[1], вариант 3

Окружности с центрами O_1 и O_2 разных радиусов пересекаются в точках A и B. Хорда AC большей окружности пересекает меньшую окружность в точке M и делится этой точкой пополам.

(a) Докажите, что проекция отрезка O_1O_2 на прямую AC в четыре раза меньше AC.

(b) Найдите O_1O_2, если известно, что радиусы окружностей равны 5 и 17, а $AC = 16$.

Поскольку в условии ничего не сказано о взаимном расположении окружностей, надо будет рассмотреть два случая: центр одной из них лежит или не лежит в круге, ограничиваемом другой окружностью.

Рассмотрим один из отмеченных случаев, а именно соответствующий рис. 1. Проведем из центров O_1, O_2 радиусы в точки A, C и A, M. Получили два равнобедренных треугольника. Проекцией O_1O_2 на AC является отрезок MH между основаниями перпендикуляров из точек O_1 и O_2 на AC. В равнобедренном треугольнике AO_1M отрезок O_1Hне только высота, но и медиана, стало быть, MH в 2 раза меньше чем AM. В свою очередь, по условию L — середина AC, откуда делаем вывод о том, что MH в 4 раза меньше чем AC.

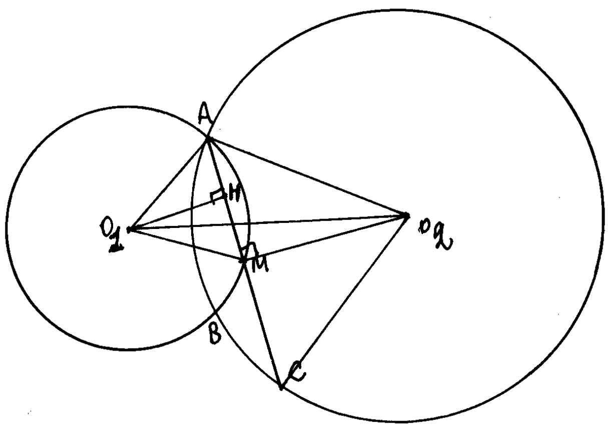

Рис. 1.

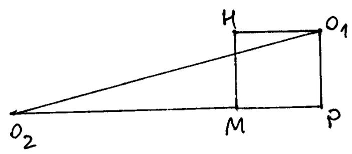

Рис. 2.

Займемся вычислениями в рассматриваемом случае. Отрезок O_2O_1 ищется на основе конфигурации, присущей пересечению двух окружностей и в отвлеченном виде изображенной на рис. 2. Продолжив прямую O_2M и отметив точку P ее пересечения с прямой, проходящей через O_1 и параллельной HM, из прямоугольного треугольника O_1O_2P легко вычислить O_1O_2. Для этого надо знать O_1H и

O_2M, которые, в свою очередь, легко найти из треугольников MHO_1 и CMO_2, а именно $O_1H = 3$, $O_2M = 15$, $O_2P = 18$. Из этих данных получаем, что $O_1O_2 = 2\sqrt{85}$.

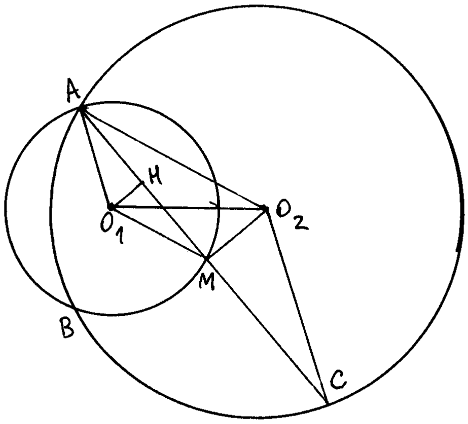

Рис. 3.

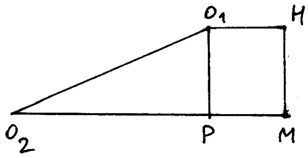

Рис. 4.

Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 3. В этом случае доказательство утверждения пункта (a) не отличается от такового для предыдущего случая. Проведем вычисления. Отличие этого случая от предыдущего в том, что отвлеченная ситуация иная, а именно изображенная на рис. 4, на котором, как и ранее, $HM = 4$, $O_1H = 3$, $O_2M = 15$, однако на этот раз $O_2P = 12$. Отсюда $O_1O_2 = 4\sqrt{10}$.