### [1], вариант 10

Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 9$, $BC = CD = 11$, $AD = 15$ и диагональю $AC = 16$.

($a$) Докажите, что около него можно описать окружность.

($b$) Найдите диагональ $BD$.

Поскольку никаких особенностей, которые можно было учесть при построении чертежа, в условии нет, изобразим выпуклый четырехугольник, постаравшись соблюсти пропорции по длинам сторон (рис. 1).

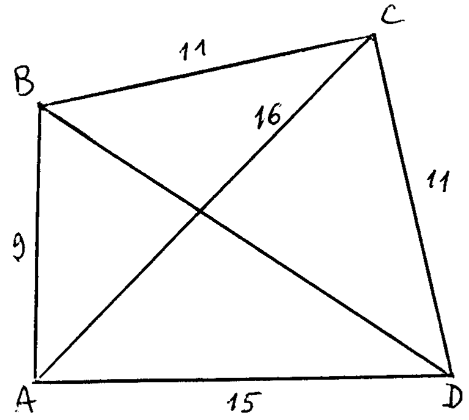


Рис. 1.

Для доказательства возможности описать около $ABCD$ окружность воспользуемся соответствующим критерием, согласно которому около выпуклого четырехугольника можно описать окружность в том и только в том случае, если сумма его противоположных углов равна $180°$. В условиях задачи легко выразить косинусы углов $B$ и $D$ и, например, проверить, что в сумме они дадут нуль: в таком случае $\angle B + \angle D = 180°$. По теореме косинусов, примененной к треугольникам $ABC$ и $ACD$, выражая $AC^2$, имеем

$$256 = 81 + 121 - 2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \cos\angle B,$$

$$256 = 225 + 121 - 2 \cdot 15 \cdot 11 \cdot \cos\angle D.$$

Умножив первое равенство на 15, а второе на 9 и результаты сложив, легко получить, что $\cos\angle B + \cos\angle D = 0$, что и требовалось.

Займемся поиском $BD$. Откуда найти отрезок? — Из треугольника. Из какого? — В котором он является стороной. У нас $BD$ — сторона, например, треугольника $BCD$. В нем известна длина сторон

$BC$ и $CD$ и достаточно найти угол $C$. Введем для краткости обозначения: $\angle ACB = \alpha$, $\angle ACD = \beta$. Для нахождения $BD$ достаточно найти $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, стало быть, займемся вычислением требуемых значений синусов и косинусов углов $\alpha$, $\beta$. Из треугольников $ACD$, $ABC$ соответственно имеем

$$225 = 256 + 121 - 2\cdot 16\cdot 11\cdot\cos\beta,$$

откуда $\cos\beta = \dfrac{19}{44}$, $\sin\beta = \dfrac{15\sqrt{7}}{44}$ и

$$81 = 256 + 121 - 2\cdot 16\cdot 11\cdot\cos\alpha,$$

откуда $\cos\alpha = \dfrac{37}{44}$, $\sin\alpha = \dfrac{9\sqrt{7}}{44}$.

Найдем

$$cos(\alpha+\beta) = \frac{37\cdot 19}{44^2} - \frac{15\sqrt{7}\cdot 9\sqrt{7}}{44^2} = -\frac{1}{8}.$$

В итоге имеем

$$BD^2 = 121 + 121 + 2\cdot 11\cdot 11\cdot\frac{1}{8} = \left(\frac{33}{2}\right)^2$$

и $BD = \dfrac{33}{2}$.