[1], вариант 9

Окружность с центром O касается боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC, продолжения боковой стороны AC и продолжения основания BC в точке N. Точка M — середина основания BC.

(a) доказать, что $AN = OM$,

(b) найти OM, если стороны треугольника ABC равны 13, 13 и 24.

Построение чертежа начнем с окружности — легче к ней достроить соответствующие линии, чем обеспечивать ее касание с имеющимися прямыми. Через нижнюю точку окружности проведем горизонтальную прямую, на которой расположится основание BC треугольника. Пусть N — точка касания. Отметим слева от нее точку C и проведем из нее вторую касательную к окружности. Обозначим вторую точку касания через L (рис. 1).

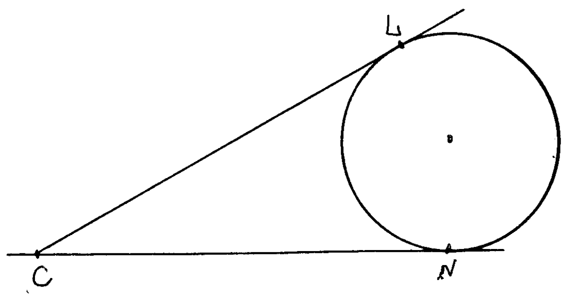

Рис. 1.

Как расположить на CL вершину A? Заметим, что отрезки касательных к окружности из точки A равны, но идущая в сторону прямой CN касательная немного продлится после точки касания, прежде чем дойти до CN и попасть в вершину B. Стало быть, точку A следует расположить немного правее середины отрезка CL (рис. 2). Проведем из A касательную, направленную к CN, и отметим точку B ее пересечения с CN. Чертеж готов (см. рис. 2).

Для доказательства равенства отрезков AN и OM лучше всего увидеть их в качестве сторон в равных треугольниках. Здесь просматриваются треугольники AMN и MON, в которых указанные отрезки служат сторонами. Попробуем доказать их равенство. Эти треугольники прямоугольные и имеют общую сторону MN. Стало быть, для доказательства их равенства достаточно получить равенство еще чего-то — либо отрезков AM и ON, либо одного из острых углов.

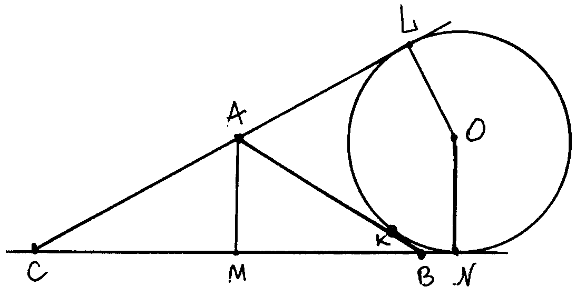

Рис. 2.

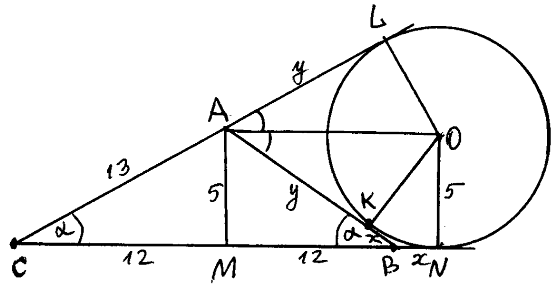

Рис. 3.

Проанализируем особенности, связанные с данными. Есть равнобедренный треугольник, в нем есть равные стороны и равные углы. Обозначим равные величины одинаковыми буквами. Пусть углы при основании равны α. Касание из точки A дает равенство отрезков AL и AK и равенство углов $\angle LAO = \angle KAO$ (см. рис. 3). Вместе в тем $\angle KAL$ равен 2α как внешний угол треугольника при вершина A, откуда каждый из указанных выше углов равен α. Но углы $\angle MBA$ и $\angle BAO$ суть внутренние накрест лежащие при пересечении прямых AO и MN прямой AB. Их равенство влечет параллельность $AO \parallel MN$. Следовательно, $AONM$ — прямоугольник, и $AN = OM$ как его диагонали.

Для нахождения OM проследим за особенностями. Мы отмечали, но не использовали, равенство отрезков AL и AK. Обработаем это обстоятельство, обозначив их длину одной буквой, пусть y. Есть еще две пары равных между собой отрезков, это $BK = BN$, обозначим их длину через x, и $CL = CN$, длина этих отрезков выражается через x, y и данные задачи. Запись такого равенства дает уравнение $13 + y = 24 + x$. Кроме того, из равнобедренности треугольника ABC имеем $x + y = 13$. Из полученной системы находим, что $x = 1$, стало быть, $MO^2 = MN^2 + NO^2 = 169 + 25 = 194$ и $MO = \sqrt{194}$.