**Итоговое повторение курса планиметрии с привлечением метода ключевой задачи**

Метод составления системы задач, построенной по принципу – каждая задача системы использует результат решения одной какой-либо (ключевой) задачи, будем называть ***методом ключевой задачи***.

Существует две точки зрения на понятие ключевой задачи. Первая из них состоит в рассмотрении ключевой задачи как задачи-факта. Зачастую такая ключевая задача оказывается дополнительной теоремой школьного курса. Вторая точка зрения состоит в рассмотрении ключевой задачи как задачи-метода. При изучении какой-либо темы школьного курса можно отобрать определенный минимум задач, овладев методами решения которых, учащиеся будут в состоянии решить любую задачу на уровне программных требований по изучаемой теме.

«Ключевая» задача является средством решения других задач, поэтому ее знание учащимися обязательно. Разворачивающаяся система задач, с одной стороны, способствует усвоению факта или метода решения, изложенных в «ключевой» задаче, с другой, позволяет увидеть взаимосвязи отдельных тем школьного курса математики. Поэтому составленная данным методом система задач является эффективным средством повторения, обобщения и систематизации учебного материала.

**Свойство биссектрисы**

**Ключевая задача.** Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки пропорциональные прилежащим сторонам.

|  |  |
| --- | --- |
| *F*  *B*  *C*  *D*  *А* | Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем *CF*, параллельно биссектрисе *BD*. Тогда по теореме о пропорциональных отрезках .  Треугольник *BCF* – равнобедренный. |

Так как углы  и  равны как соответственные при параллельных прямых *BD* и *CF* и секущей *AF*, углы  и  равны как накрест лежащие при параллельных прямых *BD* и *CF* и секущей *ВС*,  по свойству биссектрисы.

Следовательно, *BF=BC*. Тогда .

**Следствие:**

|  |  |
| --- | --- |
| *F*  *В*  *D*  *С*  *А* | Если *BD* – биссектриса внешнего угла треугольника *АВС*, то .  *Доказательство аналогичное*. |

**Задачи системы:**

**Задача 1.** В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки 3 и 4. Найдите площадь треугольника.

|  |  |
| --- | --- |
| *a*  *b*  4  3  *B*  *С*  *A*  *D* | Р е ш е н и е. Пусть , . Тогда по свойству биссектрисы , а по теореме Пифагора . Решая систему получим: , . Вычисляя площадь треугольника по формуле , получим .  О т в е т: 11,76. |

**Задача 2.** В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса острого угла. Отрезок, соединяющий ее с основание с точкой пересечения медиан, перпендикулярен катету. Найдите острые углы треугольника.

|  |  |
| --- | --- |
| *O*  *B*  *D*  *С*  *M*  *A* | Р е ш е н и е. Пусть *AD* – биссектриса прямоугольного треугольника *АВС*.  Точка *О* – точка пересечения медиан. Тогда по условию задачи .  По свойству медиан .  По теореме Фалеса . |

Так как *AD* – биссектриса, то . Следовательно, .

Так как гипотенуза *АВ* в два раза больше катета *АС*, то . Следовательно, .

О т в е т: 300; 600.

**Задача 3.** В равнобедренный треугольник *АВС* с основанием *АС* вписана окружность с центром *О*. Луч *АО* пересекает сторону *ВС* в точке *К*, причем , . Найдите периметр треугольника *АВС*.

|  |  |
| --- | --- |
| *18*  *12*  *6*  *К*  *В*  *С*  *А*  *О* | Р е ш е н и е. Так как *О* – центр вписанной окружности, то *АК* – биссектриса треугольника *АВС*. Тогда . Имеем , .  .  О т в е т: 45. |

**Задача 4.** В окружность радиуса см вписан треугольник *АВС*, в котором , а сторона *АВ* в два раза больше стороны *АС*. В треугольнике проведена биссектриса *АМ*. Найдите длину отрезка *С.*

|  |  |
| --- | --- |
| *12-х*  *х*  *М*  *С*  *А*  *В* | Р е ш е н и е. *АМ* – биссектриса треугольника *АВС*. Тогда .  Чтобы воспользоваться свойством биссектрисы, необходимо найти длину стороны ВС. По теореме синусов . Отсюда . |

Пусть , тогда . Имеем , откуда .

О т в е т: 4.

**Задача 5.** В треугольнике *АВС* проведена биссектриса *ВЕ*, которую центр *О* вписанной окружности делит в отношении . Найдите *АВ*, если , .

|  |  |
| --- | --- |
| 3  *D*  *M*  *О*  4  8  *k*  2*k*  *A*  *В*  *C*  *Е* | Р е ш е н и е. Так как *О* – центр вписанной окружности, то *АМ* и *CD* – биссектрисы.  По свойству биссектрисы треугольника *ВСЕ* , , .  Следовательно, . |

По свойству биссектрисы треугольника *АВЕ* , , .

О т в е т: 6.

**Задача 6.** Найдите стороны треугольника, если медиана и высота, проведенные из одного угла, делят его на три равные части, а длина медианы равна 10.

|  |  |
| --- | --- |
| *x*  *x*  2*x*  *A*  *B*  *K*  *N*  *С* | Р е ш е н и е. Пусть *СN* – медиана, а *СК* – высота.  Так как *СК* – высота и биссектриса, то треугольник *CNB* равнобедренный, следовательно,  и .  , следовательно, . |

*CN* – биссектриса в треугольнике *АСК*, следовательно, 

Треугольник  – прямоугольный, поэтому , , , , .

О т в е т: .

**Задача 7.** Биссектриса *BD* внутреннего угла треугольника *АВС* равна 6, а биссектриса *ВF* смежного с ним угла равна 8. Найдите площадь треугольника *АВС*, если .

|  |  |
| --- | --- |
| 10  6  8  *F*  *M*  *C*  *A*  *D*  *В* | Р е ш е н и е. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны, поэтому .  по теореме Пифагора.  По свойству биссектрисы .  Пусть , тогда , , . |

Имеем , .

.

Чтобы найти площадь треугольника *АВС* необходимо знать длину высоты *ВМ*, проведенной к стороне *АС*. Из треугольника *BDF* найдем . Тогда , .

, .

О т в е т: 10.

**Задачи для самостоятельного решения**

1. В прямоугольном треугольнике биссектриса острого угла делит противоположный катет на отрезки длиной 4 и 5. Найдите площадь треугольника.

О т в е т: 54.

2. В треугольнике *ВСЕ* , . Отрезок *СК* – биссектриса треугольника. Найдите *КЕ*, если радиус описанной около треугольника окружности равен .

О т в е т: 18.

3. Дан треугольник *АВС*. Его высота *BD* равна 30. Из основания *Е* биссектрисы *АЕ* опущен перпендикуляр *EF* на сторону *АС*. Найдите длину этого перпендикуляра, если .

О т в е т:16.

4. В треугольнике *АВС* из вершины *В* проведена высота *BD* и биссектриса *BL*. Найдите площадь треугольника *BLD*, если известны длины сторон треугольника *АВС*: см; см; см.

О т в е т: 2,25.

5. В треугольнике *АВС* биссектриса угла *С* пересекает сторону *АВ* в точке *D*. Найдите площадь треугольника *ADC*, если , , .

О т в е т: .

6. В треугольнике *АВС* , , . Найдите отношение, в котором точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла *В*.

О т в е т: 1:2.

7. Основание равнобедренного треугольника равно 8, а боковая сторона 12. Найдите длину отрезка, соединяющего точки пересечения биссектрис углов при основании с боковыми сторонами треугольника.

О т в е т: 4,8.