

[1], вариант 5

Дан треугольник со сторонами $AB = 4$, $BC = 5$ и $AC = 6$.

(a) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности, параллельна стороне BC .

(b) Найдите длину биссектрисы треугольника ABC , проведенной из вершины A .

При построении чертежа можно сначала просто изобразить треугольник с указанными сторонами, а затем отметить центр вписанной окружности как точку пересечения его биссектрис и точку пересечения медиан. А можно побеспокоиться о большей адекватности чертежа условиям задачи и изобразить биссектрисы на основе описанной около треугольника окружности. Мы не будем напрягаться и начнем с треугольника.

Поскольку в финале придется искать длину биссектрисы из вершины A , удобнее расположить эту вершину сверху (рис. 1). Отметим точку P пересечения медиан и точку O пересечения биссектрис (см. рис. 1).

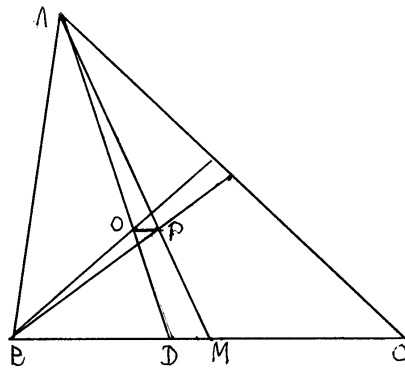


Рис. 1.

Что может обеспечить параллельность OP и BC ? Можно попробовать сориентироваться на признаки параллельности двух прямых, связанные с пересечением ее третьей прямой. Однако здесь не очень ясно, какую прямую взять в качестве третьей и на какие углы ориентироваться. Можно попробовать увидеть отрезки этих прямых как соответственные стороны подобных треугольников, и этот путь, видимо, более перспективен, так как такие треугольники несложно просматриваются — это $\triangle AOP$ и $\triangle ADM$, где AD и AM суть биссектриса и медиана треугольника ABC .

Для доказательства параллельности OP и DM достаточно убедиться в подобии этих треугольников. Угол с вершиной A у них общий, стало быть, достаточно доказать одинаковую пропорциональность сторон AO , AD и AP , AM . Так как M — точка пересечения медиан, имеем $AP : PM = 2 : 1$. Отношение $AO : OD$ можно обнаружить в треугольнике ABD , в котором BO — биссектриса. Для нахождения отношения надо знать длину AD . Отрезок BD — биссектриса в треугольнике ABC , и по ее свойству имеем $BD : DC = AB : AC = 2 : 3$. Но $BC = 5$, следовательно, $BD = 2$, $CD = 3$. Теперь из треугольника ABD находим, что $AO : OD = 2 : 1$. Тем самым требуемое равенство отношений доказано, треугольники AOP и ADM подобны и $OP \parallel DM$.

Длину биссектрисы AM найти несложно, это можно сделать из треугольника ABM по теореме косинусов. Найдем угол ABC из треугольника ABC по теореме косинусов:

$$36 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \angle ABC,$$

откуда $\cos \angle ABC = \frac{1}{8}$. Стало быть, $AM^2 = 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = 18$ и $AM = 3\sqrt{2}$.