[1], вариант 6

Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

(a) Докажите, что $AD \parallel BC$.

(b) Найдите площадь треугольника DKC, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 9.

Как обработать особенность, заключающуюся в касании окружностей? Можно провести отрезок, соединяющий центры окружностей, но у нас никаких сведений насчет центров нет, и от этого шага пока воздержимся. А можно провести общую касательную и отрабатывать равенства соответствующих отрезков и углов. Судя по тому, что надо доказать, скорее всего, надо будет проследить за равными углами.

Изобразим касающиеся окружности, их общую касательную и проведем через точку K общую касательную к окружностям до пересечения с AB в точке E. Тогда $AE = KE = BE$, так что треугольники AEK и BEK равнобедренные. Обозначим через α и β углы при их основаниях (рис. 1). Собирая в треугольнике ABK сумму углов, приходим к равенству $2(\alpha + \beta) = 180°$, откуда $\alpha + \beta = 90°$.

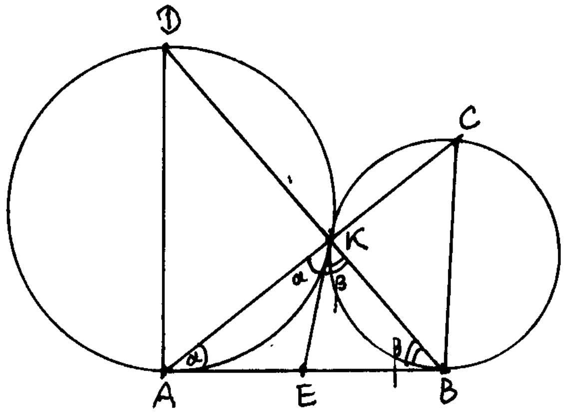

Рис. 1.

Далее, в правой окружности угол BCK вписанный, опирающийся на дугу BK которая стягивается хордой BK, значит, его мера такая же, как и угла между хордой BK и касательной EB, т. е. $\angle BCK = \beta$. Отсюда вытекает, что угол CBE прямой. Аналогично можно показать, что угол ADE тоже прямой. Следовательно, $AD \parallel BC$ как перпендикуляры к одной прямой. В частности, эти отрезки суть диаметры.

Для нахождения площади треугольника DKC найдем его стороны CK и DK. Заметим, что так как угол AKB равен $\alpha+\beta$, он прямой и тем самым треугольник CKD прямоугольный. Введем обозначения: пусть $CK = 4x$, $BK = 4y$. Тогда ввиду легко доказываемого подобия $\triangle BCK \sim \triangle DAK$ с коэффициентом $4 : 9$ имеем $AK = 9x$, $DK = 9y$. Из трапеции $ABCD$ нетрудно найти, что $AB = 12$. По теореме Пифагора, примененной к треугольникам BCK и ABK, имеем

$$x^2 + y^2 = 4, \quad 81x^2 + 16y^2 = 144.$$

Из этой системы получаем, что

$$x = \frac{4}{\sqrt{13}}, \quad y = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Тогда для площади треугольника CDK имеем выражение $\frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 9y = \frac{423}{13}$.