Тема 35. **Геометрия.**

**Основные сведения для решения планиметрических задач.**

1. Треугольники.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Медиана делит треугольник на два равновеликих (имеющих одинаковые площади) треугольника. Три медианы делят треугольник на шесть равновеликих треугольника. Отрезки, соединяющие точку пересечения медиан с вершинами, делят треугольник на три равновеликих треугольника.

Биссектрисой треугольника называется прямая, делящая его внутренний угол пополам.

Биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. (Рис. 1)

*BD : CD* = *АВ : АС*



 

   Рис. 1.

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла. Радиус окружности перпендикулярен стороне угла в точке касания.

Центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения биссектрис углов треугольника.

Центр окружности, описанной около треугольника, расположен в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

В подобных треугольниках пропорциональны все их линейные элементы (с одним и тем же *-* коэффициентом подобия): стороны, медианы, биссектрисы, векторы, радиусы вписанных и описанных окружностей и пр.

Отношение площадей подобных треугольников равно .

2. Четырехугольники.

Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называются параллелограммом. Свойства параллелограмма:

1. противоположные стороны параллелограмма равны;
2. противоположные углы параллелограмма равны;
3. диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам;
4. сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется ромбом. Диагонали ромбы взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его внутренних углов.

Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется прямоугольником.

В параллелограмм можно вписать окружность тогда и только тогда, когда он является ромбом.

Параллелограмм можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда он является прямоугольником.

Трапеция.

Четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две - нет, называется трапецией.

В трапецию можно вписать окружность тогда и только тогда, когда сумма боковых сторон равна сумме оснований.

Около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобочная.

В описанном около окружности четырехугольнике суммы противоположных сторон равны. В частности, если равнобочная трапеция описана около окружности, то ее средняя линия равна боковой стороне.

Во вписанном в окружность четырехугольнике суммы противоположных углов равны 180 .

3. Окружность и круг.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой.

Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен к ней.

Равные хорды окружности равноудалены от ее центра; равноудаленные от центра окружности хорды равны.

Если через точку , лежащую внутри окружности, проведены две хорды  и , то  (Рис. 2).

Если из точки , лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая , то (Рис. 3).

  

   

А

 

  

 Рис. 2. Рис. 3.
Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от них пропорциональные отрезки (рис. 4). 

    

 

 

  

 Рис. 4.

Вписанный угол (образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности) измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Центральный угол, образованный двумя радиусами окружности, измеряется дугой, на которую он опирается.

Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами (рис. 5).



   



  

   

 

  

  

 Рис. 5. Рис. 6. Рис. 7.

Угол между двумя секущими с вершиной вне окружности измеряется полуразностью двух дуг, заключенных между его сторонами (рис. 6). 

Касательные, проведенные к окружности из общей точки, расположенной вне окружности, равны:  (рис. 7).

Угол между двумя касательными (описанный угол) измеряется полуразностью большей и меньшей дуг, заключенных между точками касания (рис. 7). 

Угол между двумя хордами с вершиной внутри круга измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых заключена между его сторонами, другая - между их продолжениями (рис. 8) 

 

  

 

  

О

 

 

 Рис. 8. Рис. 9.

Если из точки вне круга проведены касательная и секущая, то квадрат касательной равен произведению отрезка секущей на ее внешнюю часть (рис. 9) 

 ***Основные******формулы (планиметрия).***

 Произвольный треугольник *( -* стороны;  - противолежащие им углы;  -полупериметр;  -радиус описанной окружности;  - радиус вписанной окружности;  - площадь;  - высота, проведенная к стороне )

     (теорема косинусов) (теорема синусов) .

 Прямоугольный треугольник ( - катеты;  - гипотенуза;  - проекции на гипотенузу)         

 Равносторонний треугольник   

 Произвольный выпуклый четырехугольник ( и  - диагонали,  - угол между ними, - площадь) .

 Параллелограмм ( и  - смежные стороны,  - угол между ними,  - высота, проведенная к стороне )   .

 Ромб 

 Прямоугольник 

 Квадрат (- диагональ) 

 Трапеция ( и  - основания,  - расстояние между ними,  - средняя линия)  

 Описанный многоугольник ( - полупериметр,  - радиус вписанной окружности) 

 Правильный многоугольник ( - сторона правильного - угольника,  - радиус описанной окружности,  - радиус вписанной окружности)    

 Окружность, круг ( - радиус,  - длина окружности,  - площадь круга)  

 Сектор ( - длина дуги, ограничивающей сектор,  - градусная мера центрального угла,  - радиальная мера центрального угла)  

***Дополнительные соотношения между элементами фигур.***

 Длина медианы треугольника выражается формулой    где  - длины сторон треугольника.

 Длина стороны треугольника выражается формулой    где  - длины медиан треугольника.

 Длина биссектрисы треугольника выражается формулой  где  и  - длины двух сторон   и  - отрезки третьей стороны.

 Длина биссектрисы треугольника выражается через длины его сторон  и  по формуле 

 Для всякого треугольника зависимость между его высотами  и радиусом  вписанной окружности выражается формулой 

 Площадь  равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты, т.е. 

 Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим ее основания  