[1], вариант 2

На сторонах AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K, L, M и N соответственно, причем

$$\frac{AK}{KB} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MD} = \frac{DN}{NA}.$$

(a) Докажите, что четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм, а его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

(b) Найдите отношение площадей параллелограммов $KLMN$ и $ABCD$, если известно, что $\dfrac{AK}{KB} = 2$.

Построение чертежа в этой задаче никаких особенностей не содержит, поэтому проведем его без комментариев (рис. 1).

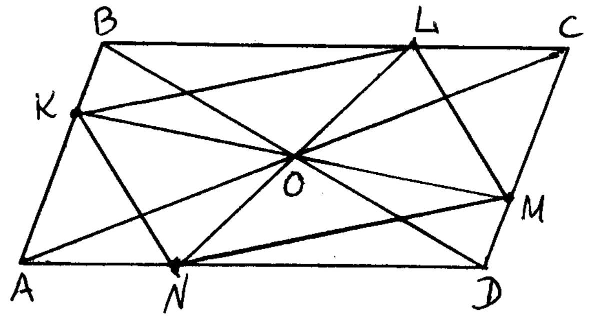

Рис. 1.

Для доказательства того факта, что $KLMN$ — параллелограмм, докажем, что его противоположные стороны попарно равны. Это можно обосновать, доказав равенство треугольников $\triangle BKL = \triangle DMN$ и $\triangle CLM = \triangle ANK$. Действительно, $BK = MD$ и $DL = DN$ как одинаковые части равных отрезков, и $\angle KBL = \angle MDN$, стало быть, треугольники равны и тем самым одно из требуемых равенств доказано. Доказательство другого проводится аналогично.

Пусть O — центр параллелограмма $ABCD$. Для доказательства того, что эта точка служит центром параллелограмма $KLMN$, достаточно убедиться в том, что O — середина LN. Действительно, $CL = AN$, $CO = AO$ и $\angle LCO = \angle NAO$, поэтому $\triangle CLO = \triangle ANO$ и $LO = NO$.

Займемся нахождением отношения площадей. Ввиду того, что в задаче отсутствуют линейные размеры, следует воспользоваться сравнением площадей на основании имеющихся сравнений сторон. Пусть

S — площадь параллелограмма $ABCD$. Тогда $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}S$. Далее, $CL = \frac{1}{3}BC$, $CM = \frac{2}{3}CD$, откуда $S_{CLM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{9}S$. Аналогично легко найти, что $S_{\triangle AKN} = S_{\triangle BKL} = S_{\triangle DMN} = \frac{1}{9}S$. В итоге $S_{KLMN} = S - \frac{4}{9}S = \frac{5}{9}S$.