

КОНСТРУИРОВАНИЕ ПРИМЕРОВ ДЛЯ УСВОЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И МЕТОДИКА ИХ ОБСУЖДЕНИЯ С УЧАЩИМИСЯ

В.А. Волкова

1. Основные положения методики конструирования примеров для усвоения определений.

При лично-ориентированном обучении математические определения не стараются дать учащимся в готовом виде. Взаимодействуя с относящимися к понятиям объектами, учащиеся при правильной организации их деятельности учатся самостоятельно формулировать определения. Но на этом формирование понятия только начинается.

В книге «Обогащающая модель обучения» [15, с.35-36] раскрывается понятийная познавательная деятельность, которая предполагает:

- «Наличие обратимого перевода содержания понятий со словесного языка на язык образов разной степени обобщенности.
- Установление системы связей данного понятия с рядом других понятий.
- Выделение и дифференциацию признаков, характеризующих объект или явление; классификацию всех выделенных признаков по степени их обобщенности и существенности для решения конкретной задачи.
- Сформированное^ основных мыслительных операций (анализа, синтеза, сравнения, обобщения и др.), характеризующихся свойством обратимости.
- Участие предметно-практического опыта учащихся в процессах становления и функционирования понятия».

Рассмотрим некоторые аспекты *этапа усвоения определений понятий*. Определение - та ориентировочная основа, с помощью которой происходит оценка объектов, с которыми взаимодействует ученик. Такая оценка в методической литературе называется *подведением объектов под определение* или более широко - *под понятие*. Учащимся предлагаются определенные объекты (рисунки, примеры), и надо установить, относятся ли эти объекты к соответствующим понятиям согласно их определениям. Очень важно, чтобы при выполнении приема подведения под понятие все действия сопровождалось проговариванием и объяснением вслух. Важность последнего подчеркивал Л.С. Выготский, когда говорил, что язык - это орудие мышления и речевые структуры, усвоенные ребенком, становятся основными структурами его мышления. Таким образом, на этапе усвоения определений реализуются две *цели*: учащиеся учатся определять, подходит объект под рассматриваемое понятие или нет, и одновременно запоминают определение.

Для приема подведения под определение существует следующий *алгоритм действий*:

- 1. Вспомнить (повторить, прочитать) определение понятия.*
- 2. Выделить в определении необходимые и в целом достаточные признаки (свойства) объектов данного класса.*

3. Проверить наличие у рассматриваемого объекта выделенных признаков понятия.

Если признаки связаны союзом «и», то проверять нужно все; если союзом «или», то выполняться должны родовый признак и хотя бы один из видовых.

4. Сделать вывод о принадлежности (не принадлежности) объекта к рассматриваемому понятию.

Конструирование примеров для этапа усвоения определений - примеров на «да» и «нет» осуществляется следующим образом [10, с. 19]: при составлении примеров на «да» учитель варьирует несущественные признаки понятия (изменяет размеры, расположение-фигур, включает частные случаи); при составлении примеров на «нет» отвергает один или несколько существенных признаков.

//. Формы работы по осуществлению приема подведения под определение

В своей практике я использую две формы работы с составленными примерами: по индивидуальной учебной карте и по таблице.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Понятие «Перпендикулярные прямые».

Учащиеся на индивидуальных картах получают задание, которое после выполнения выглядит следующим образом.

Определение:

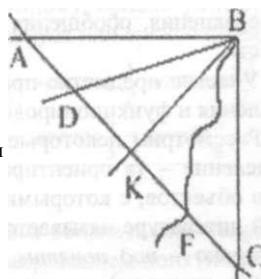
«Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом»

Задание.

С помощью чертежных инструментов определите, являются ли указанные фигуры перпендикулярными прямыми.

Для выполнения задания:

- 1) Выделите в определении существенные признаки
 - а) две прямые линии;
 - б) пересекаются;
 - с) образуют угол 90° .
- 2) Проверьте, есть ли у рассматриваемых объектов выделенные признаки.



А В И В Д			В О и А С			А С и В К			В С И В F		
а)	+	нет	а)	+	нет	а)	+	да	а)	-	нет
б)	+		б)	+		б)	+		б)		
с)	-		с)	-		с)	+		с)		

Другой вариант задания.

Приведите примеры таких прямых, для которых выполняются указанные в таблице условия, и сделайте вывод, являются ли они перпендикулярными:

? и ?		? и ?		? и ?	
а)	+	а)	+	а)	+
б)	-	б)	+	б)	+
с)	-	с)	+	с)	-

Использовать индивидуальные карты удобно тогда, когда учащимся требуются практические умения (умения пользоваться линейкой, транспортиром, угольником, циркулем) для распознавания объектов, представленных в виде чертежа, рисунка, реального объекта. Если объект задан так, что зрительно можно выделить всю нужную информацию, то удобно использовать таблицу, которая рисуется на доске.

Приведу пример таблицы, составленной учителем Л.В. Макласовой.

Пример 2. Понятие «Касательная к окружности»

Определение: «Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется касательной» [16].

Задание. Определите, является ли фигура касательной к окружности? Обоснуйте свой вывод.

Объект	Прямая	Проходит через точку окружности	Перпендикулярна к радиусу	Радиус проведен в об-щую точку окружности и прямой	Вывод
	+	+	+	+	Да
	+	+	-	-	Нет
	+	+	+	-	Нет
	-	-	-	-	Нет
	+	+	+	+	Да
	+	-	-	-	Нет

Столбики таблицы соответствуют всем признакам, указанным в определении. Желательно признаки понятия выделять вместе с учащимися. В приве-

денном примере родовым понятием является прямая; видовые отличия соединены союзом «и», значит, для того, чтобы фигура была касательной к окружности, требуется выполнение всех перечисленных признаков.

Пример 3. Понятие «Неправильная дробь» [9, с.45]

Определение: «Дробь, у которой числитель больше знаменателя или равен ему, называется неправильной» (видовые отличия соединены союзом «или») [5].

Задание. Определите, является ли данное число неправильной дробью? Обоснуйте

Объект	Дробь	Числитель больше знаменателя	Числитель равен знаменателю	Вывод
5/6	+	-	-	Нет
2002	-			Нет
81/5	+	+	-	Да
6/6	+	-	+	Да

В приведенном примере родовым понятием является дробь; видовые отличия соединены союзом «или», значит, для того, чтобы число было неправильной дробью, требуется выполнение родового и хотя бы одного из видовых признаков понятия.

///. Работа с понятиями, которым в учебнике нет определения.

Трудность вызывают те понятия, которым не дано в учебнике определения. Учащимся довольно трудно выделить существенные и несущественные признаки таких понятий. В курсе 5 класса к таким понятиям относятся понятия координатного луча и буквенных выражений.

Выделить существенные и несущественные признаки координатного луча помог анализ учебников серии «Математика. Психология. Интеллект» [6, 7].

К существенным признакам следует отнести:

- луч;
- на луче отмечены числа;
- числа располагаются по порядку (чем больше число, тем дальше от начала луча);
- расстояние между двумя последовательными числами равно расстоянию от 0 до 1, т.е. длине единичного отрезка.

К несущественным признакам следует отнести:

- расположение луча (необязательно горизонтально, вправо);
- длина единичного отрезка (может быть очень маленькой, тогда можем отметить на числовом луче такие числа как 20, 40, 60...);

- тот участок, с которым в данный момент работаем (если надо отметить числа 341, 342, 343..., то нужно строить луч, начало которого оказывается за рамками чертежа).

Таблица, с которой работают учащиеся при усвоении понятия координатного луча, может выглядеть следующим образом.

Пример 4. Понятие «Координатный луч».

Задание. Определите, является ли данная фигура координатным лучом? Обоснуйте свой вывод.

Объект	Признаки				Вывод
	1	2	3	4	
	+	+	+	+	Да
	+	+	+	+	Да
	+	+	-	-	Нет
	+	+	+	-	Нет
	-	-	-	-	Нет
	+	-	-	-	Нет
	+	-	-	-	Нет
	+!	+	+	+	Да

С началом изучения темы «Буквенные выражения» начинается алгебраическая подготовка. Термин «Буквенное выражение» говорит о том, что родовым понятием является понятие выражения, поэтому необходимо отработать признаки понятия «Числовое выражение».

Удобно использовать аналогию со структурой русского языка. Числа, скобки, знаки арифметических действий входят в математический алфавит. Из них

составляют «слова» математического языка - числовые выражения. Если числовое выражение составлено правильно, то можно найти его значение (выполняя указанный в выражении порядок действий).

Сопоставляя примеры числовых и буквенных выражений, учащиеся приходят к выводу: «Выражения, в которых некоторые числа обозначены буквами - буквенные выражения».

IV. Возможные варианты организации работы учащихся с таблицей для приема подведения под понятие.

Возможны следующие варианты:

1. Работа осуществляется фронтально - учащиеся обосновывают заполнение таблицы и соответствующий вывод; один человек работает с одной строкой.
2. Каждый в тетради проставляет «+» или «-», делает выводы, т.е. самостоятельно работает с таблицей. Далее организуется проверка по столбцам или строкам заполненной таблицы. Затем комментируется результат. В итоге учащиеся заучивают определение.
3. Работа с таблицей в паре, группе.
4. Для старших учащихся, владеющих приемами обобщения, синтеза и анализа можно предложить составить самостоятельно «начинку» для подобной таблицы или составить индивидуальные карты.
5. Наиболее сложный вариант, когда прием подведения под понятие осуществляется на слух. Этот прием хорошо использовать, когда учащиеся уже узнали не только определение, но и доказали теоремы - признаки понятия.

Пример 5. Понятие «Параллелограмм» (пример разработан учителем Т.В. Дашуниной).

Задание. Закройте глаза. Если на вопрос учителя, считаете, что надо ответить «да», то поднимите руку, если «нет», то руку не поднимайте.

Вопросы учителя. Является ли параллелограммом:

1. Четырехугольник, у которого две пары параллельных сторон?
2. Четырехугольник, у которого две пары равных сторон?
3. Четырехугольник, у которого один из углов 26° , а другой 174° ?
4. Четырехугольник, у которого диагонали равны?
5. Фигура, у которой противоположные стороны равны и параллельны?

Как показывает опыт, учащиеся неоднократно поднимают руку, хотя правильным является только первое утверждение. Приведенная дидактическая игра еще раз подтверждает, что формирование математических понятий требует постоянного внимания учителя.

V. Другие виды заданий на этапе усвоения определений.

Для более глубокого усвоения определения важно использовать не только действие подведения под понятие, но и выведение следствий из определения, сравнение, классификацию понятий и др. Число действий, в которых функционирует данное понятие, служит показателем качества его усвоения.

Рассмотрим выведение следствий из определения. В этом действии известно, что некоторый объект относится к рассматриваемому понятию, и надо рассказать о том, какими признаками обладает данный объект.

Так, если какая-нибудь фигура является отрезком, то

- 1) это часть прямой;
- 2) она ограничена с двух сторон.

Если какое-нибудь выражение является арифметическим корнем в n -й степени из числа a , то:

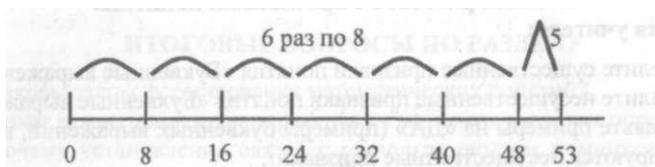
- 1) $a > 0$;
- 2) $n > 0$;
- 3) $b^n = a$.

Уместно предлагать упражнения по выведению следствий из определения на материале уже составленной таблицы с примерами на «да» и «нет».

Сравнивая примеры на «да», учащиеся выводят следствия о несущественных признаках понятия. Так, в ходе диалога при изучении буквенных выражений ученики назвали большой список несущественных признаков понятия, в частности:

- а) буква в записи выражения обозначает любые числа, при которых можно вычислить значение буквенного выражения;
- б) повторяющаяся буква в записи обозначает одно и то же число.

На этапе усвоения определений можно использовать еще один вид задания. Это задания, в которых понятия представлены в разных формах. Например, при изучении темы «Деление с остатком» задание может быть представлено рисунком:



Задание. По рисунку найдите делимое, делитель, частное и остаток. Запишите соотношение между ними, пользуясь формулой: $a = be + z$, где $z < b$.

VI. Работа с признаками понятий на этапе повторения.

Работа с признаками понятий, заключенными в определениях, может осуществляться и на этапе повторения. Так, при повторении геометрического материала в 5 классе возможны следующие задания.

Задание. Прочитайте следующие определения и назовите в каждом из них определяемое понятие. Какие другие понятия используются для определения выделенных понятий.

1. Лучом называется часть прямой, ограниченной с одной стороны.
2. Отрезком называется часть прямой, ограниченной с обеих сторон.
3. Линия называется ломаной, если она состоит из отрезков, и никакие два из этих отрезков с общим концом не лежат на одной прямой.
4. Каждый из отрезков, составляющих ломаную, называется звеном ломаной.
5. Длиной ломаной называется сумма длин ее звеньев.
6. Замкнутая ломаная называется многоугольником.

7. Четырехугольником называется многоугольник с четырьмя сторонами.
8. Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые.
9. Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Задание. Прочитайте определения и назовите определяемые понятия. Начертите фигуры, о которых идет речь в этих определениях.

1. Две прямые пересекаются, если эти прямые имеют ровно одну общую точку.
2. Две прямые называются параллельными, если они не имеют общих точек.
3. Окружностью называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется центром окружности.
4. Диаметр окружности называется отрезок, соединяющий две точки окружности и проходящий через её центр.
5. Отрезок, соединяющий центр окружности с одной из её точек, называется радиусом окружности.
6. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой окружности.

ПРАКТИКУМ

«Учимся работать с признаками понятий»

Задание для учителя:

1. Выделите существенные признаки понятия «Буквенные выражения».
2. Выделите несущественные признаки понятия «Буквенные выражения».
3. Составьте примеры на «ДА» (примеры буквенных выражений, в которых варьируются несущественные признаки).
4. Составьте примеры на «НЕТ» (примеры, в которых отвергается один или несколько существенных признаков).
5. Проверьте выполнение задания с предлагаемым ниже вариантом.

Проверка:

1. Существенные признаки:
 - выражение;
 - содержит букву.
2. Несущественные признаки:
 - знаки действий и их число;
 - числа;
 - буквы и их число;
 - скобки.
3. Примеры на «ДА»

Примеры	КОММЕНТАРИЙ
$(32-к): 4 + 5$	стандартное буквенное выражение;
$3 + a + b$	буквенное выражение, где нет скобок и разные буквы;
$abcd$	буквенное выражение, содержит разные буквы, нет знака умножения;
$(a \cdot 5) + 4$	буквенное выражение, можно ставить и не ставить скобки и знак умножения; лучше писать $5a$;
$16-d + d-d$	повторяющаяся буква в записи;
$(a - 5 + b - 3) : 8$	есть все знаки арифметических действий.

4. Примеры на «НЕТ»

Примеры	КОММЕНТАРИЙ
2002	не выражение, а число;
$7+(x - 8)$	ошибка в записи выражения;
$5-8x: + 3$	не выражение, так как два знака действия подряд;
$25 -5 --20$	не выражение, а истинное числовое равенство;
$((+):)$	не выражение, так как не указаны объекты, с которыми следует производить действия;
$42-(7+ 11)-4$	числовое выражение;
$5 + * = 13$	не выражение, а уравнение.

ИТОГОВЫЕ ВОПРОСЫ ПО РАЗДЕЛУ

1. Каковы этапы формирования математических понятий?
2. Зачем важно продумывать различные варианты введения определений?
3. Почему установление связей с прошлым опытом учащихся, мотивация деятельности учащихся, работа с признаками понятия являются ключевыми на этапе введения определений?
4. Как конструировать примеры на «да» и «нет», какова методика организации деятельности учащихся с такими примерами?
5. Почему важно при подведении итогов изучения понятий передавать инициативу учащимся в перечислении того, что они узнали, чему учились, какие трудности испытывали, как их преодолевали, что требует дальнейшего внимания?