – второй фокус эллипса.

Было приятно увидеть, что наше исследование об эллипсе соприкоснулось, именно не совпало, а соприкоснулось с работами выдающегося математика Леонарда Эйлера.

Что же в этой работе сделано самостоятельно? Как писал Исаак Ньютон, он «... не получил бы столь выдающихся результатов, если бы не стоял на плечах гигантов». И мы можем подписаться под этими словами, ведь в науке так всегда. Конечно, скорее всего, ничего нового мы не открыли, и эти результаты кем-то получены и давно известны. Но рассматриваемые в этой работе свойства конических сечений столь необычны, что найти их описание в литературе довольно сложно, особенно вдали от крупных городов и университетских библиотек. Удавалось найти только лёгкие упоминания. Например, в [5] утверждается, что огибающая семейства прямых как на рисунках 1 и 2 – парабола, но этот факт там не доказывается, и все утверждения о параболе и гиперболы мы доказывали и получали самостоятельно. При исследовании эллипса вы воспользовались некоторыми результатами в [2].

В описанном здесь исследовании мы активно использовали компьютер (см. приложение на компакт-диске). Для проверки гипотез мы использовали программу Excel. Модели параболы как огибающей семейства прямых (рис. 1 и 2) мы строили в языке программирования Pascal и в программе Maple. Все остальные чертежи и иллюстрации к работе мы строили в программе Maple и в программах серии «Математика 5-11. Практикум» от компаний «1С».

Подвижную модель эллипса как огибающей семейства треугольников, вписанных в одну и ту же окружность и имеющих одну и ту же точку пересечения высот мы построили в среде программирования Delphi.

Хотя в предлагаемой работе исследование проведено довольно полно, некоторые вопросы пока ждут ответа: какими ещё необычными

свойствами обладают конические сечения, что происходит с гиперболой и эллипсом после обгорания или обледенения, слоем какой толщины h допустимо покрыть параболу, чтобы отражённые лучи по-прежнему собирались на принимающей антенне размером d ? Но это вопросы уже для другого исследования...

Библиография

1. Битюцков, В. И. Коническое сечение [Текст] / В. И. Битюцков // Математический энциклопедический словарь. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – С. 283-284.
2. Гарднер М. Эллипс. А так ли хорошо вы его знаете? [Электронный ресурс] / Мартин Гарднер. – Популярная математика. – <http://dondublon.chat.ru/Math/Gardner/ellipse/ellipse.htm>. (2004).
3. Дорфман, А. Г. Оптика конических сечений. [Текст] / А. Г. Дорфман. – М.: Физматгиз, 1950. – 32 с.
4. Колмогоров, А. Н. Математика [Текст] / А. Н. Колмогоров // Математический энциклопедический словарь. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – С. 7.
5. Лагерь, А. И. Лекальные кривые [Электронный ресурс] / А. И. Лагерь. – Инженерная графика. – <http://litera2005.narod.ru/index.files/Documents/drawings/Glava3/Index9.htm>. (1995).
6. Морозов, В. В. Конические сечения и свойства их касательных [Электронный ресурс] / В. В. Морозов. – Кемеровский областной ресурсный центр. Кемеровский Государственный университет. – <http://ггс.kemsu.ru/res/res.htm?id=993>. (2005).
7. Привалов, И. И. Аналитическая геометрия. [Текст] / И. И. Привалов. – М.: Лань, 2004. – 254 с.
8. Прохоров, Ю. В. Огибающая [Текст] / Ю. В. Прохоров // Математический энциклопедический словарь. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – С. 428-429.
9. Семёнов, В. И. Функции в практической математике: Учебное пособие. [Текст] / В. И. Семёнов. – Кемерово: КРИПО, 2003. – 113 с.