[2], вариант 8

Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Известно, что $\angle AO_1B = 90^\circ$, $\angle AO_2B = 60^\circ$, $O_1O_2 = a$. Найти радиусы окружностей.

Решение. Начнем построение со учета указанных в задаче свойств — величин углов. Изобразим вертикально общий для двух окружностей отрезок AB и в одну сторону от него построим равносторонний треугольник AO_2B а в другую — прямоугольный треугольник AO_1B. с гипотенузой AB (рис. 1). Можно прямоугольный треугольник построить в той же стороне, в которой находится равносторонний (рис. 2). Сами окружности можно изобразить, а можно и не изображать. Придержимся второго.

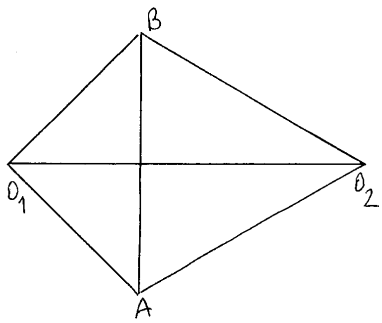

Рис. 1.

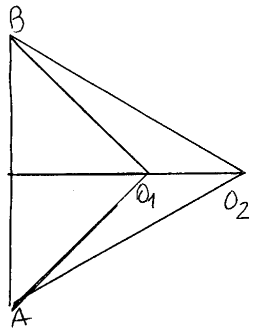

Рис. 2.

Рассмотрим случай, соответствующий рис. 1.

Каковы особенности, связанные с данными? Есть два треугольника с общей стороной, в которых известны углы, и это служит поводом для составления уравнения путем выражения общей стороны из разных треугольников и приравнивания результатов. Пусть $AO_1 = r$, $AO_2 = R$. Тогда, проделывая намеченное выше и записывая равенство $AB = AO_1 \cdot \sqrt{2}$, получаем $R = \sqrt{2}r$.

Какие еще есть связанные с данными особенности? Известна длина отрезка соединяющего центры окружностей. Ясно, что ее надо использовать для соединения r и R еще в одном уравнении. Так как в треугольнике AO_1O_2 известны углы, можно записать для него теорему косинусов и получить уравнение. Однако очень хорошие значения для углов побуждают еще немного посмотреть на задачу. Можно вспомнить фрагмент рекомендаций по нахождению отрезка и заметить, что O_1O_2 можно составить из двух отрезков, каждый из которых легко выразить через радиусы, а именно

$$a = \frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{R\sqrt{3}}{2},$$

откуда с учетом полученной выше информации имеем

$$\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = a,$$

стало быть, $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ и $R = \dfrac{2a}{\sqrt{3}+1}$.

Во втором случае радиусы находятся аналогично, отличие только в том, что надо не складывать длины отрезков, а вычитать, и получаются такие результаты, $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$, $R = \dfrac{2a}{\sqrt{3}-1}$.