[2], вариант 14

Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает в точке D продолжение стороны AB за точку A, причем $AD = \dfrac{2}{3}AB$. Найти площадь треугольника ABC, если $AC = 1$.

Решение. Изобразим окружность, ее диаметр AC и озаботимся тем, где поставить вершину B. Так как сторона BC должна делиться точкой E ее пересечения с окружностью на два равных отрезка, будем из точки C проводить лучи и следить за тем, чтобы прямая AB пересекла окружность за пределами отрезка AB. Это произойдет в случае, указанном на рис. 1. При этом желательно соблюсти данную в условии пропорцию между отрезками AD и AB, а именно $AD : AB = 2 : 3$.

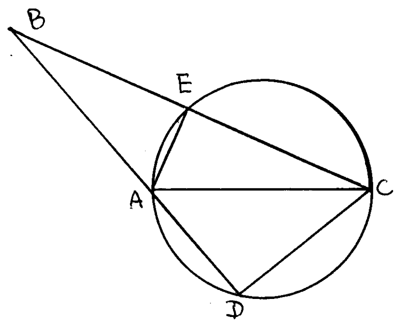

Рис. 1.

Какие особенности связаны с данными задачи? Деление стороны BC точкой E на равные отрезки, стало быть, AE — медиана в треугольнике ABC. Далее, AC — диаметр, поэтому угол AEC прямой. Выходит, что треугольник ABC равнобедренный и $AC = AB = 1$, а отношение AB к AD дает величину $AD = \dfrac{2}{3}$. Какие еще особенности можно отметить? Например, наличие двух секущих, исходящих из одной точки, это BD и BC. Естественно, запишем связанное с этим обстоятельством равенство, обозначив CE через x:

$$AD \cdot AB = 2x \cdot x \Longleftrightarrow \frac{5}{3} = 2x^2,$$

откуда $x = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$ Осталось найти высоту AE, опущенную на сторону BC: $AE = \sqrt{\dfrac{1}{6}}$, и записать ответ:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC = \frac{\sqrt{5}}{6}.$$