[2], вариант 6

Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

(a) Доказать, что периметр треугольника с вершинами в центрах трех окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

(b) Найти радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

Решение. Подготовим рисунок согласно условиям: изобразим бо́льшую
окружность, проведем горизонтально ее диаметр и изобразим меньшую окружность, взяв ее центр на имеющемся диаметре. Расположим третью окружность так, чтобы она касалась первых двух окружностей и линии их центров.

В задаче присутствует сильная особенность — касание окружностей. В таком случае при внешнем касании соединить центы, и проделав такую операцию, получим отрезок O_2O_3, а при внутреннем — через центры провести прямую до точки касания окружностей (рис. 1).

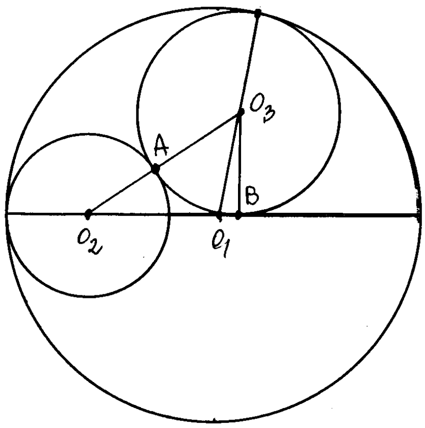

Рис. 1.

В решении непременно будут использованы отрезки, равные сумме радиусов при внешнем касании и разности радиусов при внутреннем, а именно отрезки O_1O_2, O_1O_3 и O_2O_3. Поскольку их использование неизбежно, введем для них краткие обозначения: пусть R — радиус внешней окружности, r — данной внутренней и x — второй внутренней. Тогда $O_1O_2 = R - r$, $O_1O_3 = R - x$ и $O_2O_3 = r + x$.

Приступим к доказательству утверждения из п. (a). Периметр P треугольника $O_1O_2O_3$ — это сумма $P = O_1O_2 + O_1O_3 + O_2O_3 = R - r + R - x + r + x = 2R$, что и требовалось.

Приступим к вычислению x, если $R = 6$ и $r = 2$. Для этого соберем информацию о касаниях в одном треугольнике, а именно $\triangle O_1O_2O_3$, и применим к нему теорему косинусов для получения уравнения относительно x. Требуемый для этой теоремы $\cos\angle O_1O_2O_3$ получим из $\triangle BO_2O_3$, в котором $\sin\angle O_1O_2O_3 = \dfrac{x}{x+2}$ и $\cos\angle O_1O_2O_3 = \dfrac{2\sqrt{x+1}}{x+2}$. По теореме косинусов применительно к $\triangle O_1O_2O_3$ имеем

$$(6-x)^2 = (2+x)^2 + 16 - 2\cdot(2+x)\cdot 4\cdot\frac{2\sqrt{x+4}}{x+2} \iff \sqrt{x+1} = x-1,$$

откуда $x = 3$.