[1], вариант 1

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и CC_1, K и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки B на прямые AA_1 и CC_1.

(a) Докажите, что $MK \parallel AC$.

(b) Найдите площадь треугольника KBM, если известно, что $AC = 10$, $BC = 6$, $AB = 8$.

Начнем построение чертежа с использования средств, обеспечивающих возможности для эксперимента в целях достижения по возможности наглядной картины. А именно воспользуемся окружностью для проведения биссектрисы. Нарисуем окружность и отметим на ней три точки — они будут вершинами треугольника. Затем каждую из образовавшихся дуг разделим пополам (это сравнительно нетрудно сделать на глазок). Соединим точки — заготовки для вершин, получив треугольник, после чего вершины его соединим с точками на окружности, в которые должны прийти биссектрисы. Нам достаточно провести биссектрисы из вершин A и C. Опустим из B перпендикуляры на AA_1 и CC_1, и чертеж готов (рис. 1), можно приступать к анализу.

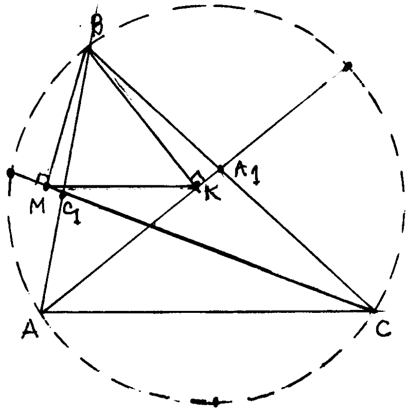

Рис. 1.

Какие особенности на основе данных можно отметить? Просматривается только два перпендикуляра из одной точки на две пересекающиеся прямые, а именно из B на AA_1 и CC_1 (рис. 2, где P — точка пересечения AA_1 и CC_1). Однако неясно, что эта особенность может дать для доказательства утверждения пункта (a).

Как мы ищем особенности? Отвлекаемся от деталей и выделяем фрагменты данных. Даны перпендикуляры к биссектрисам. Изобразим это обстоятельство на отдельном рисунке (рис. 3) и подумаем, в каких ситуациях мы с такой информацией встречались. Пожалуй, в равнобедренных треугольниках, где есть высота и биссектриса из вершины такого треугольника. Но у нас треугольника нет. Попробуем достроить и посмотреть, что такая информация может принести (рис. 4). Она дает равенство отрезков ввиду того, что в этом случае совпавшие биссектриса и высота оказываются медианой.

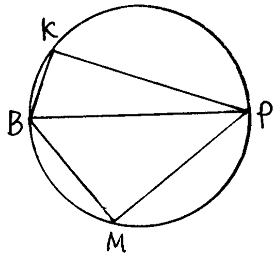

Рис. 2.

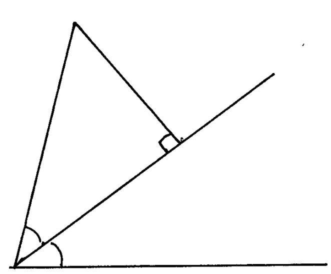
Рис. 3.

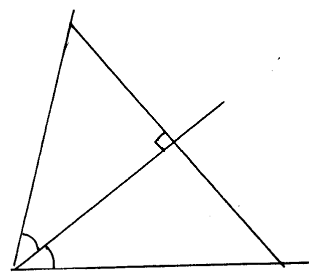
Рис. 4.

Отметим найденную особенность на рис. 1, продолжив BK и BM до пересечения с прямой AC (рис. 5). Получили две пары равных между собой отрезков: $BK = KF$ и $CM = ME$. Следовательно, MK — средняя линия в треугольнике EBF, откуда выводим, что $MK \parallel AC$.

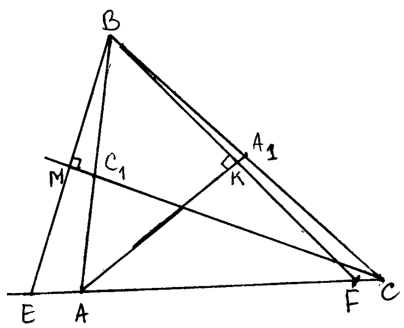

Рис. 5.

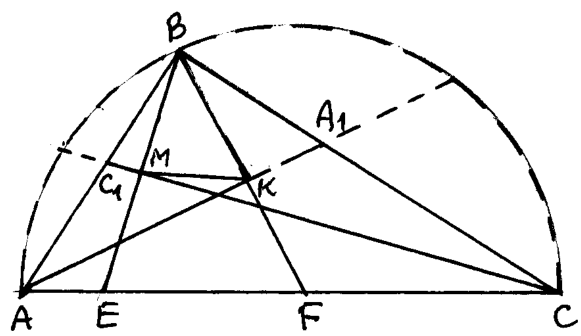

Рис. 6.

Займемся вычислениями. Судя по данным пункта (b), вычисления надо провести в прямоугольном треугольнике. Изобразим его в условиях отсутствия клетчатой бумаги с помощью вспомогательной полуокружности. А именно нарисуем полуокружность, затем ее диаметр, на полуокружности выберем подходящим образом точку и соединим ее с концами диаметра. Треугольник готов (рис. 6). Дополним его информацией из предыдущих рассуждений и получим изображение треугольника, площадь которого надо найти. Проще всего это сделать, использовав подобие $\triangle BKM \sim \triangle BEF$, коэффициент которого $\frac{1}{2}$. Найдем площадь треугольника BEF, искомая величина будет в 4 раза меньше.

Площадь треугольника BEF нетрудно найти как площадь части треугольника ABC, получаемой удалением треугольников ABE и BCF. Ввиду равнобедренности треугольников ABF и CBE имеем $AF = AB = 6$, откуда $CF = 4$, и $CE = CB = 8$, откуда $AE = 2$. У треугольников ABE, BCF и ABC одна высота из вершины B, стало быть,

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{5} S_{\triangle ABC}, \quad S_{\triangle BCF} = \frac{2}{5} S_{\triangle ABC},$$

откуда $S_{\triangle BEF} = \frac{2}{5} S_{\triangle ABC}$. Тем самым

$$S_{\triangle BKM} = \frac{1}{10} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{10} \cdot 24 = 2{,}4.$$