[2], вариант 5

На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

(a) Доказать, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

(b) Найти расстояние от точки M до центров квадратов, если $AC = 6$, $BC = 10$ и $\angle ACB = 30°$.

Изобразим квадрат со стороной BC и от его верхней стороны отложим угол величиной 30°. На стороне угла, отличной от стороны квадрата, отложим отрезок AC, и построим квадрат со стороной AC. Отметим середину M отрезка AB (рис. 1).

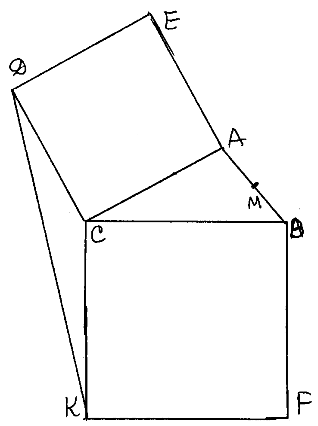

Рис. 1.

Как можно связать отрезок CM и половину отрезка DK? Никаких поводов для сопоставления на основе имеющихся данных не просматривается.

Какие особенности задачи можно отметить на основе данных? Есть медиана в треугольнике ABC. Вспомним, каковы основные принципы использования медианы? Во-первых, конец ее попадает в середину стороны, но эта информация нам ничего не добавляет. Если медиана участвует в задачах, связанных с вычислениями, то полезно применить теорему косинусов к двум треугольникам с медианой в качестве общей стороны. Но у нас пока нет потребности в вычислениях. Наконец, можно продлить отрезок CM за пределы треугольника ABC на расстояние, равное его длине, и достроить треугольник до параллелограмма $ALBC$ (рис. 2). В этой ситуации $CL = 2CM$ и задачу можно переформулировать так: обосновать равенство отрезков CL и DK. Для этого надо проанализировать треугольники ACL

и CDK, в которых интересующие нас отрезки являются сторонами. Согласно условию $AL = BC = CK$, $AC = CD$ и нетрудно заметить, что $\angle CAL = \angle DCK = 150°$. Стало быть, $\triangle CAL = \triangle DCK$, откуда $CL = DK$ и утверждение п. (a) доказано.

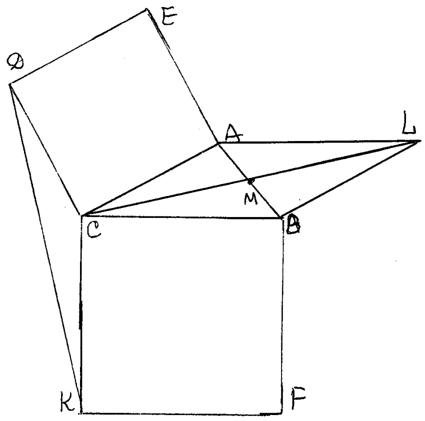

Рис. 2.

Займемся вычислениями отрезков MP и MQ, где P, Q — центры соответствующих квадратов (рис. 3). Откуда найти отрезок, например MQ? Из треугольника, в котором этот отрезок — сторона. Пока этот отрезок ни в каком треугольнике как сторона не замечен. Стало быть, надо подобрать такой треугольник самим, ориентируясь на возможность и реальность проведения соответствующих вычислений. Треугольник, в котором MQ — сторона, получить легко — надо к точкам M и Q добавить еще одну точку, получится треугольник, и предстоит проанализировать, насколько из него можно найти требуемый отрезок.

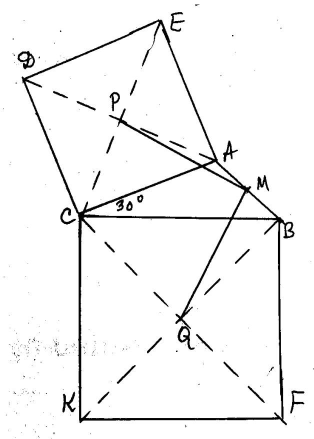

Рис. 3.

Начнем добавлять наиболее выдающиеся точки, здесь одна из таких точек — это вершина B квадрата, ближе всего расположенная к M (рис. 3). В этом треугольнике известна сторона BQ, сторону BM можно найти как половину отрезка AB, который, в свою очередь, ищется по теореме косинусов из треугольника ABC. Наконец, угол $\angle QBM$ можно составить из двух углов, один из которых равен $45°$, а второй можно найти из $\triangle ABC$. В принципе, если ничего другого не найдется, то этот путь можно проделать. Однако сразу надо заметить, что выражение для стороны AB простотой отличаться не будет, так что процесс нахождения угла $\angle QBM$ может оказаться трудоемким, и с учетом этих наблюдений попробуем еще какую-либо точку в качестве третьей для обеспечения треугольника, в котором MQ — сторона.

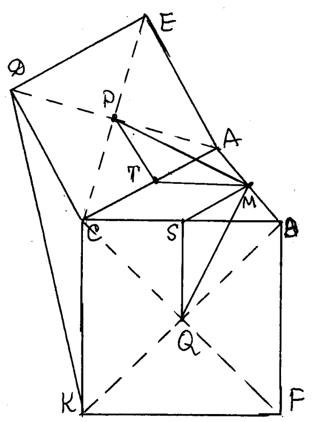

Рис. 4.

Следующей возьмем середину стороны BC квадрата, обозначим ее через S (рис. 4). В $\triangle MQS$ есть сторона QS, равная половине стороны KC квадрата, сторона MS, равная половине AC, и угол между ними, равный $120°$. Идеальная ситуация для подсчета MQ:

$$MQ^2 = 25 + 9 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 49,$$

откуда $MQ = 7$.

Обращаясь к отрезку MP, можно заметить, что он находится из аналогичного треугольника, в котором в качестве третьей вершины к A и P добавлена середина отрезка AC. Нетрудно заметить, что такой треугольник равен только что использованному при подсчете MQ, так что $MP = MQ$.