[1], вариант 7

Медианы AM и BN треугольника ABC перпендикулярны и пересекаются в точке P.

(a) Докажите, что $CP = AB$.

(b) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $AC = 6$ и $BC = 7$.

Условие перпендикулярности медиан налагает определенный отпечаток на последовательность действий при построении чертежа. Сначала отразим перпендикулярность. Для этого нарисуем полуокружность, диаметр которой станет стороной AB треугольника, затем выберем на ней точку P в качестве точки пересечения медиан, через середину O диаметра AB проведем луч AP, на котором за пределами круга отложим отрезок PC длиной, в два раза большей длины PO. Продолжим AP и BP до медиан AM и BN Чертеж готов (рис. 1).

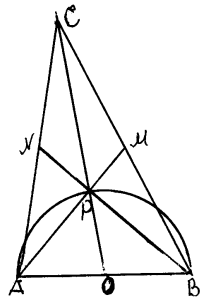

Рис. 1.

Обозначим через x длину отрезка, соединяющего середину отрезка AB с точками A, B и P. Тогда $CP = 2x$ как часть медианы. Получили, что отрезки AB и CP равны.

Для вычисления площади достаточно найти, например, длину третьей стороны AB треугольника ABC. Воспользуемся информацией применительно к прямоугольным треугольникам APN и BPM. Пусть $PN = y$, $PM = z$. Тогда $AP = 2y$, $BP = 2z$ и из указанных треугольников по теореме Пифагора имеем

$$4y^2 + z^2 = 9, \quad y^2 + 4z^2 = \frac{49}{4},$$

откуда $y^2 + z^2 = \dfrac{17}{4}$ и $MN = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$, $AB = \sqrt{17}$.

Осталось найти площадь, например, по формуле Герона. Она оказывается равной $2\sqrt{38}$.