[2], вариант 1

На окружности радиусом 20 с центром в вершине C треугольника ABC взята точка P. Известно, что $AB = 25$, $AC = 15$, $BC = 20$, а треугольники APC и BPC равновелики. Найдите расстояние от точки P до прямой AB, если известно, что оно меньше 25.

Каковы особенности задачи, исходя из данных? Во-первых, можно заметить, что треугольник ABC прямоугольный, во-вторых, вершина прямого угла расположена в центре окружности и, в третьих, радиус окружности совпадает с одним из катетов. Учитывая результаты наблюдений, подготовим чертеж (рис. 1).

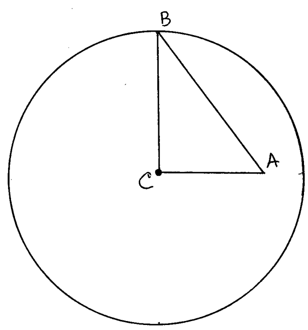

Рис. 1.

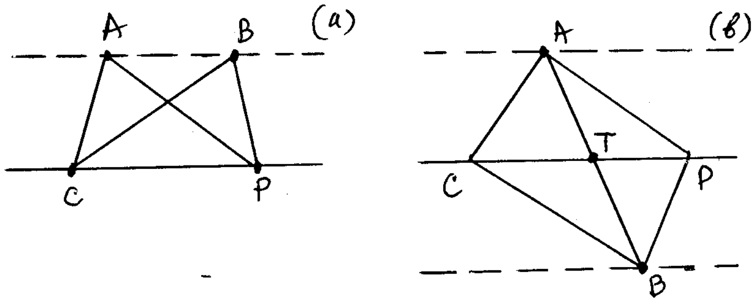

Рис. 2.

Надо определиться с положением точки P на окружности. Отвлекаясь от конкретной фигуры, разберемся в общем случае, каковы типичные ситуации, в которых получаются равновеликие треугольники? Заметим, что у наших треугольников есть общая сторона, это CP. Возьмем прямую, на которой эта сторона лежит. Если треугольники с CP как основанием и вершинами A и B равновеликие, то эти вершины лежат либо на одной прямой, параллельной CP, либо одна из них на прямой, параллельной CP, а другая — на другой прямой, параллельной CP и отстоящей от нее на таком же расстоянии, как и первая прямая (рис. $2(a)$,(b)).

В первом случае, когда вершины A и B лежат на одной прямой, надо через точку C провести прямую, параллельную AB, и точки P брать на этой прямой. В условии сказано, что точка P должна лежать на окружности, стало быть, это одна из двух точек пересечения прямой с окружностью (рис. 3).

Во втором случае, когда вершины A и B лежат на разных прямых, заметим, что ввиду одинакового отстояния точек A и B от прямой CP отрезок AB пересекается с прямой CP в середине. Это наблюдение указывает на то, что точка P должна быть на прямой, проходящей через точку C и середину T отрезка AB. Значит, еще два варианта расположения точки P — это пересечения прямой CT с окружностью (рис. 4).

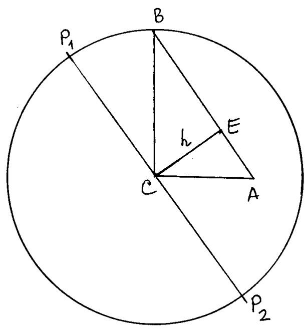

Рис. 3.

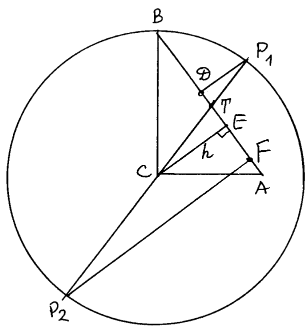

Рис. 4.

В первом случае расстояние от P до AB равно расстоянию между параллельными прямыми AB и CP, и его проще всего найти как величину высоты h в прямоугольном треугольнике ABC. Выражая двояко величину площади этого треугольника, имеем $AB{\cdot}h = AC{\cdot}BC$, т. е. $25h = 15 \cdot 20$, откуда $h = 12$.

Во втором случае расстояния можно найти из подобия треугольников $\triangle P_1TD \sim \triangle CTE$ и $\triangle P_2TF \sim \triangle CTE$, в которых $CP_1 = CB = 20$, $CT = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{25}{2}$, $P_1T = CP_1 - CT$, $P_2T = P_2C + CT$. Оформляя указанные подобия, находим:

$$\frac{P_1D}{h} = \frac{P_1T}{CT} = \frac{3}{5},$$

откуда $P_1D = 7{,}2$, и

$$\frac{P_2F}{h} = \frac{P_2T}{CT} = \frac{13}{5},$$

откуда $P_2F = 31{,}2$. Из найденных значений меньше 25 числа 12 и 7,2, они и составят ответ.