[2], вариант 7

Окружность с центром O вписана в угол, равный $60°$. Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O.

(a) Доказать, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

(b) Найти длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{15}$.

Решение. Построим чертеж, отражающий условия задачи: изобразим угол, в нем меньшую окружность, затем бо́льшую. Каковы особенности задачи, связанные с ее условием? Наличие двух взаимодействующих, а именно пересекающихся, окружностей, к тому же вписанных в один и тот же угол. В таком случае рекомендуется из вершины угла провести луч через центры окружностей и провести радиусы в точки касания (рис. 1).

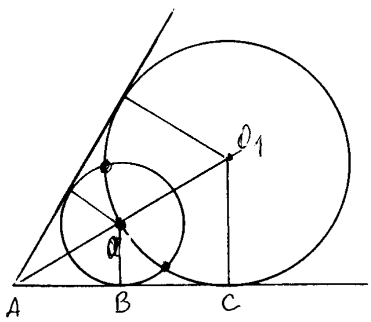

Рис. 1.

Еще одна особенность — угол величиной в $60°$. Этот угол биссектрисой AO делится на углы по $30°$, так что появляются прямоугольные треугольники с углом в $30°$. Это сильная особенность, тем более для прямоугольных треугольников, например $\triangle ABO$ и $\triangle ACO_1$. Как известно, в этом случае гипотенуза в два раза больше катета, лежащего напротив угла в $30°$. Пусть радиус меньшей окружности равен r, а большей — R. Тогда в треугольнике ACO_1 имеем $AO_1 = 2R$. С другой стороны, из треугольника ABO по аналогичной причине получим $AO = 2r$, откуда $AO_1 = AO + OO_1 = 2r + R$. Стало быть, $2r + R = 2R$, так что $R = 2r$.

Приступим к вычислению длины отрезка MN (рис. 2). Откуда найти отрезок? Из треугольника, лучше прямоугольного, в котором данный отрезок является стороной. Однако у нас не просматривается

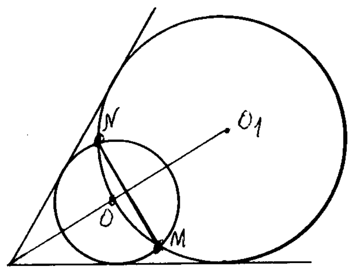

Рис. 2.

пока никакого треугольника с таким свойством. Будем конструировать треугольники, в которых MN — сторона, а именно будем добавлять к точкам M и N по одной точке и смотреть, насколько перспективен полученный при этом треугольник, не стесняясь заменить точку, если треугольник недостаточно перспективен. Добавим к указанным точкам одну из примечательных точек, а именно O_1. Получим треугольник MO_1N и пару равных между собой прямоугольных треугольников $\triangle MO_1T$ и NO_1T (рис. 3).

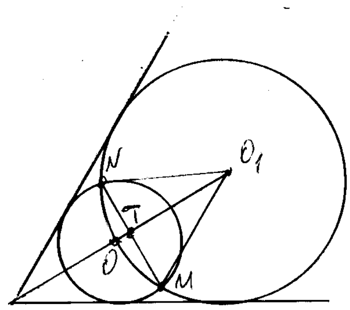

Рис. 3.

Из какого треугольника будем искать MN. Сначала посмотрим на прямоугольный треугольник MO_1T, понимая, что $MN = 2MT$. Каковы перспективы нахождения MT? У нас есть длина отрезка MO_1, это величина радиуса большей окружности, и надо либо еще одну сторону в $\triangle MO_1T$, либо угол. Насчет стороны TO_1 трудно сказать, а про угол можно подумать. Какой угол будем искать? Наверное, $\angle MO_1T$ как связанный с радиусами. Откуда найти угол? Из треугольника. Из какого? Ясно, что не из $\triangle MO_1T$. В какой треугольник еще входит угол MO_1T? В $\triangle MOO_1$. Проанализируем этот треугольник. В нем $MO_1 = R$, $OO_1 = R$ и $MO = r$. Но мы уже доказали, что $R = 2r$. так что найти угол из равнобедренного треугольника со сторонами r, $2r$ и $2r$ нетрудно. Привлекая, например, теорему косинусов, имеем $r^2 = 4r^2 + 4r^2 = 2 \cdot 2r \cdot 2r \cdot \cos\angle MO_1O$, откуда $\cos\angle MO_1O = \dfrac{7}{8}$. Теперь имеем

$$MT = MO_1 \cdot \sin\angle MO_1T = 2 \cdot 4\sqrt{15} \cdot \frac{\sqrt{15}}{8},$$

откуда $MT = 15$.