[2], вариант 10

Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причем $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

(a) Доказать, что прямая AO делит пополам сторону BC.

(b) Найти отношение площади четырехугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 2$.

Решение. Поскольку в условии нет никаких поводов начинать построение чертежа с учета свойств, нарисуем треугольник и отметим точки согласно условию (рис. 1).

Каковы особенности, связанные с условием? Наличие одинаковых отношений отрезков. При каких обстоятельствах мы встречались с такой ситуацией? В подобных треугольниках. Нет ли и здесь подобный треугольников? Судя по данному отношению, если соединить точки B_1 и C_1, получим подобные треугольники, а именно $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ACB$. Отсюда можно сделать вывод, что $B_1C_1 \parallel CB$, так что четырехугольник BCB_1C_1 — трапеция. Отметив это обстоятельство, сделаем новый рисунок, изобразив трапецию в более привычном виде (рис. 2).

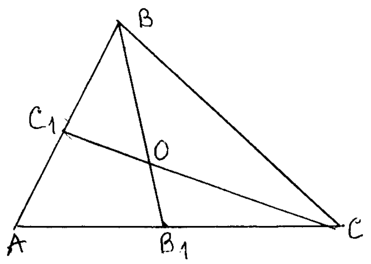

Рис. 1.

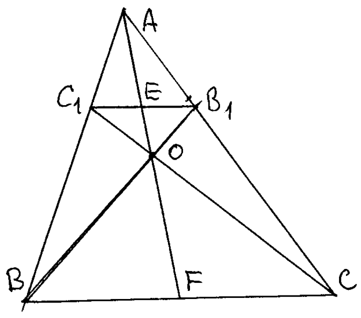

Рис. 2.

Проведем прямую AO, и пусть она пересекает основания B_1C_1 и BC соответственно в точках E и F. Появляются несколько пар подобных треугольников. Для удобства введем краткие обозначения для их сторон. Для пары подобных треугольников $\triangle AC_1E \sim \triangle ABF$ пусть $C_1E = x$, $BF = kx$, для $\triangle AEB_1 \sim \triangle AFC$ положим $B_1E = y$, $CF = ky$. Тогда из подобий $\triangle C_1EO \sim \triangle CFO$ и $\triangle B_1EO \sim \triangle BFO$ имеем $x : ky = EO : OF = y : kx$, откуда $y : x = 1$, так что $BF = FC$.

Для нахождения отношения площадей достаточно выразить их величины через площадь какой-то из фигур и сравнить. Пусть площадь треугольника AB_1C_1 равна S. Тогда ввиду подобия $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$ площадь треугольника ABC равна $9S$ и $S_{BCB_1C_1} = 8S$. Для ответа на вопрос задачи надо через S выразить площадь треугольника B_1C_1O.

Вспомним, что если стороны треугольников различаются в m раз, а опущенные на эти стороны высоты — в n раз, то отношение их площадей равно mn. Обратим внимание на то, что у треугольников BB_1C_1 и BCB_1 одинаковые высоты, а стороны относятся как $1 : 3$, стало быть, $S_{BB_1C_1} : S_BCB_1 = 1 : 3$ и $S_{BB_1C_1} = 2S$. Далее, у треугольников BB_1C_1 и B_1OC_1 общая высота на стороны BB_1 и B_1O, при этом $B_1O : BB_1 = 1 : 4$, следовательно, $S_{B_1C_1O} = \dfrac{1}{4}S_{BB_1C_1} = \dfrac{S}{2}$. Тем самым $S_{AB_1OC_1} = \dfrac{3}{2}S$ и $S_{AB_1OC_1} : S_{ABC} = \dfrac{1}{6}$.