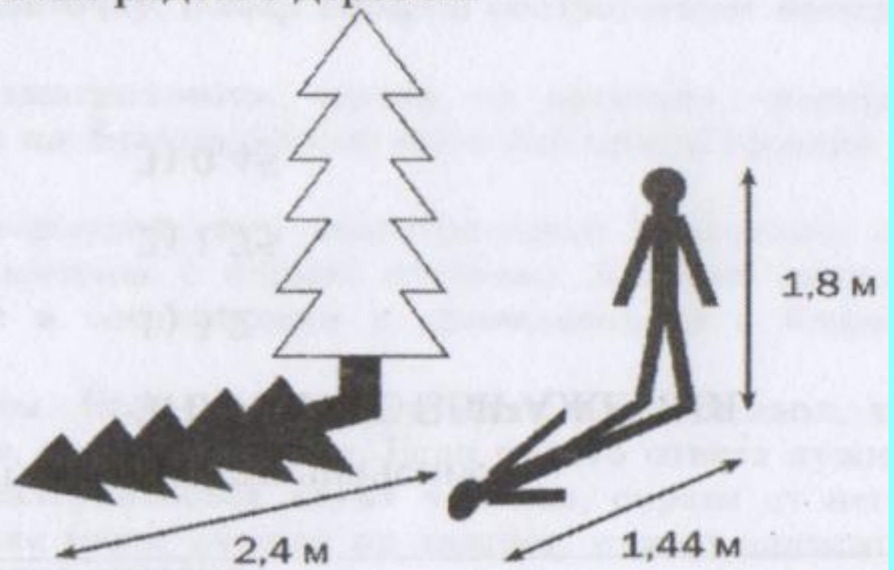
Геометрические составляющие ГИА 9 по математике 2012 г.

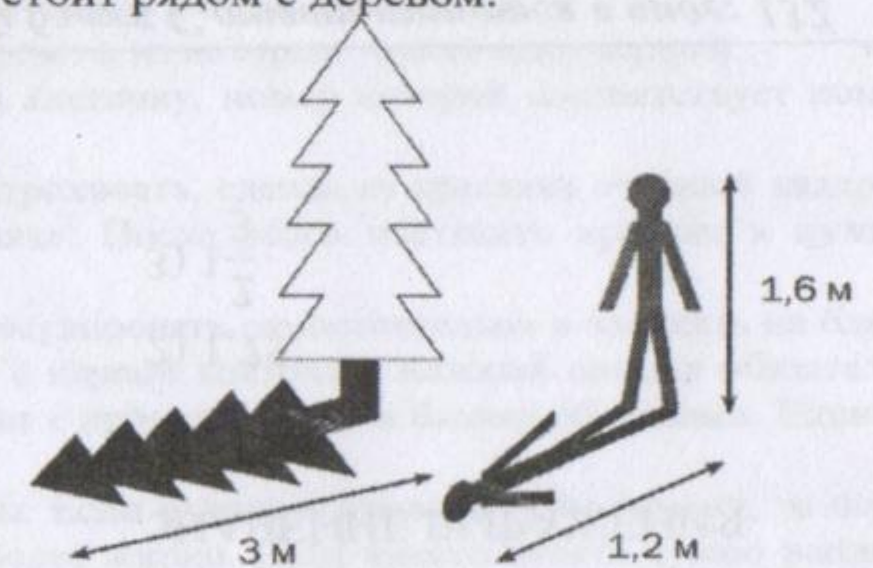
Окорокова Ю. М.
МБОУ СОШ № 2 имени Короленко В. Г.
Семинар для учителей математики
16. 04. 2012 г.

В2. Подобие треугольников

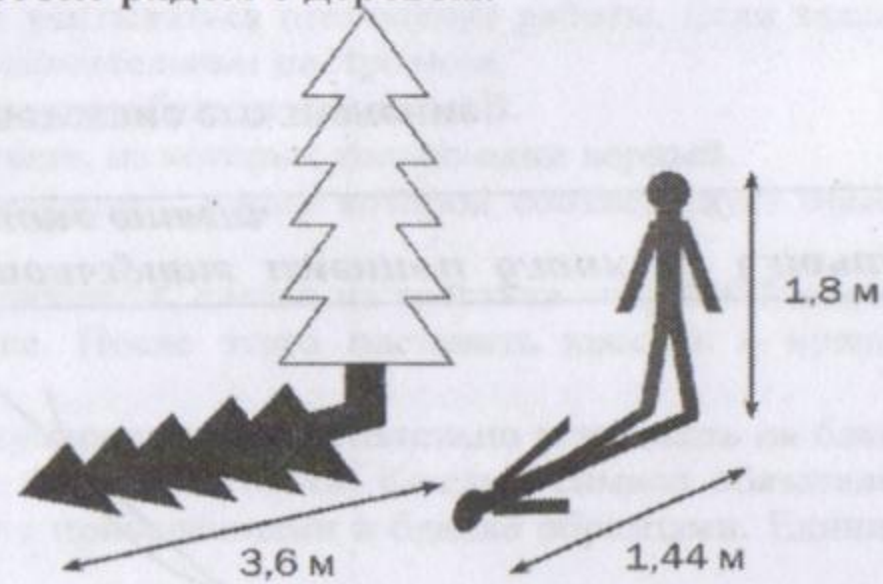
В2. Человек, рост которого равен 1,8 м, стоит рядом с деревом. Найдите высоту дерева (в метрах), если длина тени человека равна 1,44 м, а длина тени дерева равна 2,4 м.



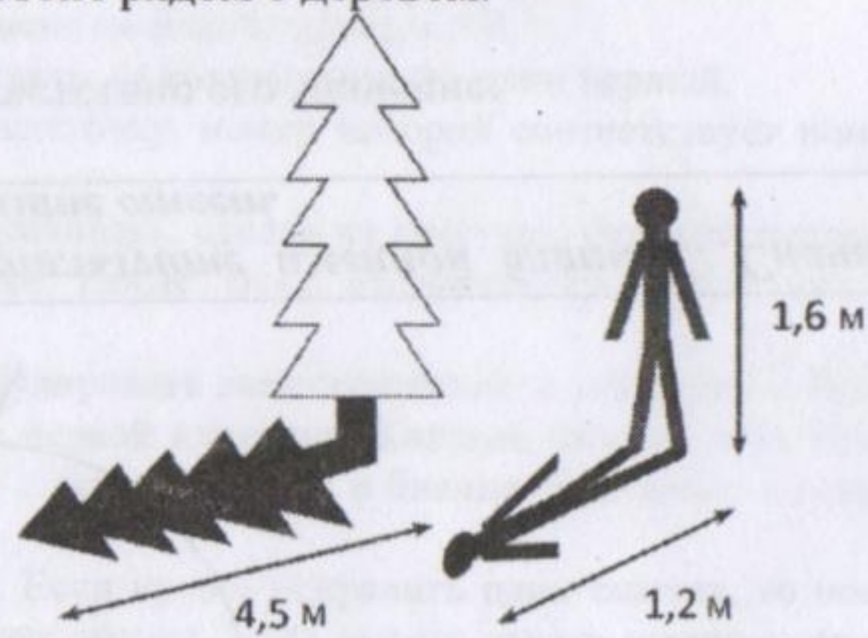
В2. Человек, рост которого равен 1,6 м, стоит рядом с деревом. Найдите высоту дерева (в метрах), если длина тени человека равна 1,2 м, а длина тени дерева равна 3 м.



B2. Человек, рост которого равен 1,8 м, стоит рядом с деревом. Найдите высоту дерева (в метрах), если длина тени человека равна 1,44 м, а длина тени дерева равна 3,6 м.



B2. Человек, рост которого равен 1,6 м, стоит рядом с деревом. Найдите высоту дерева (в метрах), если длина тени человека равна 1,2 м, а длина тени дерева равна 4,5 м.



В3. Площади геометрических фигур, окружность

В3. Площадь прямоугольника равна 120 $см^2$, при этом одна из его сторон на 14 см больше другой. Чему равна длина меньшей стороны прямоугольника?

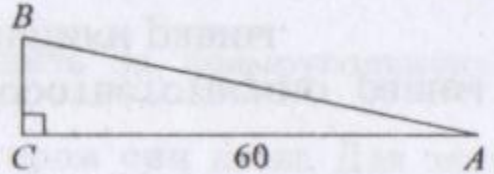
В3. Площадь прямоугольника равна 120 $см^2$, при этом одна из его сторон на 14 см больше другой. Чему равна длина большей стороны прямоугольника?

В3. Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 40° и 83°. Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

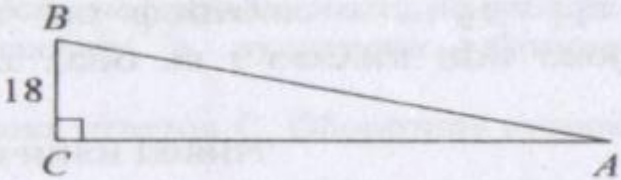
В3. Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 20° и 41°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

В4. Решение прямоугольного треугольника, площадь треугольника

В4. В треугольнике ABC угол C — прямой, $AC = 60$, $\sin\angle ABC = \frac{40}{41}$. Найдите AB.



В4. В треугольнике ABC угол C — прямой, $BC = 18$, $\sin\angle BAC = \frac{9}{41}$. Найдите AB.



В4. В треугольнике одна из сторон равна 10, другая равна 9, а косинус угла между ними равен $4/5$. Найдите площадь треугольника.

В4. В треугольнике одна из сторон равна 6, другая равна 4, а синус угла между ними равен $2/3$. Найдите площадь треугольника.

В11. Задание на знание теоретического материала по геометрии

В11. Укажите в ответе номера **верных** утверждений.

1) Центром вписанной окружности треугольника является точка пересечения его биссектрис.
2) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.
3) Если при пересечении двух прямых третьей накрест лежащие углы равны, то прямые перпендикулярны.
4) Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

В11. Укажите в ответе номера **верных** утверждений.

1) Центром вписанной окружности треугольника является точка пересечения его медиан.
2) Если в прямоугольнике диагонали равны, то этот прямоугольник – квадрат.
3) Если при пересечении двух прямых третьей накрест лежащие углы равны 90°, то эти две прямые параллельны.
4) Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

B11. Укажите в ответе номера **верных** утверждений.

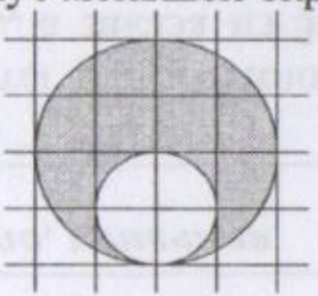
1) Центром вписанной окружности треугольника является точка пересечения его высот.
2) Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб.
3) Если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны, то прямые перпендикулярны.
4) Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

B11. Укажите в ответе номера **верных** утверждений.

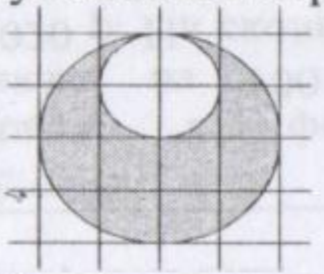
1) Центром описанной окружности треугольника является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
2) Если в прямоугольнике диагонали перпендикулярны, то этот прямоугольник – квадрат.
3) Если при пересечении двух прямых третьей сумма накрест лежащих углов равна $180°$, то прямые параллельны.
4) Если два угла и сторона одного треугольника равны двум углам и стороне другого треугольника, то такие треугольники равны.

C2. Свойства площади плоской фигуры, работа с формулами

C2. Найдите площадь закрашенной части круга, если радиус меньшей окружности равен 2.



C2. Найдите площадь закрашенной части круга, если радиус большей окружности равен 2.



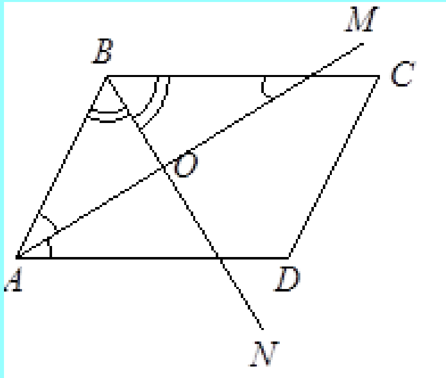
C2. Из формулы радиуса вписанной в прямоугольный треугольник окружности $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ выразите катет a.

C2. Из формулы мощности постоянного тока $P = I^2 R$ выразите силу тока I. Все величины положительны.

С5. Задача на доказательство

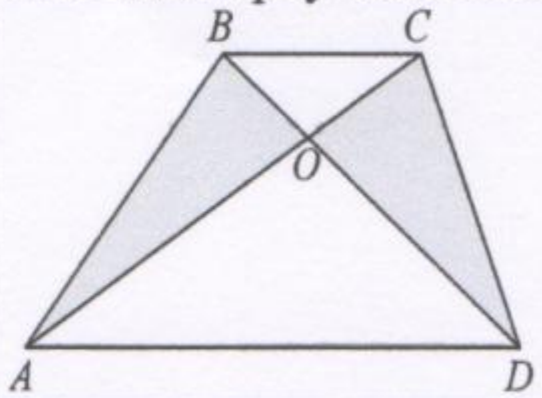
- Трудно предсказать, как учащиеся будут решать задания по геометрии. Но важно помнить, что проверяют данные задания – умение решать стандартные задачи по геометрии на доказательство. Поэтому 0 баллов ставится, если:
- - учащийся допустил ошибку геометрического характера;
- - учащийся не обосновал геометрические утверждения, указанные в решении (есть правильные выводы, но совершенно нет их доказательства), пропустил логические ходы решения.
- 1 балл снимается с решения, если учащийся допустил речевые ошибки при формулировании утверждений (иногда в таких случаях говорят, что геометрически мыслит правильно, а с литературой проблемы).

Эксперты должны снимать баллы при недостаточном обосновании утверждений. Приведем пример. С5 из варианта 3.



Предположим, учащийся пишет: «Так как угол *DAM равен углу AMB и* угол *DAM равен углу BAM , то треугольник ABM - равнобедренный. Тогда* биссектриса *BO в нем является высотой, что и требовалось доказать».* Думается, что, если учащемуся задать ряд вопросов «А почему?», он на них ответит. Но мы оцениваем не то, что учащийся думал, а что он написал в решении. В задачах на доказательство ссылки на теоремы, свойства фигур и т.д. обязательны, они являются элементом решения задачи. Данное решение содержит все логические ходы, но нужных ссылок нет, поэтому есть смысл поставить 2 балла из 3.

А вот если какие-нибудь логические ходы пропущены, то смело можно ставить 0 баллов. Например, в том же задании учащийся написал: «Из рисунка очевидно, что треугольник *ABM - равнобедренный. Тогда* биссектриса *BO, проведенная к основанию, по свойству равнобедренного* треугольника, является высотой, что и требовалось доказать». Чертеж служит лишь для наглядности, но не может служить основой решения!

C5	В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны. 

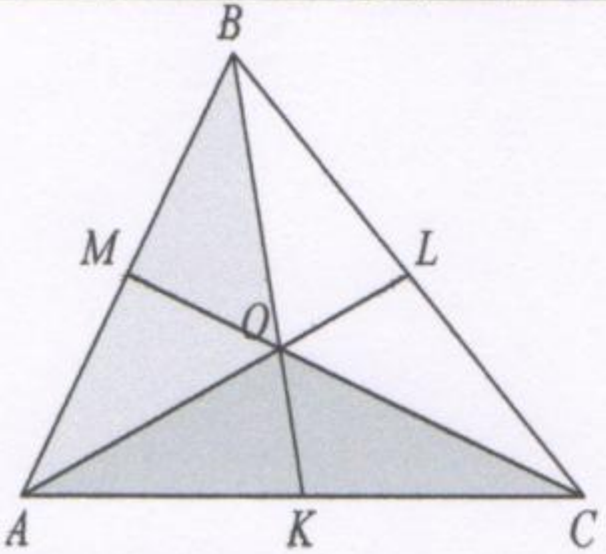
Доказательство.

Так как ABCD – трапеция, то расстояния от точек B и C до прямой AD равны (и равны высоте трапеции h). Тогда $S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot h = S_{ACD}$. Поэтому можно записать: $S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOD} = S_{ACD} - S_{AOD} = S_{COD}$.

Критерии:

Доказательство верное	3
Доказательство в целом верное, но содержит неточности в формулировках геометрических утверждений	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0

С5	В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COA равны.



Доказательство:

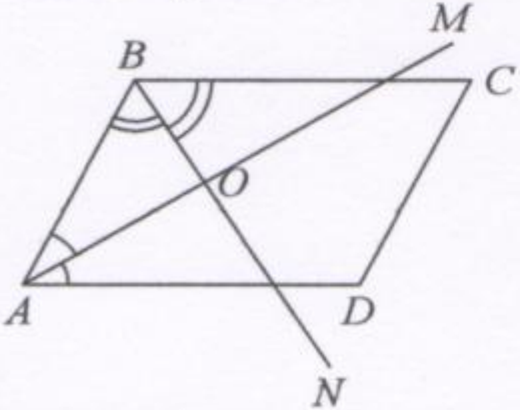
$S_{ALB} = S_{ALC}$ по свойству медианы. При этом $S_{AOC} = \frac{2}{3} S_{ALC} = \frac{2}{3} S_{ALB} = S_{AOB}$.

Критерии:

Доказательство верное	3
Доказательство в целом верное, но содержит неточности в формулировках геометрических утверждений	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0

C5	Докажите, что биссектрисы двух соседних углов параллелограмма перпендикулярны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ параллелограмм, и в нём проведены биссектрисы AM и BN.



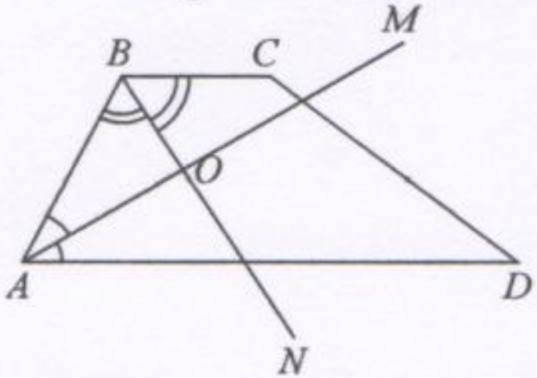
Поскольку углы $\angle A$ и $\angle B$ внутренние односторонние при параллельных прямых BC и AD и секущей AB, сумма этих углов равна $180°$. Значит, $\angle BAM + \angle ABN = 90°$. Следовательно, прямые AM и BN не параллельны, а поэтому пересекаются в точке O, причем сумма двух углов треугольника AOB равна $90°$. Поэтому этот треугольник прямоугольный с прямым углом $\angle AOB$, то есть $AM \perp BN$.

Критерии:

Доказательство верное	3
Доказательство в целом верное, но содержит неточности в формулировках геометрических утверждений	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0

C5	Докажите, что в трапеции биссектрисы двух углов при одной боковой стороне перпендикулярны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ трапеция с боковой стороной AB, и проведены биссектрисы AM и BN.



Поскольку углы $\angle A$ и $\angle B$ внутренние односторонние при параллельных прямых BC и AD и секущей AB, сумма этих углов равна $180°$. Значит, $\angle BAM + \angle ABN = 90°$. Следовательно, прямые AM и BN не параллельны, а поэтому пересекаются в точке O, причем сумма двух углов треугольника AOB равна $90°$. Поэтому этот треугольник прямоугольный с прямым углом $\angle AOB$, то есть $AM \perp BN$.

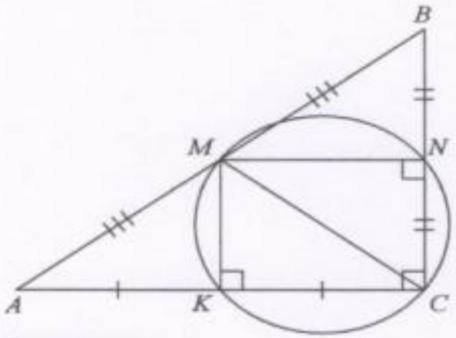
Критерии:

Доказательство верное	3
Доказательство в целом верное, но содержит неточности в формулировках геометрических утверждений	2
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям	0

C8. Задача повышенной сложности по геометрии на вычисление

- Рекомендации примерно те же, что и для C5. Надо лишь учитывать, что задача C8 проверяет умение решать задачи повышенной сложности по геометрии на вычисление. Поэтому, следует менее строго относиться к недостаточным ссылкам на формулировки базовых теорем школьного курса геометрии и свойств фигур, чем при решении C5. Однако все логические ходы и необходимые вычисления должны быть выполнены!

C8	Длина медианы CM треугольника ABC равна 5 см. Окружность с диаметром CM пересекает стороны AC и BC в их серединах. Найдите периметр треугольника ABC, если его площадь равна 24 см^2.



Решение

Назовем K и N точки пересечения окружности со сторонами AC и BC. Угол MKC вписан в окружность и опирается на её диаметр. Следовательно, этот угол прямой. Значит, в треугольнике AMC медиана MK одновременно является высотой. Поэтому треугольник AMC равнобедренный. Тогда $AM = MC = 5$ см. Аналогично, $BM = MC = 5$ см. Поэтому $MC = \frac{1}{2}AB$. Следовательно, треугольник ABC прямоугольный, и его гипотенуза AB равна 10 см. Обозначим катеты x см и y см. Получаем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy = 24, \\ x^2 + y^2 = 100, \end{cases}$$

откуда

$$x^2 + 2xy + y^2 = 196.$$

Учитывая, что x и y положительные числа, находим:

$$x + y = 14.$$

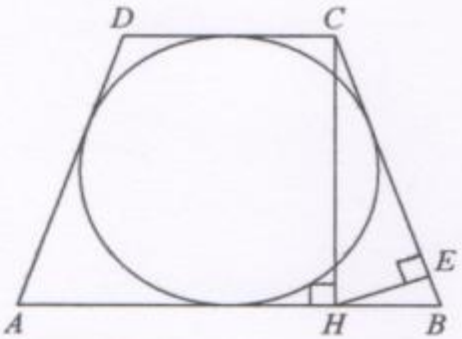
Следовательно, периметр треугольника равен $14 + 10 = 24$ (см).

Ответ: 24 см.

Критерии:

Имеется полное обоснованное решение	4
Рассуждения верные, все утверждения геометрического характера обоснованы, но решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу.	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям.	0

C8	В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $AB = 7$ и $CD = 5$ вписана окружность. Из точки C проведена высота CH, а из точки H перпендикуляр HE к стороне BC. Найдите CE.



Решение.

В трапецию вписана окружность, следовательно, сумма боковых сторон равна сумме оснований. Трапеция равнобедренная, поэтому

$$BC = \frac{AB + CD}{2} = 6.$$

$$BH = \frac{AB - CD}{2} = 1.$$

В прямоугольном треугольнике BHC

$$BH^2 = BE \cdot BC,$$

откуда $BE = \frac{1}{6}$. Следовательно, $CE = 6 - \frac{1}{6} = 5\frac{5}{6}$.

Ответ: $5\frac{5}{6}$

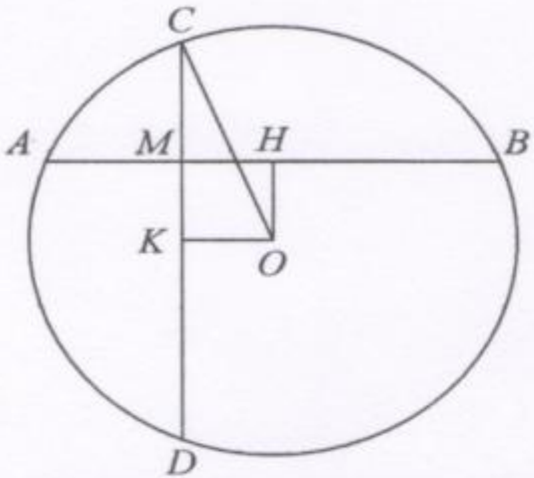
Критерии:

Имеется полное обоснованное решение	4
Рассуждения верные, все утверждения геометрического характера обоснованы, но решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу.	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям.	0

C8	В окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них делится другой хордой на отрезки, равные 3 и 7. Найдите расстояние от центра окружности до каждой из хорд.

Решение.

Пусть AB и CD – хорды, и M – точка их пересечения, $AM = CM = 3$ и $MB = MD = 7$.



Длины хорд одинаковы, поэтому расстояния от центра окружности O до хорд равны между собой и равны стороне квадрата $HOKM$, где H – середина AB, а K – середина CD.

$AH = \frac{AB}{2} = 5$. Поэтому $MH = AH - AM = 5 - 3 = 2$.

Ответ: расстояние до каждой из хорд равно 2.

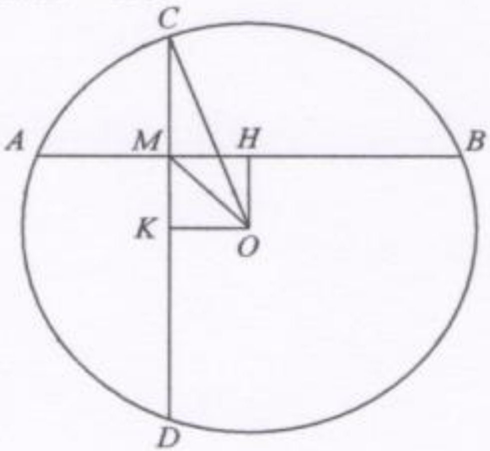
Критерии:

Имеется полное обоснованное решение	4
Рассуждения верные, все утверждения геометрического характера обоснованы, но решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу.	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям.	0

C8	В окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды. Каждая из них делится другой хордой на отрезки, равные 5 и 11. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения хорд.

Решение.

Пусть AB и CD – хорды, и M – точка их пересечения, $AM = CM = 5$ и $MB = MD = 11$.



Длины хорд одинаковы, поэтому расстояния от центра окружности O до хорд равны между собой и равны стороне квадрата $HOKM$, где H – середина AB, а K – середина CD.

$AH = \dfrac{AB}{2} = 8$. Поэтому $MH = AH - AM = 8 - 5 = 3$. Следовательно, диагональ квадрата OM равна $3\sqrt{2}$.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

Критерии:

Имеется полное обоснованное решение	4
Рассуждения верные, все утверждения геометрического характера обоснованы, но решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу.	3
Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям.	0

	Вариант 9201	Вариант 9202	Вариант 9203	Вариант 9204
A1	4	3	3	1
A2	1	4	4	3
A3	3	3	3	4
B1	23	29	25	20
B2	3	4	4,5	6
B3	6	20	97	160
B4	61,5	82	27	8
B5	0,4	2,5	-0,625	-1,6
B6	4	9	6	11
B7	0,94	0,96	0,98	0,97
B8	13	24	260	-22
B9	-10	-2	12,6	4,8
B10	15	23	3	3
B11	12	3	24	12
B12	15	40	-10	-12
C1	А1Б3В2	А3Б1В2	А1Б3В2	А3Б2В1
C2	12π	3π	$2r-b+c$	$\sqrt{\frac{P}{R}}$
C3	$(0; 4)$	$(-\infty; 0)\cup(4; +\infty)$	$(-30; 0)$	$(-\infty; -7]\cup[7; +\infty)$

Спасибо за внимание!