[2], вариант 3

На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

(a) доказать, что $CM \perp DK$,

(b) найти MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны a и b.

Отразим на чертеже все указанные в условии задачи обстоятельства (рис. 1).

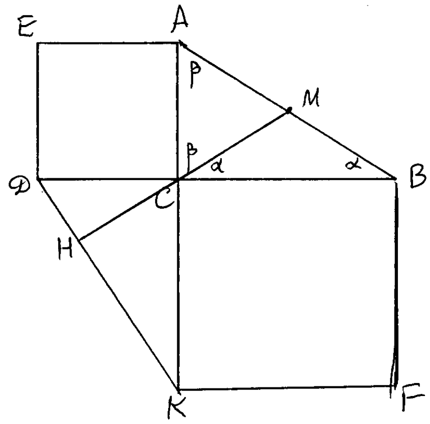

Рис. 1.

Какие особенности задачи можно отметить на основе данных? Наличие прямоугольного треугольника и квадратов и участие в условии точки M — середины гипотенузы. Она, в частности, служит центром описанной около $\triangle ABC$ окружности, так что $AM = BM = CM = \dfrac{c}{2}$, если c — длина гипотенузы. Появились равнобедренные треугольники. Так как нам надо будет работать с углами, полезно отметить равные углы, одинаково обозначая равные величины: пусть $\angle MBC = \angle MCB = \alpha$, $\angle MAC = \angle MCA = \beta$, причем $\alpha + \beta = 90°$ ввиду прямоугольности треугольника ABC (см. рис. 1).

Следующей особенностью задачи служит наличие специально расположенных квадратов. Что из этого можно извлечь? Например, равенство отрезков, а именно $BC = CK$, $AC = CD$, что влечет равенство прямоугольных треугольников $\triangle ABC = \triangle DCK$. В частности, $\angle CKD = \alpha$, $\angle CDK = \beta$.

Осталось обеспечить перевод информации об углах из треугольника ABC в треугольник DCK, заметив, что углы $\angle BCM$ и $\angle DCH$, а также $\angle ACM$ и $\angle KCH$ вертикальные, стало быть, $\angle DCH = \alpha$ и $\angle CHD = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$. Утверждение п. ($a$) доказано.

Перейдем к вычислению отрезка MH. Как найти отрезок? Из треугольника. Но у нас он ни в какой разумный треугольник как сторона не входит. Значит, надо попробовать составить его из двух отрезков: $MH = CM + CH$. Откуда найти отрезок MH? Выше отмечено, что это половина гипотенузы, т. е. $CM = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Отрезок CH — высота в прямоугольном треугольнике, которая легко находится с помощью сопоставления двух разных выражений для площади: $ab = CH \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$, откуда $CH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Наконец,

$$MH = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{(a+b)^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$