[1], вариант 4

Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

(a) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

(b) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 20$.

Постараемся изобразить треугольник так, чтобы было правдоподобным указанное в условии соотношение (рис. 1). Задание отношения отрезков предполагает обозначение длины какого-то из них с целью выражения через нее остальных величин. Учитывая, что медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины, положим $MB_1 = x$, тогда $BM = 2x$ и по условию $AC = 6x$. Так как B_1 — середина AC, приходим к тому, что $B_1A = B_1C = B_1B$, стало быть, B_1 — центр описанной около треугольника ABC окружности, откуда следует, что угол B прямой.

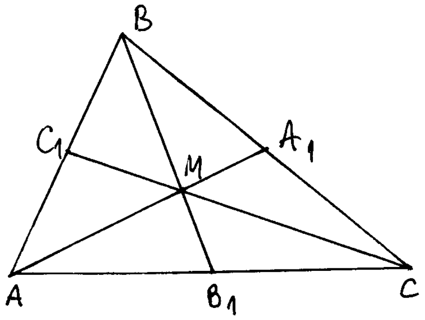

Рис. 1.

Займемся вычислениями. Требуется найти сумму квадратов медиан, и это указывает на то, что никакую из медиан отдельно искать не надо, скорее всего, найти их невозможно. Надо выписывать равенства, из которых манипуляциями с ними окажется возможным найти требуемую величину.

По теореме Пифагора из треугольников ABA_1 и CBC_1 имеем

$$AA_1^2 = AB^2 + \frac{1}{4}BC^2, \quad CC_1^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2,$$

откуда

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}(AB^2 + BC^2).$$

Из треугольника ABC по теореме Пифагора имеем $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 400$, откуда приходим к ответу: $AA_1^2 + CC_1^2 = 500$.