Тема: «Применение задач на построение одним циркулем в школьном курсе геометрии»

Учитель математики ГБОУ СОШ с углубленным

изучением музыки и хореографии

Толкунова Софья Сергеевна

Москва 2012 год

Содержание

Введение 3-6

1.Применение задач на построение одним циркулем в школьном курсе геометрии 7-10

1.1.Текст задач на построение с помощью циркуля на факультативных занятиях и для самостоятельного решения 11

1.2. Решения задач на построение с помощью циркуля на факультативных занятиях и для самостоятельного решения 12 - 17

Заключение 18

Список использованной литературы 19

 Введение

 Геометрические построения являются существенным фактором математического образования; они представляют собой мощное орудие геометрических исследований.

 Под геометрическими построениями понимают построения, производимые при помощи линейки и циркуля.

 Традиционное ограничение орудий геометрических построений только циркулем и линейкой восходит к глубокой древности. Знаменитая геометрия Евклида (третий век до нашей эры) была основана на геометрических построениях, выполняемых циркулем и линейкой; при этом циркуль и линейка рассматривались как равноправные инструменты; было совершенно безразлично, как выполнялись отдельные построения: с помощью циркуля и линейки, или с помощью одного циркуля, или одной линейки.

 Эти построения теоретически абсолютно точны. Практически эти построения действительно очень точны, но, тем не менее и они, как и все построения, дают поводы к ошибкам (например, вследствие того, что карандашные линии имеют толщину).

 Предполагается, что линейка как инструмент геометрических построений не имеет масштабных делений и с её помощью можно провести прямую, проходящую через две данные или построенные точки. Никаких других операций выполнить линейкой нельзя. Для того, чтобы линейка была правильной, необходимо, чтобы её края были прямолинейны. Чтобы убедиться, выполнено ли это условие, пользуются самим определением прямой линии. Проводят сначала линию вдоль по краю линейки, затем переворачивают линейку и прикладывают её тем же краем с другой стороны к проведённой линии. Если линейка достаточно верна, то вторая линия, проведённая вдоль края линейки в её новом положении, должна совпадать с первоначальной.

 Циркуль состоит из двух заострённых стержней, соединённых между собой шарниром. Растворение циркуля есть расстояние между остриями; с помощью циркуля как инструмента геометрических построений можно описать окружность с центром в данной или построенной точке и радиусом, равным данному или построенному отрезку.

 Кроме этих двух инструментов на практике употребляются ещё два инструмента: угольник и транспортир.

 Угольник – это прямоугольный треугольник. Хороший угольник должен удовлетворять двум условиям:

1. стороны должны быть прямолинейны;
2. угол угольника должен быть прямой.

Первое из этих условий проверяется так же, как для линейки; угольники, которыми приходится пользоваться на практике, обычно удовлетворяют ему с достаточной степенью точности. Чтобы проверить, выполняется ли второе, прикладывают угольник к краю линейки и проверяют прямую вдоль того края, который должен быть перпендикулярен к линейки. Прикладывая затем угольник в обратном направлении проводят снова прямую, которая должна совпасть с первой. Это второе условие часто выполняется только приближённо; поэтому второе условие и не предполагается в точных геометрических построениях.

Транспортир служит для измерения углов в градусах. Он обыкновенно состоит из рогового или медного полукруга, разделённого на 180 частей. При этом деления могут быть нанесены только приближённо; транспортир, будучи полезен на практике, не является геометрическим инструментом.

Поэтому уже давно было замечено, что циркуль является более точным, более совершенном, чем линейка, что некоторые построения можно выполнить одним циркулем без употребления линейки, например разделить окружность на шесть равных частей, построить точку, симметричную данной точке относительно данной прямой, и т.д. Было обращено внимание на тот факт, что при резьбе на тонких металлических пластинках, при разметке делительных кругов астрономических инструментов пользуются, как правило, одним только циркулем. Последнее, вероятно, и послужило толчком к исследованию геометрических построений, выполняемых одним циркулем.

В 1797 году итальянский математик, профессор университета в Павии, Лоренцо Маскерони опубликовал большую работу «Геометрия циркуля», которая позже была переведена на французский и немецкий языки. В этой работе было доказано следующее предположение:

«Все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, могут быть точно решены и одним только циркулем».

Это утверждение было оригинальным способом с помощью инверсии доказано А. Адлером в 1890 году. Он также предположил общий метод решения геометрических задач на построение одним лишь циркулем. В 1928 году датский математик Гьельмслев нашёл в книжном магазине Копенгагена книгу Г. Мора под названием «Датский Евклид», изданную в 1962 году в Амстердаме. В первой части этой книги дано полное решение проблемы Маскерони. Таким образом, задолго до Маскерони было показано, что все геометрические построения, выполнимые с помощью циркуля и линейки, могут быть выполнены с помощью одного только циркуля.

Раздел геометрии, изучающий геометрические построения одним циркулем, называют геометрией циркуля.

В 1833 году швейцарский геометр Якоб Штейнер опубликовал работу «Геометрические построения, производимые с помощью прямой линии и неподвижного круга», а которой наиболее полно исследовал построения одной линейкой. Основной результат этой работы можно сформулировать в виде предложения:

Каждая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена и одной линейкой, если в плоскости чертежа дана постоянная окружность и её центр.

Таким образом, чтобы линейку сделать равносильной циркулю, достаточно однократное употребление циркуля.

Великий русский математик Н.И.Лобачевский в первой половине 19 века открыл новую геометрию, получившую впоследствии название неевклидовой геометрии, или геометрии Лобачевского. В последнее время, благодаря усилиям большого числа учёных развивается теория геометрических построений в плоскости Лобачевского.

А.С.Смогоржевский, В.Ф.Рогаченко, К.К.Мокрищев и другие математики в своих работах провели исследования построений в плоскости Лобачевского без помощи линейки, при этом была доказана возможность построений, аналогичных построениям Маскерони в евклидовой плоскости.

Преобладание исследований по общим вопросам привело к оформлению в работах наших учёных достаточно полной и строгой теории геометрических построений в плоскости Лобачевского, едва ли намного уступающей в своей завершённости теории геометрических построений в евклидовой плоскости.

Данную тему я предлагаю включить в программу факультатива по математике в 7 классе.

 Применение задач на построение одним циркулем в школьном курсе геометрии

Геометрические задачи на построение, возможно, самые древние математические задачи. Кому-то они сейчас могут показаться не очень интересными и нужными, какими-то надуманными. И в самом деле, где и зачем может понадобиться умение с помощью циркуля построить правильный семнадцатиугольник или треугольник по трем высотам, или даже просто сделать построение параллельной прямой. Современные технические устройства сделают все эти построения и быстрее, и точнее, чем любой человек.

 И все же без задач на построение геометрия перестала бы быть геометрией. Геометрические построения являются весьма существенным элементом изучения в школьном курсе геометрии.

В чем же особенность этих задач? Задачи на построение не просты. Не существует единого алгоритма для решения всех таких задач. Каждая из них по-своему уникальна, и каждая требует индивидуального подхода для решения. Именно поэтому научиться решать задачи на построение чрезвычайно трудно, а, порой, практически невозможно. Но эти задачи дают уникальный материал для индивидуального творческого поиска путей решения с помощью своей интуиции и подсознания.

Суть решения задачи на построение состоит в том, что требуется построить наперед указанными инструментами некоторую фигуру, если дана некоторая фигура и указаны некоторые соотношения между элементами искомой фигуры и элементами данной фигуры. Каждая фигура, удовлетворяющая условиям задачи, называется решением этой задачи. Найти решение задачи на построение – значит свести ее к конечному числу основных построений, то есть указать конечную последовательность основных построений, после выполнения которых, искомая фигура будет уже считаться построенной в силу принятых аксиом конструктивной геометрии.

Еще в IV в. до н. э. древнегреческие геометры разработали общую схему решения задач на построение, которой мы пользуемся и теперь. Процесс решения задачи разбивают на 4 этапа: анализ, построение, доказательство и исследование. Рассмотрим каждый этап более подробно.

Первый этап – анализ. Это важный этап решения задачи, который мы понимаем как поиск способа решения задачи на построение. На этом этапе должны быть подмечены такие зависимости между данными фигурами и искомой фигурой, которые позволили бы в дальнейшем построить эту искомую фигуру.

Второй этап – построение – состоит из двух частей: 1) перечисление в определенном порядке всех элементарных построений, которые нужно выполнить, согласно анализу, для решения задачи; 2) непосредственное выполнение этих построений на чертеже при помощи чертежных инструментов.

Третий этап – доказательство. После того как фигура построена, необходимо установить, удовлетворяет ли она условиям задачи, то есть показать, что фигура, полученная из данных элементов определенным построением, удовлетворяет всем условиям задачи. Значит, доказательство существенно зависит от способа построения.

Четвертый этап – исследование. При построении обычно ограничиваются отысканием одного какого-либо решения, причем предполагается, что все шаги построения действительно выполнимы. Для полного решения задачи нужно еще выяснить следующие вопросы: 1) всегда ли (то есть при любом ли выборе данных) можно выполнить построение избранным способом; 2) можно ли и как построить искомую фигуру, если избранный способ нельзя применить; 3) сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных? Рассмотрение всех этих вопросов и составляет содержание исследования.

К основным методам решения задач на построение, изучаемых в средней школе, относятся:

1. Метод геометрических мест.

2. Методы геометрических преобразований:

2.1. Метод центральной симметрии

2.2. Метод осевой симметрии

2.3. Метод параллельного переноса

2.4. Метод поворота

2.5. Метод подобия

3. Алгебраический метод.

Каждому методу сопоставляется определенный класс задач. Однако провести классификацию задач на построение по методам их решения нельзя. Это следует уже из того, что многие задачи допускают несколько методов решения. Поэтому можно говорить лишь об условном разбиении задач на построение на классы, определяемые их методами решения.

В школьном курсе геометрии задачам на построении уделяется большое внимание. Это задачи рассматриваются в конце седьмого класса.

Во всех рассматриваемых задачах на построение учащиеся пользуются только двумя чертёжными инструментами – линейкой и циркулем.

В школьном курсе геометрии при решении задач на построение, прежде всего нужно знать учащимся, как выполнить построение, а уже потом его выполнять. Кроме этого, важно уметь доказать. Что предложенное построение привело к построению фигуры с требуемыми свойствами.

Учащиеся должны научиться решать простейшие задачи на построение:

1. Построить треугольник с данными сторонами a, b, c.
2. Отложить от данной полупрямой в данную полуплоскость угол, равный данному углу.
3. Построить биссектрису данного угла.
4. Разделить отрезок пополам.
5. Через данную точку О провести прямую, перпендикулярную данной прямой a.

Но на факультативных занятиях можно рассмотреть несколько задач на построение, решаемых с помощью только одного циркуля.

Текст задач на построение с помощью циркуля на факультативных занятиях и для самостоятельного решения

Задача 1. Построить какую-нибудь точку, не лежащую на данной прямой.

Задача 2. В прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 впишите окружность, пользуясь одним циркулем.

Задача 3. (задача Наполеона). Дана окружность и её центр. С помощью циркуля разделите эту окружность на четыре равные части.

Задача 4. Только с помощью циркуля постройте точки пересечения прямой АВ с окружностью.

Задача 5. Построить отрезок, в 2, 3, 4, … в n раз больше данного отрезка А$А\_{1}$ ( n – любое натуральное число).

Также предлагаю несколько задач для самостоятельного решения.

Задача 1. Построить точку, симметричную данной точке С относительно данной прямой АВ.

Задача 2. На прямой, заданной точками А и В, построить одну или несколько точек.

Задача 3. Построить точки пересечения окружности (О, r) и прямой, заданной двумя точками А и В, если центр О не лежит на данной прямой АВ.

Решения задач на построение с помощью циркуля на факультативных занятиях и для самостоятельного решения

 Приведу решения задач для факультативного занятия.

Решение задачи 1. Возьмём на данной прямой две построенные точки А и В и построим две окружности (А, АВ) и (В, ВА). Эти окружности пересекаются в двух точках M и N.Эти точки являются искомыми (рис.1.1).

 М

 N

 (Рис.1.1)

 Решение задачи 2. По формуле радиуса вписанной окружности для прямоугольного треугольника r = $\frac{a+b -c }{2}$ находим: r = $\frac{3+4-5}{2}$ = 1. Далее раствором циркуля BC = 3 делаем засечку на AC – получаем точку T. Имеем TC = 4 – 3 = 1. Из точки C на катете получаем точку К; CT = CK = 1. Находим центр вписанной окружности, сделав засечки из точек T и K тем же раствором циркуля. И из центра O проводим окружность радиуса 1. Она и является искомой. По теореме Пифагора AB = 5 (рис.1.2).

 A

 4

 T 5

 О

 С К 3 В

 Рис.1.2

Решение задачи 3. Из произвольной точки А окружности раствором циркуля АО = R сделаем последовательно засечки – получим точки B,C и D.

Точка D диаметрально противоположна точке А (т.к. АВ, ВС, CD – стороны правильного шестиугольника, вписанного в окружность); AC = R$\sqrt{3}$ (как сторона правильного треугольника, вписанного в эту же окружность).Из точек A и D делаем засечки раствором АС = R$\sqrt{3}$ - получим точку К. Тогда КО = R$\sqrt{2}$ ( по теореме Пифагора для треугольника КАО). Отрезок R$\sqrt{2}$ - длина стороны квадрата, вписанного в окружность радиуса R. Поскольку вершины квадрата делят окружность на четыре равные части, остаётся раствором циркуля засечь на окружности последовательно четыре точки, которые являются искомыми (рис.1.3).

 К

 D А

 С В

 Рис. 1.3

 Решение задачи 4. Отразим окружность О относительно прямой АВ – получим окружность $О\_{1}$ (построить окружность $О\_{1}$ с помощью одного циркуля нетрудно). Пусть эти окружности пересекаются в точках Т и К. Эти точки и являются искомыми (рис. 1.4).

 А

 Т

 К

 В

 (рис.1.4)

Решение задачи 5. Построение осуществляется постоянным раствором ножек циркуля, равным r, где А$А\_{1}$= r. Проводим окружность ($А\_{1}$,r) и определяем на ней точку $А\_{2}$, диаметрально противоположную точке А (для чего последовательно проводим окружности (А,r), (В,R) и (С,r); в пересечении этих окружностей с окружностью ($А\_{1}$,r) последовательно получим точки В, С и $А\_{2}$). Отрезок А$А\_{2}$ = 2r.

Проводим затем окружность ($А\_{2},$r), которая пересечёт окружность (С,r) в точке D. В пересечении ранее проведённой окружности ($А\_{2}$,r) с (D,r) получим точку $А\_{3}$. Отрезок А$А\_{3}$ = 3r и т.д.

Проделав приведённое построение n раз, построим отрезок А$А\_{n}$ = nr.

Справедливость построения следует из того, что циркуль с раствором, равным радиусу окружности, делит её на шесть равных частей (рис.1.5).

$$ А\_{4}$$

 Рис.1.5

Решения задач для самостоятельной работы.

Решение задачи 1. Проводим окружности (А, АС) и (В, ВС), которые пересекутся в точке $С\_{1}$. Точка $С\_{1}$ - искомая. Если точка С лежит на прямой АВ, то она сама себе симметрична. Чтобы определить, лежат ли три данные точки А,В и Х на одной прямой линии, нужно вне прямой АВвзять произвольную точку $С\_{1}$. Точка Х лежит на прямой АВ тогда и только тогда, когда СХ = $С\_{1}$Х (рис.1.6).

 С

 Х

 $С\_{1}$

 Рис. 1.6

Решение задачи 2. Берём вне прямой АВ произвольную точку С и строим относительно прямой АВ симметричную ей точку $С\_{1}$ (предыдущая задача). Произвольным радиусом r проводим окружности (С,r) и ($С\_{1}$,r), в пересечении которых получим точки Х и $Х\_{1}$, лежащие на данной прямой АВ. Изменяя величину радиуса r, можно построить сколько угодно точек данной прямой: У, $У\_{1}$ и т.д. Точка $С\_{1}$ симметрична точке С, поэтому прямая АВ проходит через середину отрезка С$С\_{1} $и и АВ $⊥$ С$С\_{1}$, поэтому прямая АВ является множеством всех точек, равноотстоящих от точек С и $С\_{1}$. В силу построения СХ = $С\_{1}$Х = r и С$Х\_{1}$= $С\_{1}Х\_{1}$ = r, следовательно, Х $\in $ АВ и $Х\_{1}\in $ АВ (рис.1.7).

 С

 А

 Х $Х\_{1}$

 Рис. 1.7

Решение задачи 3. Строим точку $О\_{1}$, симметричную прямой АВ (задача 1). Проводим окружность ( $О\_{1}$,r), которая пересечёт данную окружность в искомых точках Х и У. Точки Х и У лежат на прямой АВ. Однако эти точки принадлежат и заданной окружности (О,r), следовательно, Х и У – это точки пересечения окружности (О,r) и прямой АВ (рис.1.8).

 Рис. 1.8

Кроме этих задач можно рассмотреть и задачи из школьного курса геометрии, только теперь их решить уже с помощью одного циркуля.

 Заключение

Из теоремы Мора – Маскерони, которая звучит так: « Любая задача на построение, выполняемая циркулем и линейкой, может быть выполнена одним циркулем» следует, что с теоретической точки зрения линейка является «лишним» инструментом построения. Однако. Практически наличие линейки в большинстве случаев значительно облегчает решение задачи, т.к. сокращает число шагов построения.

Задачи на построение увеличивают интерес учащихся к предмету, способствуют развитию творческих способностей, воображения, что им пригодиться в дальнейшем на уроках стереометрии в старших классах.

Список использованной литературы

1. Акад. Ж.Адамар «Элементарная геометрия» часть 1 «Планиметрия» Москва 1957 г.
2. Л.С. Атанасян, В.Т.Базылев «Геометрия» часть 1 Москва «Просвещение» 1986 г.
3. Л.С. Атанасян, Г.Б.Гуревич Москва «Просвещение» 1976 г.
4. В.А. Гусев, А.Г. Мордкович «Математика» Москва «Просвещение» 1988 г.
5. А.Н. Костовский «Геометрические построения одним циркулем». Москва «Наука» 1984 г.