[1], вариант 8

В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность, CH — высота трапеции.

(a) Докажите, что центр окружности, вписанной в трапецию, лежит на отрезке BH.

(b) Найдите диагональ AC, если известно, что средняя линия трапеции равна $\sqrt{6}$, а $\angle AOD = 135°$, где O — центр окружности, вписанной в трапецию, а AD — большее основание.

Начнем построение с окружности и прямой, касающейся окружности в ее нижней точке. Затем из центра O проведем радиус OQ в точку касания и от отрезка OQ в разные стороны отложим углы величиной 67,5° для лучшего соответствия чертежа данным пункта (b) задачи. Обозначим через A и D точки пересечения полученных лучей с нижней прямой. Затем из этих точек проведем касательные к окружности и сверху дорисуем касательную. Получаем трапецию $ABCD$ (рис. 1). Проведем в ней высоту CH и приступим к анализу вопроса пункта (a).

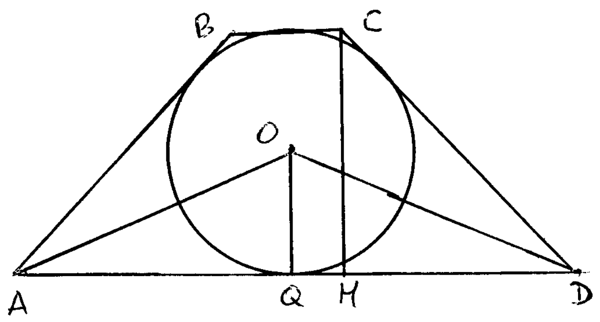

Рис. 1.

Из центра O окружности проведем радиус OG (рис. 2) и рассмотрим треугольники BGO и CGO. В них есть общая сторона и они прямоугольные. Ввиду того, что $\angle ABC = \angle BCD$, а BO и CO — биссектрисы, имеем $\angle OBG = \angle OCG$, стало быть, $\triangle BGO = \triangle CGO$, откуда $BO = CO$. Вместе с тем $CG = QH$ и треугольники CGO и HQO прямоугольные, значит, они равны, откуда $CO = HO$. Мы получили, что $BO = CO = HO$, следовательно, O — центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника BCH, а он совпадает с серединой гипотенузы BH, тем самым лежит на отрезке BH.

Ответим на вопрос пункта (b). Пусть MN — средняя линия трапеции (рис. 3). Она проходит через центр O окружности. Так

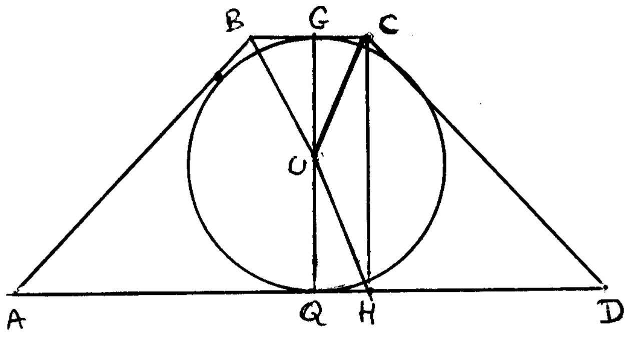

Рис. 2.

как AO — биссектриса угла A, углы MAO и DAO равны, но вместе с этим равны и углы DAO и MOA как внутренние накрест лежащие при пересечении двух параллельных прямых третьей. Стало быть, $\angle MAO = \angle MOA$ и треугольник AMO равнобедренный, откуда $AM = MO = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ и $AB = \sqrt{6}$. Согласно условию $\angle BAD = 45°$, поэтому $BT = AT = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, где BT — перпендикуляр из B на AD.

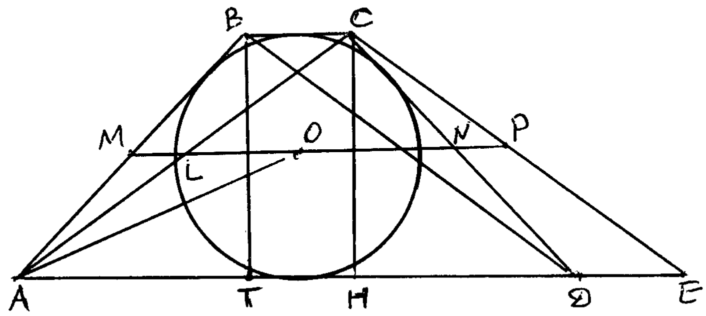

Рис. 3.

Для нахождения AC разумно совершить такую перестройку трапеции, при которой указанный отрезок оказался бы стороной некоего треугольника. Ясно, что для этого можно через точку C провести прямую, параллельную диагонали BD и, обозначив через E точку ее пересечения с прямой AD, получить требуемый треугольник. Пусть P, L — точки пересечения прямой MN с CE и AC соответственно (см. рис. 3). Нетрудно доказать, что $MN = LP = \sqrt{6}$. Но LP — средняя линия в треугольнике ACE, так что $AE = 2\sqrt{6}$ и ввиду равнобедренности треугольника ACE оказывается $AH = \sqrt{6}$. Наконец, из треугольника ACH находим, что $AC^2 = AH^2 + CH^2 = 6 + 3 = 9$ и $AC = 3$.