В. В. Морозов

Об одном нелинейном диофантовом уравнении

Москва
2014

Об одном нелинейном диофантовом уравнении

Москва
2014

Автор **В. В. Морозов**, учитель математики, Почетный работник общего образования

Эта работа посвящена исследованию диофантова уравнения вида *axy+bx+cy=d*. Показана возможность численного решения задачи. В работе строго обосновывается алгоритм решения задачи. Разработана компьютерная программа, реализующая этот алгоритм и решающая диофантово уравнение по заданным коэффициентам.

Настоящее исследование опубликовано также на сайте Всероссийского Августовского Интернет-педсовета (секция Математика) и на сайте Московского центра Интернет-образования (секция Математика).

Работа интересна учителям и учащимся, осуществляющим исследовательскую деятельность по математике и информатике.

Об одном нелинейном диофантовм уравнении: Исследовательская задача / Автор **В. В. Морозов** – Москва: ЧОУ «Школа «Ступени», 2014. – 16 с.

Об одном диофантовом уравнении

Морозов В. В.

В этой работе мы будем рассматривать решение диофантова уравнения вида $axy + bx + cy = d$, где a, b, c, d – целые числа, и решение отыскивается также среди целых чисел.

Если $a = 0$, то уравнение принимает вид $bx + cy = d$; решение этого классического уравнения подробно описано в литературе, программа его решения на компьютере опубликована http://morozko1967.boom.ru/soft.htm.

Пусть $a \neq 0$. Тогда уравнение

$$axy + bx + cy = d \quad (1)$$

можно записать в виде

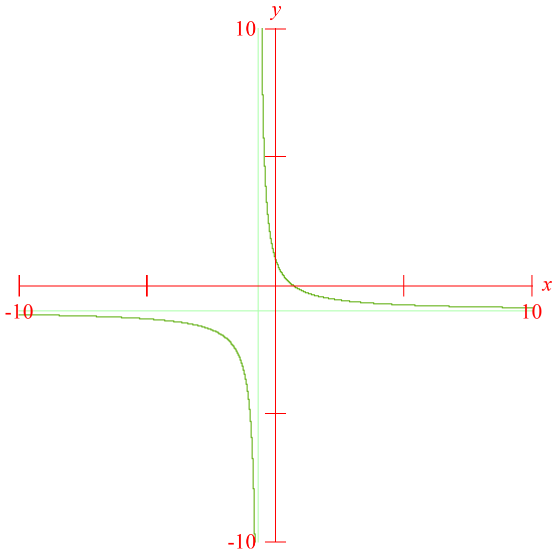
$$y(ax + c) + bx = d \quad (2).$$

Зададим себе вопрос: может ли $ax + c$ быть равным нулю? Да, если с делится на а и $x = -\frac{c}{a}$. Тогда решение существует, если $bx = d$, иными словами, $bc + ad = 0$. Итак, мы получили такой вывод: если $bc + ad = 0$ и с делится на а, то существует решение: $x = -\frac{c}{a}$, y – любое целое число. Точно также, если b делится на а, то существует решение x – любое число, $y = -\frac{b}{a}$. Если $bc + ad = 0$, но ни с, ни b не делятся на а, то решений нет.

Пусть теперь $bc + ad \neq 0$. Тогда нет целого x, обращающего в 0 выражение $(ax + c)$. В этом случае уравнение можно записать в виде

$$y = \frac{d - bx}{ax + c} \quad (3)$$

Докажем, что уравнение (3) имеет конечное число целочисленных решений. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{d - bx}{ax + c}$. Естественно, эта функция является биекцией. Графиком функции является гипербола.



$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{d - bx}{ax + c} = -\frac{b}{a}$. Значит, при достаточно больших значениях переменной x значение переменной y близко к $\left(-\frac{b}{a}\right)$. Между какими целыми числами заключено это число? $\left[-\frac{b}{a}\right] \le -\frac{b}{a} < \left[-\frac{b}{a}\right] + 1$. Начиная с некоторого значения переменной x переменная y, стремясь к $\left(-\frac{b}{a}\right)$, остаётся дробной. Точно также, если отрицательное x велико по модулю, то переменная y, стремясь к $\left(-\frac{b}{a}\right)$, остаётся дробной. Следовательно, уравнение (3) имеет конечное число целочисленных решений, и их можно поручить отыскать компьютеру простым перебором.

Но для этого необходимо найти отрезок на оси абсцисс, вне которого гарантированно нет целочисленных решений уравнения (3).

Если b не делится на a, то, очевидно, что границы целочисленных x равны $f^{-1}\left(\left[-\frac{b}{a}\right] + 1\right)$ и $f^{-1}\left(\left[-\frac{b}{a}\right]\right)$.

Если b делится на a, то границы целочисленных x равны $f^{-1}\left(-\frac{b}{a}+1\right)$ и $f^{-1}\left(-\frac{b}{a}-1\right)$.

Рассмотрим эти два случая отдельно.

Случай 1. Пусть сначала b не делится на a. Найдём $f^{-1}\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)$. Обозначим $B=\left[-\frac{b}{a}\right]+1$. Числа $x=f^{-1}\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)$ и $y=B$ удовлетворяют уравнению (1). Поэтому

$$axB+bx+cB=d\,,\quad x(aB+b)=d-cB$$

$$x\left(a\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)+b\right)=d-c\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)\ (4)$$

Далее нам потребуется…

Лемма. Пусть a, b – целые, отличные от нуля. Тогда $a\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)+b\neq 0$. Если b не делится на a, то $a\left(\left[-\frac{b}{a}\right]\right)+b\neq 0$.

Доказательство.

Сначала докажем, что для любого нецелого x

$$[-x]+1=-[x].\quad (5)$$

Действительно, по определению целой и дробной частей

$$x=[x]+\{x\},\ -x=[-x]+\{-x\};\quad \{-x\}=1-\{x\},$$

$$[-x]+1=-x-\{-x\}=-x-1+\{x\}=-x-(1-\{x\})=-x-\{-x\}=[-x].$$

Итак, $[-x]=-[x]-1$.

Допустим противное, пусть $a\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)+b=0$. Возможны два случая: b делится на a, и b не делится на a. Если b не делится на a, то из (5) получаем

$$a\left(-\left[\frac{b}{a}\right]\right)+b=0,\quad a\left[\frac{b}{a}\right]=b,\quad \left[\frac{b}{a}\right]=\frac{b}{a},$$

то есть b делится на a, что невозможно.

Если же b делится на a, то $0=a\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)+b=-b+b+a=a$, по условию a отлично от нуля. Полученное противоречие доказывает, что $a\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)+b\neq 0$.

Докажем теперь второе неравенство леммы. Пусть b не делится на a. Допустим противное, $a\left(\left[-\frac{b}{a}\right]\right)+b=0$. Тогда

$\left[-\frac{b}{a}\right]=-\frac{b}{a}$, используя (5), получаем

$-\left[\frac{b}{a}\right]-1=-\frac{b}{a}$, $1=\frac{b}{a}-\left[\frac{b}{a}\right]=\left\{\frac{b}{a}\right\}$.

Но дробная часть любого числа всегда меньше 1. Полученное противоречие доказывает, что если b не делится на a, то $a\left(\left[-\frac{b}{a}\right]\right)+b\neq 0$.

Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет из соотношения (4) найти

$f^{-1}\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)=\dfrac{d-c\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)}{b+a\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)}$, и в случае, если b не делится на a

$$f^{-1}\left(\left[-\frac{b}{a}\right]\right)=\frac{d-c\left(\left[-\frac{b}{a}\right]\right)}{b+a\left(\left[-\frac{b}{a}\right]\right)}.$$

Обозначим

$$A=\min\left(\frac{d-c\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)}{b+a\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)},\frac{d-c\left(\left[-\frac{b}{a}\right]\right)}{b+a\left(\left[-\frac{b}{a}\right]\right)}\right),$$

$$D=\max\left(\frac{d-c\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)}{b+a\left(\left[-\frac{b}{a}\right]+1\right)},\frac{d-c\left(\left[-\frac{b}{a}\right]\right)}{b+a\left(\left[-\frac{b}{a}\right]\right)}\right).$$

Тогда все целочисленные решения уравнения (3) удовлетворяют оценке

$$A\le x\le D,$$

и уравнение (3) можно решить простым перебором, беря по очереди целые значения x от A до D, вычисляя соответствующие $y = \frac{d - bx}{ax + c}$, И проверяя, является ли найденное значение y целым. Если $d - bx$ делится на $ax + c$, то существует решение $\left(x, \frac{d - bx}{ax + c}\right)$.

Случай 2. Пусть b делится на a. Тогда границы целочисленных x равны $f^{-1}\left(-\frac{b}{a}+1\right)$ и $f^{-1}\left(-\frac{b}{a}-1\right)$.

Найдём сначала $f^{-1}\left(-\frac{b}{a}+1\right)$. Обозначим $F = -\frac{b}{a}+1$. Тогда F удовлетворяет соотношению

$$axF + bx + cF = d$$
$$x(aF + b) = d - cF$$
$$x\left(a\left(-\frac{b}{a}+1\right)+b\right) = d - c\left(-\frac{b}{a}+1\right)$$

Учитывая, что в этом случае b делится на a, получаем:

$$ax = d + \frac{cb}{a} - c = \frac{da - ac + cb}{a},$$

$$f^{-1}\left(-\frac{b}{a}+1\right) = \frac{da - ac + cb}{a^2}. \quad (6)$$

Теперь найдём $f^{-1}\left(-\frac{b}{a}-1\right)$. Обозначим $G = -\frac{b}{a}-1$. Тогда G удовлетворяет соотношению

$$axG + bx + cG = d$$
$$x(aG + b) = d - cF$$
$$x\left(a\left(-\frac{b}{a}-1\right)+b\right) = d - c\left(-\frac{b}{a}-1\right)$$

Учитывая, что в этом случае b делится на a, получаем:

$$-ax = d + \frac{cb}{a} + c = \frac{da + ac + cb}{a},$$

$$f^{-1}\left(-\frac{b}{a}-1\right) = -\frac{da + ac + cb}{a^2}. \quad (7)$$

Обозначим

$$M = \min\left(\frac{da - ac + cb}{a^2}, -\frac{da + ac + cb}{a^2}\right),$$

$$N = \max\left(\frac{da - ac + cb}{a^2}, -\frac{da + ac + cb}{a^2}\right).$$

Тогда все целочисленные решения уравнения (3) удовлетворяют оценке

$$M \le x \le N,$$

и уравнение (3) можно решить простым перебором, беря по очереди целые значения x от A до D, вычисляя соответствующие $y = \frac{d - bx}{ax + c}$, И проверяя, является ли найденное значение y целым. Если $d - bx$ делится на $ax + c$, то существует решение $\left(x, \frac{d - bx}{ax + c}\right)$.

Итак, оба случая рассмотрены, осталось написать программу для персонального компьютера.

Приложение

Программа решения диофантова уравнения на языке программирования pascal.

```
program superdiofant;
      {Программа решения диофантова уравнения вида
       axy+bx+cy=d
       (c) Морозов Владимир Владимирович
       url: http://moroko1967.boom.ru/
       mailto: morozko1967@mail.ru  ICQ 259920363}
  uses crt;
  var a,b,c,d,x,y,D0,A0,s,k:integer;
     yy,DD,AA,ww,sgn:real;  l,ll:boolean;
     hh,ha,hb,hc,hd:string;   f:Text; {Файл для вывода ответа}
     {Далее идут процедуры для решения частного случая
      a=0. Тогда уравнение принимает вид bx+cy=d    }
procedure nod(a0,a1:longint; var x,y,nd:longint);
   {Процедура находит nd=НОД(a0,a1) с помощью расширенно-
го алгоритма Евклида, причём ищет x и y, такие, что
x*a0+y*a1=nd}
   var a2,q,x0,x1,x2,y0,y1,y2:integer;
   begin
     x0:=1; y0:=0; x1:=0; y1:=1;
     while (a1 mod a0)<>0 do
       begin
         q:=a0 div a1;       a2:=a0-q*a1;
         x2:=x0-q*x1;       y2:=y0-q*y1; {i++}
         a0:=a1;      a1:=a2;         x0:=x1;        x1:=x2;
         y0:=y1;      y1:=y2;
       end;
       nd:=a0;     x:=x0;y:=y0
   end;
procedure diofant(a,b,c:longint);
  {Процедура решения Дифантова уравнения ax+by=c
   На вход процедура получает коэффициенты a, b, c
   а на выходе процедура печатает решение на экран и в файл}
  var
    x,y,ndd,nd:longint;  h,hx,hy,ha,hb,hc:string;
    a1,b1,c1:longint;    tx,ty,ta:string;
begin
  tx:='';  ty:='';  ta:=''; {Строки для красивого вывода ответа}
  if (a<>0) and (b<>0)
    then
      begin
```

```
    nod(a,b,x,y,nd); {Нашли Наибольший общий делитель}
    if (c mod nd)<>0
    then    ta:='Уравнение не имеет решений в кольце Z'
    else
      begin
        a1:=a div nd;b1:=b div nd; c1:=c div nd; nod(a1,b1,x,y,ndd);
        x:=x*c1; y:=y*c1;
        {Решение найдено! Формулируем ответ}
        str(x,hx);str(y,hy);  str(a,ha);str(b,hb);str(c,hc);
        if hx='0'  then  tx:='X='  else  tx:='X='+hx;
        if hy='0'  then   ty:='Y='   else   ty:='Y='+hy;
        if y<0  then hy:='('+hy+')';  if a<0  then ha:='('+ha+')';
        if b<0  then hb:='('+hb+')';  if c<0  then hc:='('+hc+')';
        h:=hx+'*'+ha+'+'+hy+'*'+hb+'='+hc;
        ta:=h;   a1:=-a1; str(a1,ha);
        if a1>0  then ha:='+'+ha;  if a1=1  then ha:='';
        if a1=-1 then ha:='-';   str(b1,hb);  if b1>0  then hb:='+'+hb;
        if b1=1  then hb:='';    if b1=-1 then hb:='-';
        if ha='0'
          then   tx:=tx+', где t - целое'
          else   ty:=ty+ha+'t, где t - целое';
        if hb<>'0'  then  tx:=tx+hb+'t'
      end
  end
else
  begin
    if (a=0) and (b<>0)
      then
        begin
          if (c mod b)=0
            then
              begin tx:='X - любое целое';   c1:=c div b;
                str(c1,hy);   ty:='Y='+hy;  if c1>0  then hy:='+'+hy;
                str(b,hb);    if b<0   then hb:='('+hb+')';
                ta:='Любое*0'+hy+'*'+hb+'='+hc
              end
            else   ta:='Уравнение не имеет решений в кольце Z'
        end;
    if (a<>0) and (b=0)
      then
        begin
          if (c mod a)=0
            then
```

```
            begin
              ty:='Y - любое целое';   c1:=c div a;   str(c1,hx);
              tx:='X='+hx;    str(a,ha);   if a<0   then ha:='('+ha+')';
              ta:=hx+'*'+ha+'Любое*0='+hc
            end
          else  ta:='Уравнение не имеет решений в кольце Z'
        end;
      if (a=0) and (b=0)
        then
          begin
            if c=0 then
              begin
                ta:='Любое*0+Любое*0=0';  tx:='X - Любое целое';
                ty:='Y - Любое целое'
              end
            else  ta:='Уравнение не имеет решений в кольце Z'
          end
    end;
    TextColor(14);
   {Ответ сформирован в строках. Печатаем ответ}
    Writeln('Решение: ');   writeln(tx);   writeln(ty);
    writeln(ta);    Writeln(f,'Решение: ');   writeln(f,tx);
    writeln(f,ty);   writeln(f,ta)
end;
begin
  TextColor(14);  TextBackGround(1);  ClrScr;
  Assign(f,'c:/answer.txt'); {Файл для ответа}  rewrite(f);
  writeln('Программа решения диофантова уравнения вида
axy+bx+cy=d');  writeln('введите целые коэффициенты a,b,c,d');
  read(a,b,c,d);
  if a<>0  then begin
      l:=true; {Флаг существования решения}
      k:=0; {Счётик количества решений}
      {Определяем границы целочисленных значений x}
      if (b mod a)<>0
        then
          begin
            if b/a<0  then   ww:=-b div a   else   ww:=(-b div a)-1;
            AA:=(d-c*(ww+1))/(b+a*(ww+1)); DD:=(d-c*ww)/(b+a*ww)
          end
        else
          begin  AA:=(d*a-a*c+c*b)/a/a;  DD:=-(d*a+a*c+c*b)/a/a
         end;
```

```
if AA<DD
  then   begin  A0:=trunc(AA);   d0:=trunc(DD)+1  end
  else   begin  a0:=trunc(DD);  D0:=trunc(AA)+1 end;
str(a,ha);   str(b,hb);   str(c,hc);   str(d,hd);
if a<0 then ha:='('+ha+')'; if b<0 then hb:='('+hb+')';
if c<0 then hc:='('+hc+')'; hh:=ha+'xy+'+hb+'x+'+hc+'y='+hd;
Writeln('Поиск решения уравнения '+hh);
Writeln(f,'Поиск решения уравнения '+hh);   readln;
{Перебор}
for x:=a0 to d0 do
  if a*x+c<>0
    then
      begin
        yy:=(d-b*x)/(a*x+c);  {определяем знак yy}
        if yy>=0   then sgn:=1  else sgn:=-1;
        {Проверяем является ли yy целым}
        if yy=int(yy+sgn*0.0000001)
          then
            begin
              y:=trunc(yy+sgn*0.0001);   writeln('(',x,';',y,')');
              writeln(f,'(',x,';',y,')');   L:=false;   inc(k);
              writeln('Проверка...');  s:=a*x*y+b*x+c*y;
              if s=d
                then
                  begin
                    writeln('Решение выдерживает проверку :)');
                    writeln(f,'Решение выдерживает проверку :)')
                  end
                else
                  begin
                    writeln('Решение не выдерживает проверку :(');
                    writeln(f,'Решение не выдерживает проверку :(');
                  end;
              writeln; writeln(f)
            end
      end;
ll:=false;
{Обрабатывается вырожденный случай
 Этот случай может добавить некоторые решения}
if b*c+a*d=0
  then
    begin
      if (c mod a)=0
```

```
            then
              begin
                x:= -c div a;   writeln('(',x,';любое целое число)');
                writeln(f,'(',x,';любое целое число)');     ll:=true;
{Поднимаем флаг, что решений бесконечно много}
                l:=false
              end;
          if (b mod a)=0
            then
              begin
                y:= -b div a;    writeln('(Любое целое число;',y,')');
                writeln(f,'(Любое целое число;',y,')');    ll:=true;
{Поднимаем флаг, что решений бесконечно много}
                l:=false
              end;
        end;
    if l
      then
        begin  writeln('решений нет'); writeln(f,'решений нет')
        end
      else
        if ll
          then
            begin  writeln('Количество найденых решений - беско-
нечно много');   writeln(f,'Количество найденых решений - беско-
нечно много'); end
          else
        begin
          writeln('Количество найденых решений ',k);
          writeln(f,'Количество найденых решений ',k)
        end
      end
  else
    begin
      {Решаем диофантово уравнение bx+cy=d}  diofant(b,c,d)
    end;
 close(f); repeat until keypressed
end.
```