[2], вариант 28

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K, L и M, причем $AK : KB = 2 : 3$, $BL : LC = 1 : 2$, $CM : MA = 3 : 1$. В каком отношении отрезок KL делит отрезок BM?

Решение. Изобразим треугольник ABC, разделим стороны на соответствующие части и отметим на сторонах точки K, L и M (рис. 1). Как обычно, обработаем пропорцию, задав на каждой из сторон некую условную единицу измерения и выразив длины соответствующих отрезков в этих единицах. А именно, пусть $AM = x$, $CM = 3x$, $AK = 2y$, $BK = 3y$, $BL = z$, $CL = 2z$.

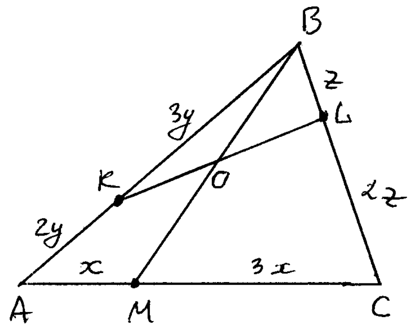

Рис. 1.

Каковы особенности, связанные с данными? Много отношений и есть отрезки в треугольнике. Значит, надо либо через конец какого-то из них проводить параллельные другому отрезку линии, либо проводить прямую, параллельную какой-то стороне и выносить на нее подобие. Так как доли отрезков не очень хорошо соизмеряются? видимо, удобнее будет провести параллельную стороне прямую.

Через вершину B проведем прямую, параллельную AC, и через E обозначим точку пересечения прямой KL с этой прямой, а через F — точку пересечения прямой KL с прямой AC (рис. 2). Получаем набор подобных треугольников.

Запишем информацию, вытекающую из подобий треугольников через точки L, K и O, т. е. подобий $\triangle BEL \sim \triangle CFL$, $\triangle AKF \sim \triangle BEK$ и $\triangle FMO \sim \triangle EBO$. Для краткости и эффективности обозначим $AF = a$, $BE = b$. Имеем

$$\frac{a+4x}{b} = 2, \quad \frac{a}{b} = \frac{2}{3}, \quad \frac{MO}{BO} = \frac{a+x}{b} = \frac{a}{b} + \frac{x}{b}.$$

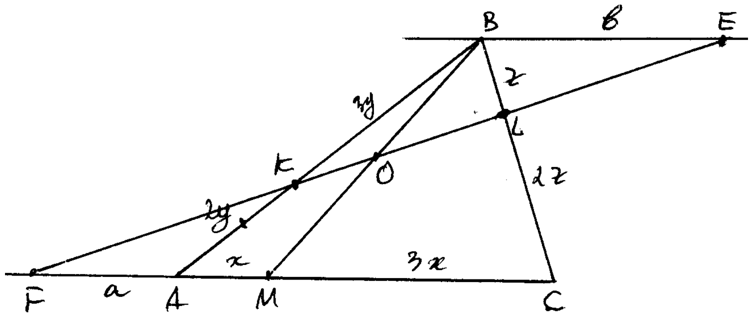

Рис. 2.

Первое равенство дает:

$$\frac{a}{b} + 4\frac{x}{b} = 2 \Longleftrightarrow \frac{x}{b} = \frac{1}{3},$$

откуда получаем, что $MO : BO = 1 : 1$.